Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Царев, Проективные и образующие модули над
кольцом псевдорациональных чисел, *Матем. заметки*,
2006, том 80, выпуск 3, 437–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:05:25

УДК 512.541+512.553.3

ПРОЕКТИВНЫЕ И ОБРАЗУЮЩИЕ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦОМ ПСЕВДОРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. В. Царев

В работе описаны проективные, плоские и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел, причем для проективных модулей построена полная и независимая система инвариантов.

Библиография: 10 названий.

Кольцо псевдорациональных чисел ввели независимо друг от друга А. А. Фомин [1] и П. А. Крылов [2]. В [3] Фомин использовал конечно порожденные модули над этим кольцом для построения двойственности между категориями абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых смешанных групп с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов. Крылов использовал модули над кольцом псевдорациональных чисел для изучения модульной структуры абелевых sp -групп над их кольцами эндоморфизмов (см., например, [4]).

Оба автора исследовали некоторые свойства кольца псевдорациональных чисел и модулей над ним. Так, например, и в [1] и в [2] дано описание идеалов кольца псевдорациональных чисел. Кроме того, Крыловым с соавторами доказана наследственность данного кольца, а Фоминым введен важный инвариант – псевдорациональный ранг. Отметим также, что С. В. Чегляковой в [5] описаны инъективные модули над этим кольцом. О связи модулей над кольцом псевдорациональных чисел с факторно делимыми смешанными группами и группами без кручения конечного ранга см. также [6].

Под “группой” в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно, под “кольцом” – коммутативное кольцо, под “модулем” – двусторонний модуль над коммутативным кольцом; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\hat{\mathbb{Z}}_p$ – обозначения колец целых, рациональных и целых p -адических чисел соответственно или их аддитивных групп, $\mathbb{Z}(m)$ – кольцо (аддитивная группа) классов вычетов по модулю m , P – множество всех простых чисел, $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Если S – подмножество K -модуля M , то через $\langle S \rangle$ и $\langle S \rangle_K$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S , а через $\langle S \rangle_*$ – сервантную оболочку множества S , состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S \rangle$ при некотором натуральном n . Через $r^*(M)$ будем обозначать псевдорациональный ранг R -модуля M , а через tM – его периодический подмодуль.

Другие используемые в работе понятия и обозначения можно найти в [7] и [8].

1. Идеалы кольца R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\chi = (m_p)$ – произвольная характеристика и $K_p = \mathbb{Z}(p^{m_p})$ или $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$, соответственно при $m_p < \infty$ и $m_p = \infty$. Если χ содержит бесконечно много ненулевых p -компонент, то рассмотрим подкольцо R_χ кольца $\prod_{p \in P} K_p$, сервантно порожденное идеалом $\bigoplus_{p \in P} K_p$ и единицей кольца:

$$R_\chi = \left\langle 1, \bigoplus_{p \in P} K_p \right\rangle_*.$$

Если все p -компоненты характеристики χ , за исключением $p_1, \dots, p_n$, равны нулю, то определим $R_\chi = \mathbb{Q} \oplus K_{p_1} \oplus \dots \oplus K_{p_n}$. Если $\chi = (\infty, \infty, \dots)$ – характеристика группы рациональных чисел, то кольцо R_χ будем называть *кольцом псевдорациональных чисел* и обозначать просто R .

Для характеристики χ , все p -компоненты которой, за исключением $p_1, \dots, p_n$, равны нулю, определим еще кольцо $K_\chi = K_{p_1} \oplus \dots \oplus K_{p_n}$.

Свойства колец R_χ . 1. Если характеристика χ содержит бесконечно много ненулевых компонент, то элемент $r = (\alpha_p) \in \prod_{p \in P} K_p$ принадлежит кольцу R_χ тогда и только тогда, когда существует такое рациональное число $|r| = m/n$, что $n\alpha_p = m$ почти при всех простых p .

2. Элемент, все p -компоненты которого, включая и рациональную (если такая есть), равны 1 (0), принадлежит R_χ и является единицей (нулем) кольца R_χ .

3. Обозначим через ε_p элемент кольца R_χ такой, что его p -компонента равна 1, а все остальные компоненты (включая и рациональную, если такая содержится) равны 0. Тогда ε_p – идемпотент, а множество $\varepsilon_p R_\chi$ является идеалом кольца R_χ и выделяется прямым слагаемым.

4. Элементы вида

(а) $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_n}$, где $p_1, \dots, p_n$ – различные простые числа,

и элементы вида

(б) $1 - \varepsilon$,

а также 1 и 0, составляют множество всех идемпотентов кольца R_χ .

5. Если характеристика χ содержит бесконечно много ненулевых компонент, то для элемента $r \in R_\chi$ обозначим через $|r|$ рациональное число, определенное в свойстве 1, а если характеристика χ почти нулевая, то через $|r|$ обозначим рациональную компоненту элемента r . Тогда число $|r|$ определено однозначно и

$$|r_1 \pm r_2| = |r_1| \pm |r_2|, \quad |r_1 \cdot r_2| = |r_1| \cdot |r_2|$$

для любых $r_1, r_2 \in R_\chi$.

6. Любой элемент $r \in R_\chi$ можно представить в виде $r = \varepsilon r + (1 - \varepsilon)|r|$, где ε – идемпотент вида (а).

7. Множество $T_\chi = \bigoplus_{p \in P} K_p$ является максимальным идеалом кольца R_χ , причем $R_\chi/T_\chi \cong \mathbb{Q}$. Если $\chi = (\infty)$, то идеал T_χ будем обозначать T .

8. Если идеал кольца R_χ содержит такой элемент r , что $|r| \neq 0$, то он содержит идемпотент вида (б).

Рассмотрим кольцо R_χ , построенное на характеристике $\chi = (m_p)$. Пусть J – произвольный идеал кольца R_χ , $T_J = T_\chi \cap J$ – множество всех таких $r \in J$, что $|r| = 0$. Возможны два случая.

1-й случай. $T_J = J$. Пусть $\varepsilon_p J = J_p$. Рассмотрим отображения $\pi_i: J \rightarrow J_{p_i}$ по закону $\pi_i(r) = \varepsilon_{p_i} r$. Для них, очевидно, выполняются условия

$$(a) \quad \pi_i \pi_j = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ \pi_i, & \text{при } i = j, \end{cases}$$

(b) для любого $r \in J$

$$r = \varepsilon r = \varepsilon_{p_1} r + \cdots + \varepsilon_{p_n} r = \pi_1(r) + \cdots + \pi_n(r).$$

Тогда эти отображения задают прямое разложение

$$J = \bigoplus_{p \in P} J_p. \quad (1)$$

Так как $J_p = \varepsilon_p J$ — идеал кольца $\varepsilon_p R_\chi = K_p$, то

$$J_p = 0 \quad \text{или} \quad J_p = p^{s_p} K_p, \quad s_p < m_p. \quad (2)$$

Таким образом, из (1) и (2) следует, что

$$J = \bigoplus_{p \in P_1} p^{s_p} K_p \cong T_\varphi,$$

где $P_1 = \{p \in P \mid J_p \neq 0\}$, а характеристика $\varphi = (k_p)$ такая, что $k_p = m_p - s_p$ при $p \in P_1$ и $k_p = 0$ при $p \notin P_1$.

2-й случай. В J существует такой элемент r , что $|r| = m/n \neq 0$. Тогда для элемента $s \in R_\chi$ такого, что $|s| = n/m$, справедливо $sr = t \in J$, причем $|t| = 1$. Так как $ut \in J$ для любого $u \in R_\chi$, то в идеале J есть элементы из каждого класса смежности множества R_χ/T_χ .

Очевидно, что для $r, s \in J$ равенство $|r| = |s|$ выполняется тогда и только тогда, когда $r - s \in T_J$. Значит, идеал J состоит из подклассов $r + T_J$, взятых по одному из каждого класса $r + T_\chi$.

Так как любой класс, содержащийся в J , можно записать в виде $rt + T_J$, где $r \in R_\chi$, $t \in J$ и $|t| = 1$, то идеал J однозначно определяется классами T_J и $t + T_J$.

Убедимся, что идеал J однозначно определяется одним множеством T_J . Пусть J_1 — произвольный идеал кольца R_χ , не содержащийся в T_χ , такой, что $T_{J_1} = T_J$. Возьмем такие элементы $t_1 \in J_1$ и $t \in J$, что $|t_1| = |t| = 1$. Тогда $t_1 t \in J$ и $t_1 t \in J_1$. Так как $|t_1 t| = 1$, то

$$t_1 t + T_J = t_1 + T_J = t + T_J;$$

следовательно, идеалы J и J_1 совпадают, так как определяются одними и теми же классами T_J и $t + T_J$.

Так как $J \not\subset T_\chi$, то идеал J содержит такой элемент r , что $|r| \neq 0$; следовательно, в J содержится идемпотент $1 - \varepsilon$ вида (b). Тогда

$$T_J = (1 - \varepsilon)T_\chi \oplus p_1^{k_1} K_{p_1} \oplus \cdots \oplus p_n^{k_n} K_{p_n},$$

где $\varepsilon_{p_i}(1 - \varepsilon) = 0$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Учитывая, что J однозначно определяется множеством T_J , получаем

$$J = (1 - \varepsilon)R_\chi \oplus p_1^{k_1} K_{p_1} \oplus \cdots \oplus p_n^{k_n} K_{p_n}.$$

Таким образом, получили теорему.

ТЕОРЕМА 1. Множества следующего вида, и только они, являются идеалами кольца R_χ :

- 1) $\bigoplus_{p \in P_1} p^{s_p} K_p$, где $P_1 \subseteq P$;
- 2) $(1 - \varepsilon_{p_1} - \dots - \varepsilon_{p_n}) R_\chi \oplus \bigoplus_{p \in P_1} p^{s_p} K_p$, где $P_1 \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любой конечно порожденный идеал кольца R_χ главный.

2. Проективные и плоские R -модули.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Модуль M называется *проективным*, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

- 1) каждый эпиморфизм $\xi: B \rightarrow M$ расщепляется, т.е. $B = \ker \xi \oplus A$;
- 2) для любого эпиморфизма $\alpha: A \rightarrow B$ и любого гомоморфизма $\varphi: M \rightarrow B$ существует такой гомоморфизм $\psi: M \rightarrow A$, что $\varphi = \alpha\psi$;
- 3) модуль M изоморфен прямому слагаемому свободного модуля.

Напомним, что кольцо K называется *наследственным*, если любой его идеал является проективным модулем над K .

ТЕОРЕМА 2. Кольцо R_χ является наследственным тогда и только тогда, когда характеристика χ содержит только символы 0, 1 и ∞ . В частности, кольцо псевдорациональных чисел наследственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть характеристика $\chi = (m_p)$ удовлетворяет условиям теоремы. Идеалы вида $(1 - \varepsilon)R_\chi$ всегда проективны над кольцом R_χ , так как выделяются прямыми слагаемыми в R_χ . Идеалы вида $p^{k_p} K_p$, $0 < k_p < m_p$, либо нулевые при $m_p = 0$, либо равны $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ при $m_p = 1$ и $k_p = 0$, либо изоморфны $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ при $m_p = \infty$; следовательно, они также проективны. Учитывая, что каждый идеал кольца R_χ является прямой суммой выше рассмотренных идеалов, получаем, что любой идеал кольца R_χ проективен.

Если характеристика χ содержит элемент m_p такой, что $1 < m_p < \infty$, то кольцо R_χ содержит идеал pK_p , который, очевидно, не проективен.

Учитывая, что проективные модули над наследственными кольцами изоморфны прямым суммам идеалов, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Модуль M проективен над кольцом псевдорациональных чисел тогда и только тогда, когда

$$M \cong \bigoplus_{i \in I} (1 - \varepsilon_i) R \oplus \bigoplus_{p \in P} \bigoplus_{\mathfrak{m}_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p.$$

При доказательстве следующей теоремы используется тот факт, что любой подмодуль проективного модуля над наследственным кольцом проективен.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M_1 и M_2 – произвольные проективные R -модули. Тогда если $TM_1 \cong TM_2$ и $M_1/TM_1 \cong M_2/TM_2$, то $M_1 \cong M_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & TM_1 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & M_1/TM_1 \longrightarrow 0 \\ & & & & \varphi \downarrow \uparrow \psi & & \downarrow \delta \\ 0 & \longrightarrow & TM_2 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & M_2/TM_2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Здесь δ – изоморфизм, а гомоморфизмы φ и ψ существует в силу проективности модулей M_1 , M_2 и определяются равенствами

$$\beta_2\varphi = \delta\beta_1, \quad \beta_1\psi = \delta^{-1}\beta_2. \quad (3)$$

Из (3) следует, что $\beta_1 = \delta^{-1}\beta_2\varphi$ и $\beta_2 = \delta\beta_1\psi$, откуда

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \delta(\delta^{-1}\beta_2\varphi)\psi = \beta_2\varphi\psi \implies \beta_2(1_{M_2} - \varphi\psi) = 0, \\ \beta_1 &= \delta^{-1}(\delta\beta_1\psi)\varphi = \beta_1\psi\varphi \implies \beta_1(1_{M_1} - \psi\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Тогда для любых $a \in M_1$, $b \in M_2$

$$\psi\varphi(a) = a + t_1, \quad \varphi\psi(b) = b + t_2 \quad t_1 \in TM_1, \quad t_2 \in TM_2. \quad (4)$$

Рассмотрим отображение $\omega = 1_{M_2} - \varphi\psi$. Согласно (4) ω есть гомоморфизм между R -модулями M_2 и TM_2 . По основной теореме о гомоморфизме

$$\omega(M_2) \cong M_2 / \ker \omega. \quad (5)$$

Так как $\omega(M_2) \subseteq TM_2$ и TM_2 – проективный R -модуль, то $\omega(M_2)$ также проективный R -модуль. А тогда из (5) и проективности $\omega(M_2)$ следует равенство

$$M_2 = \omega(M_2) \oplus \ker \omega, \quad \omega(M_2) \subseteq TM_2.$$

Обозначим $\omega(M_2) = T_2$, $\ker \omega = S_2$; тогда $M_2 = T_2 \oplus S_2$. Заметим, что $b \in \ker \omega$ тогда и только тогда, когда $\varphi\psi(b) = b$; следовательно,

$$S_2 = \{b \in M_2 \mid \varphi\psi(b) = b\}. \quad (6)$$

Аналогично доказывается, что $M_1 = T_1 \oplus S_1$, где

$$S_1 = \{a \in M_1 \mid \psi\varphi(a) = a\}. \quad (7)$$

Если $a \in S_1$, то согласно (7) верно, что $\psi\varphi(a) = a$. Так как $\varphi\psi(\varphi(a)) = \varphi(a)$, то $\varphi(a) \in S_2$, и значит,

$$a = \psi(\varphi(a)) \in \psi(S_2);$$

следовательно, $S_1 \subseteq \psi(S_2)$. А если $c \in \psi(S_2)$, то $c = \psi(b)$, где $b \in S_2$. Тогда $\varphi(c) = \varphi\psi(b) = b$, откуда $\psi\varphi(c) = \psi(b) = c$, т.е. $c \in S_1$ и $\psi(S_2) \subseteq S_1$. Таким образом,

$$\psi(S_2) = S_1. \quad (8)$$

Из (7) следует, что R -модули S_2 и $\psi(S_2)$ изоморфны, значит, в соответствии с равенством (8), изоморфны R -модули S_1 и S_2 .

Так как $M_2 = S_2 \oplus T_2$, где $T_2 = \omega(M_2) \subseteq TM_2$, то $TM_2 = TS_2 \oplus T_2$. Аналогично, $TM_1 = TS_1 \oplus T_1$. Учитывая, что $S_1 \cong S_2$ и TM_1, TM_2 – прямые суммы проективных (свободных) $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -модулей (по различным простым p), получаем, что $T_1 \cong T_2$. Таким образом, R -модули M_1 и M_2 изоморфны. Теорема доказана.

Пусть M – произвольный проективный R -модуль. Рассмотрим его подмодуль TM . Он также проективен, более того, $TM = \bigoplus_{p \in P} M_p$, где M_p – свободный $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -модуль. Каждое слагаемое M_p с точностью до изоморфизма задается кардинальным числом $\mathfrak{r}_p$, равным мощности множества прямых слагаемых вида $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ в его свободном разложении. Далее, фактормодуль M/TM является векторным пространством над полем рациональных чисел; следовательно, задается величиной $\dim_{\mathbb{Q}} M/TM$, называемой *псевдорациональным рангом* R -модуля M (далее его будем обозначать $r^*(M)$).

Из всего выше сказанного и теоремы 3 следует, что *псевдорациональный ранг и множество кардинальных чисел $\{\mathfrak{r}_p\}_{p \in P}$ составляют полную и независимую систему инвариантов проективного R -модуля M .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. K -модуль M называется *плоским*, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

- 1) каждый мономорфизм $\alpha: A \rightarrow B$ индуцирует мономорфизм

$$\alpha \otimes 1_M: A \otimes_K M \rightarrow B \otimes_K M;$$

- 2) для любого конечно порожденного идеала I кольца K канонический эпиморфизм $\beta: I \otimes_K M \rightarrow IM$ по закону $\beta(i \otimes m) = im$ является изоморфизмом;
- 3) модуль M является прямым пределом проективных K -модулей.

Из теоремы 1 следует, что конечно порожденные идеалы кольца псевдорациональных чисел имеют вид

$$I_1 = \bigoplus_{p \in P_1} p^{s_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p \quad \text{или} \quad I_2 = (1 - \varepsilon)R \oplus \bigoplus_{p \in P_1} p^{s_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p = (1 - \varepsilon)R \oplus I_1,$$

где P_1 – произвольное конечное множество простых чисел и $(1 - \varepsilon)I_1 = 0$. Тогда

$$I_1 \otimes_R M \cong \bigoplus_{p \in P_1} [p^{s_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p \otimes_R M], \quad I_2 \otimes_R M \cong [(1 - \varepsilon)R \otimes_R M] \oplus [I_1 \otimes_R M].$$

Так как модуль $(1 - \varepsilon)R \otimes_R M$ канонически изоморфен модулю $(1 - \varepsilon)M$, из прямого разложения модуля $I_1 \otimes_R M$ и условия 2) определения плоского модуля следует, что M является плоским R -модулем тогда и только тогда, когда $M_p = \varepsilon_p M$ – плоский $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -модуль при любом простом p .

Так как $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ – коммутативная наследственная область целостности, то p -адический модуль M_p является плоским в том и только том случае, когда M_p есть модуль без кручения, что равносильно тому, что в M_p нет элементов порядка p .

Таким образом, из всего выше сказанного следует

ТЕОРЕМА 4. *Модуль над кольцом псевдорациональных чисел является плоским тогда и только тогда, когда в нем нет элементов конечного порядка, отличных от нуля.*

Вернемся к вопросу о проективности для случая конечно порожденных R -модулей. Для начала докажем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Если L – подмодуль R -модуля M , то $r^*(M) = r^*(M/L) + r^*(L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $T(M/L) = TM/TL$, то

$$(M/L)/T(M/L) = (M/L)/(TM/TL) \cong (M/TM)/(L/TL).$$

Следовательно, $r^*(M) = r^*(M/L) + r^*(L)$.

Далее, пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – произвольная система элементов R -модуля M . Рассмотрим множество

$$\Delta M_X = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0\},$$

которое, очевидно, является R -модулем. Если X – система образующих в M , то ΔM_X будем называть *модулем псевдорациональных отношений* R -модуля M .

ЛЕММА 2. Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – система образующих R -модуля M , то

$$n = r^*(M) + r^*(\Delta M_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ по закону

$$\varphi(r_1, \dots, r_n) = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n.$$

Нетрудно убедиться, что φ – эпиморфизм. Заметим, что

$$(r_1, \dots, r_n) \in \ker \varphi \iff r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0,$$

т.е. $\ker \varphi = \Delta M_X$; следовательно, $M \cong \mathbb{R}^n / \Delta M_X$ и $n = r^*(M) + r^*(\Delta M_X)$.

ТЕОРЕМА 5. Конечно порожденный R -модуль раскладывается в прямую сумму проективного и конечного модуля тогда и только тогда, когда у него есть конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть конечно порожденный R -модуль M раскладывается в прямую сумму проективного и конечного модуля. Тогда

$$M \cong (1 - \varepsilon_1)R \oplus \dots \oplus (1 - \varepsilon_n)R \oplus K_{\chi_1} \oplus \dots \oplus K_{\chi_m}. \quad (9)$$

Рассмотрим множество X , в которое входит по одному образующему элементу из каждого слагаемого разложения (9). Нетрудно видеть, что тогда

$$\Delta M_X \cong \varepsilon_1 R \oplus \dots \oplus \varepsilon_n R \oplus (1 - \varepsilon_{n+1})R \oplus \dots \oplus (1 - \varepsilon_{n+m})R,$$

т.е. M имеет конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений.

Обратно, пусть M имеет конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений ΔM_X , построенный на множестве образующих $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Рассмотрим множество

$$\Delta^* M_X = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \in tM\},$$

где tM – подмодуль R -модуля M , состоящий из всех элементов конечного порядка. Очевидно, $\Delta^* M_X$ является модулем псевдорациональных отношений R -модуля M/tM , построенным на множестве образующих $\overline{X} = \{x_1 + tM, \dots, x_n + tM\}$.

Так как $tM \subseteq TM$, то $r^*(tM) = 0$; следовательно, $r^*(M/tM) = r^*(M)$. По лемме 2 отсюда получаем, что $r^*(\Delta^* M_X) = r^*(\Delta M_X)$.

Поскольку кольцо R наследственное, то из $\Delta^*M_X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\Delta M_X \subseteq \mathbb{R}^n$ получаем, что R -модули Δ^*M_X и ΔM_X проективные. Тогда, учитывая, что $r^*(\Delta^*M_X) = r^*(\Delta M_X)$, имеют место разложения

$$\Delta^*M_X = P_1 \oplus S_1 \quad \text{и} \quad \Delta M_X = P_2 \oplus S_2,$$

где $P_1 \cong P_2 \cong (1-\varepsilon)R^k$, а модули S_1 и S_2 имеют псевдорациональный ранг 0, причем S_2 конечно порожден.

Предположим, что R -модуль Δ^*M_X не является конечно порожденным. Тогда S_1 содержит подмодуль L вида $\bigoplus_{p \in P_1} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, где P_1 – бесконечное множество простых чисел. Пусть $\{\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ – независимое над R множество порождающих модуля L . Так как

$$\alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \in tM \iff m_i\alpha_{i1}x_1 + \dots + m_i\alpha_{in}x_n = 0$$

при некотором натуральном m_i , то S_1 также содержит подмодуль вида $\bigoplus_{p \in P_1} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, порожденный множеством $\{m_i\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Но последнее невозможно, поскольку S_1 – конечно порожденный R -модуль псевдорационального ранга 0. Из полученного противоречия следует, что Δ^*M_X – конечно порожденный R -модуль.

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Delta^*M_X \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0.$$

Так как Δ^*M_X конечно порожден, то M/tM конечно представим. Очевидно также, что M/tM – плоский R -модуль. А любой плоский конечно представимый модуль является проективным (см., например, [8]).

Отображение $\varphi: \Delta^*M_X \rightarrow tM$ по закону $\varphi(r_1, \dots, r_n) = r_1x_1 + \dots + r_nx_n$, очевидно, является эпиморфизмом. Так как $\ker \varphi = \Delta M_X$, то $tM \cong \Delta^*M_X / \Delta M_X$. R -модуль Δ^*M_X является конечно порожденным; следовательно, tM также конечно порожден. Тогда $tM = \varepsilon_{p_1}tM \oplus \dots \oplus \varepsilon_{p_s}tM$, где $\varepsilon_{p_i}tM$ – конечно порожденные периодические $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -модули, которые конечны. Следовательно, R -модуль tM является конечным.

Из проективности R -модуля M/tM следует, что $M \cong M/tM \oplus tM$. Таким образом, обратное утверждение и теорема доказаны.

ЛЕММА 3. Пусть L – подмодуль конечно порожденного R -модуля M , для которого $r^*(L) = r^*(M)$; тогда L конечно порожден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$, $L \subseteq M$ и $r^*(M) = r^*(L) = k$. И пусть $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ – наибольшее подмножество из L , независимое по модулю TL , т.е. Y содержит по одному элементу из каждого класса эквивалентности по модулю TL , кроме нулевого. Так как $r^*(L) = r^*(M)$, то Y будет наибольшим независимым по модулю TM множеством в M . Тогда

$$x_i = r_{i1}y_1 + \dots + r_{ik}y_k + t_i, \quad \text{где } r_{ij} \in R, \quad t_i \in TM$$

и $M = \langle y_1, \dots, y_k, t_1, \dots, t_n \rangle_R$. Так как $t_1, \dots, t_n \in TM$, найдется такой идемпотент $\varepsilon \in R$, что $\langle t_1, \dots, t_n \rangle_R \subseteq \varepsilon TM$. Рассмотрим следующие разложения:

$$M = (1 - \varepsilon)\langle y_1, \dots, y_k \rangle_R \oplus \varepsilon M \quad \text{и} \quad L = (1 - \varepsilon)L \oplus \varepsilon L.$$

Отсюда $(1 - \varepsilon)L = (1 - \varepsilon)\langle y_1, \dots, y_k \rangle_R$ – конечно порожденный R -модуль и $\varepsilon L \subseteq \varepsilon M$.

Так как M – конечно порожденный R -модуль, то $\varepsilon_p M$ – тоже конечно порожденный R -модуль, причем структура R -модуля на $\varepsilon_p M$ совпадает со структурой $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -модуля. Модуль $\varepsilon_p L$ содержится в конечно порожденном $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -модуле $\varepsilon_p M$; следовательно, $\varepsilon_p L$ конечно порожден. А так как εL раскладывается в прямую сумму модулей вида $\varepsilon_p L$, где p пробегает некоторое конечное множество, то εL тоже конечно порожден.

Таким образом R -модуль L конечно порожденный, как прямая сумма конечно порожденных модулей $(1 - \varepsilon)L$ и εL .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если y конечно порожденного R -модуля существует конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений, то все его модули псевдорациональных отношений конечно порождены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим R -модуль M , удовлетворяющий условиям предложения. Пусть ΔM_X – его произвольный модуль псевдорациональных отношений, построенный на системе $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Как и в доказательстве теоремы 5 построим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Delta^* M_X \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow M/tM \rightarrow 0. \quad (10)$$

Так как M имеет конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений, по теореме 5 R -модуль M/tM проективный. Следовательно, последовательность (10) расщепляется, т.е. $\mathbb{R}^n \cong \Delta^* M_X \oplus M/tM$. Здесь $\mathbb{R}^n$ и M/tM – конечно порожденные R -модули; значит, $\Delta^* M_X$ – тоже конечно порожденный R -модуль.

Учитывая, что $\Delta M_X \subseteq \Delta^* M_X$ и $r^*(\Delta M_X) = r^*(\Delta^* M_X)$, по лемме 3 получаем, что ΔM_X – конечно порожденный R -модуль.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Конечно порожденный R -модуль является конечно представленным тогда и только тогда, когда он раскладывается в прямую сумму проективного и конечного R -модулей.*

СЛЕДСТВИЕ 4. *Плоский конечно порожденный модуль над кольцом псевдорациональных чисел является проективным тогда и только тогда, когда он конечно представленный.*

Справедливость данных утверждений непосредственно вытекает из теоремы 5.

3. Образующие R -модули. Пусть M и L – произвольные K -модули. Для них рассмотрим подмодули

$$S_L(M) = \sum_{\varphi: M \rightarrow L} \varphi(M) \quad \text{и} \quad K_M(L) = \bigcap_{\varphi: M \rightarrow L} \ker \varphi.$$

Модуль $S_L(M)$ называют *следом* модуля M в модуле L , а фактормодуль $M/K_M(L)$ называют *коследом* модуля L в M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Модуль M над кольцом K называется *образующим*, если его след в кольце K равен K .

Найдем условия, при которых модуль M над кольцом псевдорациональных чисел является образующим.

Так как $S = S_R(M)$ – идеал кольца R , то из выше сказанного следует, что он однозначно задается множеством $T_S = T \cap S$ и своим псевдорациональным рангом.

ТЕОРЕМА 6. *R -модуль M является образующим тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- 1) *M содержит прямые слагаемые вида $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ при любом простом p ;*
- 2) $\text{Hom}_R(M, R) \neq \text{Hom}_R(M, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – след модуля M в кольце R . Равенство $S = R$ выполняется тогда и только тогда, когда $T_S = T = \bigoplus_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$ и $r^*(S) = 1$.

Равенство $\varepsilon_p S = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ равносильно существованию эпиморфизма из M в $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Но $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ – проективный R -модуль; следовательно, последнее условие эквивалентно тому, что M имеет прямое слагаемое, изоморфное $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Условие $r^*(S) = 1$ эквивалентно существованию гомоморфизма $\varphi \in \text{Hom}_R(M, R)$ такого, что $\varphi(M) \not\subset T$, т.е. равносильно тому, что

$$\text{Hom}_R(M, R) \neq \text{Hom}_R(M, T).$$

Таким образом, теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Модуль M над кольцом псевдорациональных чисел является образующим тогда и только тогда, когда $M \cong R \oplus X$, где X – некоторый R -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – произвольный образующий R -модуль. Согласно условию 2 теоремы 6 существует такой гомоморфизм φ из M в R , что $\varphi(M) \not\subset T$. Тогда идеал $\varphi(M)$ кольца R содержит идемпотент $(1 - \varepsilon)$ вида (b), а значит,

$$\varphi(M) = (1 - \varepsilon)R \oplus \varepsilon\varphi(M).$$

Композиция эпиморфизма $\varphi: M \rightarrow \varphi(M)$ и проекции $\pi: \varphi(M) \rightarrow (1 - \varepsilon)R$ есть эпиморфизм из M в $(1 - \varepsilon)R$. Но $(1 - \varepsilon)R$ является проективным R -модулем; следовательно, M содержит прямое слагаемое вида $(1 - \varepsilon)R$, т.е.

$$M \cong (1 - \varepsilon)R \oplus X_1.$$

Из условия 1 теоремы 6 следует, что R -модуль M содержит также прямое слагаемое, изоморфное модулю εR , а значит, $M \cong R \oplus X$.

Обратное утверждение очевидно.

Из теорем 6 и 7 вытекают довольно интересные следствия.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если M – произвольный модуль над кольцом псевдорациональных чисел, то условие $\text{Hom}_R(M, R) \neq \text{Hom}_R(M, T)$ равносильно тому, что M содержит прямое слагаемое вида $(1 - \varepsilon)R$.*

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть M – конечно порожденный R -модуль. Если*

$$r^*(M) - r^* \text{Hom}(M, R) \leq 1,$$

то M раскладывается в прямую сумму циклических R -модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модуль M удовлетворяет условиям данного утверждения и $r^*(M) = n$; тогда $r^* \text{Hom}_R(M, R) \geq n - 1$, а значит, по следствию 5 имеет место прямое разложение

$$M \cong (1 - \varepsilon)\mathbb{R}^{n-1} \oplus X,$$

причем X – конечно порожденный R -модуль псевдорационального ранга 1.

В [9] доказано, что конечно порожденный R -модуль псевдорационального ранга 1 раскладывается в прямую сумму циклических R -модулей. Учитывая, что $(1 - \varepsilon)R$ – также циклический R -модуль, получаем справедливость следствия.

Отметим, что в [9] показано, что если конечно порожденный R -модуль X имеет псевдорациональный ранг 1, то $X \cong R_{\chi_1} \oplus R_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus R_{\chi_n}$. Таким образом, если модуль M удовлетворяет условиям следствия 6, то он имеет вид

$$M \cong (1 - \varepsilon)\mathbb{R}^{n-1} \oplus R_{\chi_1} \oplus R_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus R_{\chi_n}.$$

ЛЕММА 4. Если M – конечно порожденный R -модуль, то

$$\text{Hom}_R(M, T) = T \cdot \text{Hom}_R(M, R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $T \cdot \text{Hom}_R(M, R) \subseteq \text{Hom}_R(M, T)$, достаточно показать, что любой гомоморфизм φ из M в T лежит в $T \cdot \text{Hom}_R(M, R)$.

Пусть $\varphi \in \text{Hom}_R(M, T)$, $\{x_1, \dots, x_n\}$ – система порождающих R -модуля M . Тогда существует такое $\varepsilon \in R$, что $\varphi(x_i) \subseteq \varepsilon R$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда следует, что $\varphi(M) \subseteq \varepsilon R$ и $\varphi \in T \cdot \text{Hom}_R(M, R)$.

Для произвольного конечно порожденного модуля M над кольцом псевдорациональных чисел найдем строение R -модуля $\text{Hom}_R(M, R)$.

Модуль M можно представить в виде $M \cong (1 - \varepsilon)\mathbb{R}^n \oplus L$, где L не содержит прямых слагаемых вида $(1 - \varepsilon)R$ ни для какого идемпотента вида (b). Тогда в силу следствия 5

$$\text{Hom}_R(M, R) \cong \left[\bigoplus_n \text{Hom}((1 - \varepsilon)R, R) \right] \oplus \text{Hom}_R(L, R). \quad (11)$$

По следствию 4

$$\text{Hom}_R(L, T) = T \cdot \text{Hom}_R(L, R) \cong \bigoplus_{p \in P} \text{Hom}(\varepsilon_p L, \widehat{\mathbb{Z}}_p). \quad (12)$$

Так как L – конечно порожденный R -модуль, то $\varepsilon_p L$ – конечно порожденный $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ -модуль и, следовательно,

$$\varepsilon_p L \cong \bigoplus_{m_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p \oplus \mathbb{Z}(p^{k_{1p}}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(p^{k_{s_p}}).$$

Отсюда

$$\text{Hom}(\varepsilon_p L, \widehat{\mathbb{Z}}_p) \cong \bigoplus_{m_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p. \quad (13)$$

Таким образом, из (11)–(13) следует, что

$$\text{Hom}_R(M, R) \cong (1 - \varepsilon)\mathbb{R}^n \oplus \left[\bigoplus_{p \in P} \bigoplus_{m_p} \widehat{\mathbb{Z}}_p \right].$$

СЛЕДСТВИЕ 7. Если M – конечно порожденный R -модуль, то $\text{Hom}_R(M, R)$ является проективным R -модулем конечного псевдорационального ранга.

Если M не конечно порожденный R -модуль, то $\text{Hom}_R(M, R)$ не обязан являться проективным модулем. Например, если $M = T$, то

$$\text{Hom}_R(T, R) = \text{Hom}_R(T, T) \cong \prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p.$$

Однако нетрудно видеть, что модуль $\text{Hom}_R(M, R)$ всегда является плоским.

Далее, опишем класс R -модулей с нулевым коследом кольца R .

ТЕОРЕМА 8. *R -модуль M имеет нулевой кослед кольца R тогда и только тогда, когда M не содержит прямых слагаемых вида $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ ни при каком простом p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M не содержит прямых слагаемых вида $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. В силу проективности R -модуля $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ это равносильно тому, что не существует эпиморфизма из M в $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Так как любой ненулевой подмодуль в $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ изоморфен $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, любой гомоморфизм из M в $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ нулевой.

Таким образом, $\text{Hom}_R(M, T) = 0$, а значит, и $\text{Hom}_R(M, R) = 0$, т.е. модуль M имеет нулевой кослед кольца R .

Заметим, что в силу результатов А. А. Фомина [1] класс конечно порожденных R -модулей с нулевым коследом кольца R это в точности класс $\mathcal{G}$, который ввели С. Глаз и У. Уиклесс в [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Fomin, "Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers", *Abelian Groups and Modules*, Trends in Mathematics, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1999, 87–100.
- [2] П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова, Е. И. Подберезина, "Об одном классе смешанных абелевых групп", *Вестн. Томского ун-та*, **269** (2000), 47–51.
- [3] A. A. Fomin, "Quotient divisible mixed groups", *Contemp. Math.*, **273** (2001), 117–128.
- [4] П. А. Крылов, "Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов", *Фундамент. и прикл. матем.*, **6:3** (2000), 793–812.
- [5] С. В. Чеглякова, "Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел", *Фундамент. и прикл. матем.*, **7:2** (2001), 627–629.
- [6] А. В. Царев, "Псевдорациональный ранг абелевой группы", *Сиб. матем. ж.*, **46:1** (2005), 312–325.
- [7] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, **1, 2**, Мир, М., 1974, 1977.
- [8] К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории*, **1**, Мир, М., 1977.
- [9] А. В. Царев, *Конечно порожденные R -модули*, Науч. труды мат. фак-та МПГУ, Прометей, М., 2000.
- [10] S. Glaz, W. Wickless, "Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups", *Comm. Algebra*, **22** (1994), 1161–1176.

А. В. Царев

Московский педагогический государственный университет

E-mail: an-tsarev@yandex.ru, algebra@mpgu.edu.ru

Поступило

01.11.2005