Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. З. Челидзе, П. Л. Папини, Некоторые замечания
о пересечении вложенных множеств, *Матем. заметки*,
2006, том 80, выпуск 3, 449–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2831>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 09:05:21

УДК 517.5

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ВЛОЖЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Г. З. Челидзе, П. Л. Папини

Мы изучаем некоторые связи между параметром, характеризующим пересечение вложенных множеств, и константой Юнга. Также определено критическое значение параметра для некоторого произведения пространств и доказано, что в рефлексивных пространствах пересечение вложенных множеств непусто в случае критического значения параметра.

Библиография: 6 названий.

1. Введение и обозначения. Пусть X – бесконечномерное банахово пространство; для ограниченного непустого множества A введем следующие обозначения:

$$\delta(A) = \sup\{\|x - y\|; x, y \in A\},$$

для $x \in X$:

$$r(A, x) = \sup\{\|x - y\|; y \in A\}, \quad r'(A, x) = \inf\{\|x - y\|; y \in X \setminus A\},$$

$$r(A) = \inf\{r(A, x); x \in X\},$$

$$r'(A) = \sup\{r'(A, x); x \in X\} = \sup\{r'(A, x); x \in A\}.$$

Пусть

$$\chi(A) = \sup_{x \in A} \frac{r'(A, x)}{r(A, x)}.$$

Как и в [1], для сокращения записи под допустимой последовательностью $\{A_n\}$ будем подразумевать последовательность вложенных ограниченных замкнутых множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ в линейном нормированном пространстве X , а под пересечением последовательности $\{A_n\}$ – пересечение множеств A_n , $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{A_n\}$ – допустимая последовательность. В работах [1]–[6] был исследован следующий вопрос: при каких условиях на

$$\chi(\{A_n\}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \chi(A_n)$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке АН Грузии, грант № 1.16.02. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Итальянской исследовательской группы GNAMPA (INDAM).

можно утверждать, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset?$$

В работе [1] было введено понятие критического значения для банахова пространства X . Мы скажем, что число $\alpha \in \mathbb{R}^+$ является *критическим* для X и обозначим его через $\text{cv}(X)$, если:

- а) для любой допустимой последовательности $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ пересечение непусто, когда $\chi(\{A_n\}) > \alpha$;
- б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такая допустимая последовательность $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что $\chi(\{A_n\}) > \alpha - \varepsilon$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Известны значения $\text{cv}(X)$ для некоторых пространств. В частности, $\text{cv}(X) \in [1/3, 1/2]$ всегда и $\text{cv}(\ell_p) = 1/(1 + 2^{1/p})$, $1 \leq p < \infty$, т.е. для любого числа α из интервала $(1/3, 1/2)$ существует рефлексивное пространство, для которого α является критическим числом. В конце статьи мы построим пример рефлексивного пространства с критическим значением $1/2$. Вопрос существования рефлексивного пространства с критическим значением $1/3$ является открытым.

Известно также, что в пространствах ℓ_p пересечение $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ непусто в случае $\chi(\{A_n\}) = 1/(1 + 2^{1/p})$ (см. [1]). Мы докажем, что в рефлексивном пространстве пересечение допустимой последовательности всегда непусто в случае критического значения параметра χ .

Теперь введем модифицированный параметр и исследуем его связь со старым параметром и константой Юнга.

2. Новый параметр. Связь с константой Юнга. Мы скажем, что множество A *нетривиально*, если оно содержит, по крайней мере, две точки (т.е. $\delta(A) > 0$). Для допустимой последовательности, состоящей из нетривиальных множеств $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, введем число

$$\Delta(\{A_n\}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{r'(A_n)}{\delta(A_n)}.$$

Попытаемся ответить на следующий вопрос: при каких значениях $\Delta(\{A_n\})$ можно заключить, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$? Определим критическое значение $\text{CV}(X)$ пространства X , исходя из $\Delta(\{A_n\})$, используя а) и б) (см. п. 1) для $\Delta(\{A_n\})$ вместо $\chi(\{A_n\})$ (подразумевая нетривиальность множеств A_n). Мы имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждого банахова пространства X имеем*

$$\text{CV}(X) = \frac{\text{cv}(X)}{1 + \text{cv}(X)}.$$

Следовательно, $\text{CV}(X) \in [1/4, 1/3]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем, что $\text{CV}(X) \leq \text{cv}(X)/(1 + \text{cv}(X))$. Для каждого ограниченного непустого множества A , когда $x \in A$, имеем

$$r(A, x) + r'(A, x) \leq \delta(A),$$

поэтому

$$\sup_{x \in A} \frac{r'(A, x)}{r(A, x)} \geq \sup_{x \in A} \frac{r'(A, x)}{\delta(A) - r'(A, x)}.$$

Поскольку функция $\rho \rightarrow \rho/(\delta(A) - \rho)$ является возрастающей для $\rho \in (0, \delta(A))$, получаем

$$\sup_{x \in A} \frac{r'(A, x)}{r(A, x)} \geq \frac{\sup_{x \in A} r'(A, x)}{\delta(A) - \sup_{x \in A} r'(A, x)} = \frac{r'(A)}{\delta(A) - r'(A)} = \frac{1}{\delta(A)/r'(A) - 1}.$$

Следовательно, для допустимой последовательности $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с $1/(1/\Delta(\{A_n\}) - 1) > \text{cv}(X)$ имеем $\chi(\{A_n\}) > \text{cv}(X)$, т.е. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, а это означает, что $\Delta(\{A_n\})/(1 - \Delta(\{A_n\})) > \text{cv}(X) \iff \Delta(\{A_n\}) > \text{cv}(X)/(1 + \text{cv}(X))$. Это гарантирует $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ и имеем $\text{CV}(X) \leq \text{cv}(X)/(1 + \text{cv}(X))$.

Теперь докажем обратное неравенство. Возьмем $\alpha < \text{cv}(X)$. Рассмотрим допустимую последовательность такую, что $\alpha < \chi(\{A_n\}) < \text{cv}(X)$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $x_n \in A_n$ так, чтобы

$$\chi(A_n) - \frac{1}{n} \leq \frac{r'(A_n, x_n)}{r(A_n, x_n)} \leq \chi(A_n) + \frac{1}{n};$$

рассматривая, в случае необходимости, подпоследовательность последовательности $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которую обозначим опять через $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, можем считать

$$\alpha \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r'(A_n, x_n)}{r(A_n, x_n)} \leq \text{cv}(X)$$

а также, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r(A_n, x_n)$ существует и равен β ; следовательно, $\beta - \varepsilon_n \leq r(A_n, x_n) \leq \beta + \varepsilon_n$ и $\alpha\beta - \varepsilon'_n \leq r'(A_n, x_n) \leq \text{cv}(X)\beta + \varepsilon'_n$, где ε_n и ε'_n стремятся к нулю, когда $n \rightarrow \infty$. Для $n > t$ имеем

$$B(x_n, r'(A_n, x_n)) \subseteq A_n \subseteq A_m \subseteq B(x_m, r(A_m, x_m)).$$

Это означает, что

$$\|x_n - x_m\| + r'(A_n, x_n) \leq r(A_m, x_m)$$

и получаем $\|x_n - x_m\| \leq r(A_m, x_m) - r'(A_n, x_n) \leq \beta(1 - \alpha) + \varepsilon_m + \varepsilon'_n$. Теперь рассмотрим множество $F_i = \bigcup_{n=i}^{\infty} B(x_n, r'_n(A_n, x_n))$. Ясно, что $F_i \subseteq \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n = A_i$ для каждого i ; поскольку $\bigcap_{n=i}^{\infty} A_n = \emptyset$, также имеем $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$ и $r'(F_i) \geq r'(A_i, x_i)$; если $u, v \in F_i$, то существуют два индекса, скажем, j и k , $i \leq j \leq k$, такие, что $u \in B(x_j, r'(A_j, x_j) + 1/j)$ и $v \in B(x_k, r'(A_k, x_k) + 1/k)$, так что $\|u - v\| \leq \|x_j - x_k\| + r'(A_k, x_k) + r'(A_j, x_j) + 1/j + 1/k$. Следовательно,

$$\delta(F_i) \leq 2\text{cv}(X)\beta + \beta(1 - \alpha) + \varepsilon''_i,$$

где $\varepsilon''_i = \varepsilon_k + \varepsilon'_k + 2\varepsilon'_j + 1/j + 1/k$ стремится к нулю, когда $i \rightarrow \infty$. Имеем

$$\frac{r'(F_i)}{\delta(F_i)} \geq \frac{\alpha\beta - \varepsilon'_i}{2\text{cv}(X)\beta + \beta(1 - \alpha) + \varepsilon''_i}.$$

Это показывает, что $\text{CV}(X) \geq \alpha/(2\text{cv}(X) + 1 - \alpha)$, так что $\text{CV}(X) \geq \text{cv}(X)/(1 + \text{cv}(X))$. Доказательство теоремы завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пример допустимой последовательности $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с пустым пересечением и $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(A_n) = 1/2$, а следовательно, с $\Delta(\{A_n\}) = 1/3$, был дан в [2] (X является подпространством ℓ_1).

Теперь для ограниченного замкнутого множества A определим

$$\bar{\chi}(A) = \frac{r'(A)}{r(A)}.$$

Ясно, что для любого A имеем $\chi(A) \leq \bar{\chi}(A) \leq 1$. Как было отмечено в [1], используя аналогичное доказательство, данное для $\chi(A)$ в [6], мы получим следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пересечение допустимой последовательности $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ непусто, если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{\chi}(A_n) > 1/2$.*

Известно также, что в рефлексивных пространствах пересечение допустимой последовательности $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ непусто и в случае $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{\chi}(A_n) = 1/2$. Справедливость этого факта в сопряженных пространствах является открытым вопросом.

В [1] также доказано, что в любом бесконечномерном банаховом пространстве X условие $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{\chi}(A_n) > 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, не может гарантировать $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ в X существует такая допустимая последовательность, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{\chi}(A_n) > 1/2 - \varepsilon$.

Используя предыдущее замечание, получаем некоторые результаты относительно константы Юнга:

$$J(X) = \sup \left\{ \frac{2r(A)}{\delta(A)} \right\},$$

где супремум берется на множестве ограниченных замкнутых нетривиальных множеств. Заметим, что $1 \leq J(X) \leq 2$ (поскольку всегда $r(A) \leq \delta(A) \leq 2r(A)$). Дополнительную информацию о константе Юнга см. в [4].

ТЕОРЕМА 2. *Пересечение любой допустимой последовательности $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ непусто, если*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{\chi}(A_n) > \frac{J(X)}{4};$$

следовательно, $CV(X) \leq J(X)/4$, так что $cv(X) \leq J(X)/(4 - J(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$\frac{r'(A)}{r(A)} \geq \frac{2r'(A)}{\delta(A)J(X)}.$$

Условие

$$\Delta(\{A_n\}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{r'(A_n)}{\delta(A_n)} > \frac{J(X)}{4}$$

означает, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{r'(A_n)}{r(A_n)} > \frac{2}{J(X)} \cdot \frac{J(X)}{4} = \frac{1}{2}$$

и из предложения 1 вытекает требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценка $CV(X) \leq J(X)/4$ содержательна только для $J(X) < 4/3$ (поскольку всегда $CV(X) \leq 1/3$). В частности, для $J(X) = 1$ имеем $CV(X) = 1/4$ (и $cv(X) = 1/3$), так что мы получаем оценку $cv(\ell_\infty) = 1/3$ из [1].

3. Пересечение в рефлексивных пространствах; критические значения произведения пространств.

ТЕОРЕМА 3. *В рефлексивных пространствах пересечение допустимой последовательности непусто в случае критического значения параметра χ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – рефлексивное пространство. Рассмотрим такую допустимую последовательность $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что $\chi(\{A_n\}) = \text{cv}(X)$. Как и в теореме 1, для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $x_n \in A_n$ так, чтобы

$$\chi(A_n) - \frac{1}{n} \leq \frac{r'(A_n, x_n)}{r(A_n, x_n)} \leq \chi(A_n) + \frac{1}{n}$$

и будем считать, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (r'(A_n, x_n)/r(A_n, x_n)) = \text{cv}(X)$. Рассмотрим множества $F_i(\varepsilon) = \bigcup_{n=i}^{\infty} B(x_n, r'_n(A_n, x_n) + \varepsilon)$. Имеем

$$\chi(\{F_i(\varepsilon)\}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r'(A_n, x_n) + \varepsilon}{r(A_n, x_n) + \varepsilon} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r'(A_n, x_n)}{r(A_n, x_n)} = \text{cv}(X).$$

Последнее неравенство справедливо потому, что $\text{cv}(X) \leq 1/2$ и, таким образом, пересечение $\{F_i(\varepsilon)\}_{i \in \mathbb{N}}$ непусто, т.е. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i(\varepsilon) = F_\varepsilon \neq \emptyset$. Ясно, что для каждого $\varepsilon > 0$ F_ε замкнутое и выпуклое множество. Пусть теперь $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Мы получаем вложенную последовательность множеств $\{F_{\varepsilon_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, и поскольку X рефлексивно, то $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_{\varepsilon_i} \neq \emptyset$. Нетрудно доказать включение $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_{\varepsilon_i} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Действительно, пусть $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_{\varepsilon_i}$; тогда существует последовательность точек $y_n \in A_n$, сходящаяся к x (вместо y_n возьмем x , если $x \in B(x_n, r'_n(A_n, x_n))$ и, если $x \notin B(x_n, r'_n(A_n, x_n))$, точку на сфере $S(x_n, r'_n(A_n, x_n))$, которая лежит на сегменте, соединяющем точки x и x_n). Поскольку A_n вложенные и замкнутые множества, получаем, что $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Теорема 3 доказана.

Следующий вопрос относится к определению критического значения для произведения пространств. Например, что можно сказать о критических значениях следующих пространств: $(\ell_{p_1} \times \ell_{p_2})_{\ell_1}$, $(\ell_p \times R)_\infty$ и т.д. В этом направлении мы имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $(X_1, \|\cdot\|_1), (X_2, \|\cdot\|_2), \dots, (X_n, \|\cdot\|_n), \dots$ банаховы пространства с критическими значениями $\text{cv}_1, \dots, \text{cv}_n, \dots$ соответственно. Рассмотрим ℓ_p , $1 \leq p \leq \infty$, сумму этих пространств, т.е. пусть X есть пространство последовательностей $X = \{x = (x^1, x^2, \dots, x^n, \dots): x^i \in X_i\}$, для которых норма $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} \|x^i\|_i^p)^{1/p}$ (при $1 \leq p < \infty$) и $\|x\| = \sup_i \{\|x^i\|_i\}$ (при $p = \infty$) конечна. Тогда $\text{cv}(X) \geq \sup_i \{\text{cv}_i\}$. Если последовательность пространств конечна, то $\text{cv}(X) = \max_i \{\text{cv}_i\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $\text{cv} = \sup_i \{\text{cv}_i\}$. Для любого $\chi' < \text{cv}$ построим допустимую последовательность $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, для которой $\chi' \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \chi(F_n)$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Из определения cv вытекает, что существует такой номер i_0 , что $\chi' < \text{cv}_{i_0} \leq \text{cv}$. Рассмотрим допустимую последовательность $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в пространстве X_{i_0} такую, что $\text{cv}_{i_0} - \varepsilon \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \chi(A_n) < \text{cv}_{i_0}$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, здесь ε выбран так, что $\text{cv}_{i_0} - \varepsilon > \chi'$. Используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 1, можем заключить, что существует такая возрастающая последовательность

индексов $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что

$$\|x_m^{i_0} - x_{n_k}^{i_0}\|_{i_0} < r \left(\frac{1}{\text{cv}_{i_0} - \varepsilon} - 1 \right) + \varepsilon_k, \quad m > n_k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0,$$

когда $k \rightarrow \infty$ и $B_{X_{i_0}}(x_{n_k}^{i_0}, r_{n_k}) \subseteq A_{n_k}$, $r = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{n_k}$.

Пусть $F_k^{i_0} = \bigcup_{j=k}^{\infty} B_{X_{i_0}}(x_{n_j}^{i_0}, r_{n_j})$. Ясно, что

$$\text{cv}_{i_0} - \varepsilon \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \chi(F_k^{i_0}) < \text{cv}_{i_0};$$

следовательно,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k^{i_0} = \emptyset. \quad (1)$$

Пусть теперь $F_k = \overline{\bigcup_{j=k}^{\infty} B_X(x_{n_j}, r_{n_j})}$, где $x_{n_j} = (0, \dots, 0, x_{n_j}^{i_0}, 0, \dots)$. Мы имеем $\chi(F_k) \geq r_{n_k} / (\|x_{n_k} - x_m\| + r_{n_k})$ и получаем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \chi(F_k) \geq \frac{r}{r(1/(\text{cv}_{i_0} - \varepsilon) - 1) + r} = \text{cv}_{i_0} - \varepsilon > \chi'.$$

Допустим, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, т.е. существует точка $\bar{x}$ такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\bar{x} - x_{n_j}\| \leq r$, т.е. справедливо неравенство $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\bar{x}^{i_0} - x_{n_j}^{i_0}\|_{i_0} \leq r$. Используя те же аргументы, что и в конце доказательства теоремы 3, получаем, что пересечение множеств $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k^{i_0}$ непусто, что противоречит (1). Итак, мы доказали неравенство $\text{cv}(X) \geq \sup_i \{\text{cv}_i\}$.

Теперь предположим, что мы имеем конечное число M банаховых пространств. Докажем, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \chi(F_n) = \chi' > \text{cv} = \max_{1 \leq i \leq M} \{\text{cv}_i\}$, то $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Как мы заметили, или $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, или существует такая возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$\|x_{n_k} - x_m\| < r \left(\frac{1}{\chi'} - 1 \right) + \varepsilon_k, \quad m > n_k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2)$$

и $B_X(x_{n_k}, r_{n_k}) \subseteq F_{n_k}$, $r = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{n_k}$. Ясно, что последовательность $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность, которую обозначим опять через $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, такую, что для каждого i , $1 \leq i \leq M$, существует $d_i = \lim_{k_1, k_2 \rightarrow \infty, k_1 \neq k_2} \|x_{n_{k_1}}^i - x_{n_{k_2}}^i\|$. Не теряя общности, можем считать, что $d_i \neq 0$. Рассмотрим множество

$$A_k^i = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{X_i}(x_{n_j}^i, r_i)}, \quad \text{где } r_i = \frac{d_i \chi'}{1 - \chi'};$$

тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(A_k^i) = \frac{r_i}{\lim_{j_1, j_2 \rightarrow \infty, j_1 \neq j_2} \|x_{n_{j_1}}^i - x_{n_{j_2}}^i\| + r_i} = \frac{r_i}{d_i + r_i} = \chi' > \text{cv}_i$$

и, следовательно, существует точка $\bar{x}^i$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x}^i - x_{n_k}^i\| \leq r_i$. Оценим расстояние между $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^M)$ и x_{n_k} :

$$\|\bar{x} - x_{n_k}\| = \|\bar{x} - x_{n_k}\|_p \leq \|r\|_p = \|d\|_p \frac{\chi'}{1 - \chi'}, \quad (3)$$

где $r = (r_1, \dots, r_M)$ и $d = (d_1, \dots, d_M)$. Можем считать, что существует предел $d_0 = \lim_{k_1, k_2 \rightarrow \infty, k_1 \neq k_2} \|x_{n_{k_1}} - x_{n_{k_2}}\|$. Имеем $\|d\|_p \leq d_0$. В силу этого неравенство (3) дает оценку

$$\|\bar{x} - x_{n_k}\| \leq d_0 \frac{\chi'}{1 - \chi'}$$

и, используя (2), получаем (левая сторона неравенства (2) есть d_0) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x} - x_{n_k}\| \leq r$. Из этого неравенства, используя те же соображения, что и в конце доказательства теоремы 3, получаем, что $\bar{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ и доказательство теоремы 4 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $X_i = \ell_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. Нетрудно доказать, что ℓ_p , $1 < p < \infty$, сумма этих рефлексивных пространств $X = \bigoplus X_i$ рефлексивна. Тогда теорема 4 дает пример рефлексивного пространства с критическим значением $1/2$. Действительно, используя формулу $\text{sv}(\ell_p) = 1/(1 + 2^{1/p})$, $1 \leq p < \infty$, в силу этой теоремы имеем $\text{sv}(X) \geq 1/2$. Как мы отметили в начале, $\text{sv}(X) \in [1/3, 1/2]$ и, следовательно, получаем $\text{sv}(X) = 1/2$.

В заключение выражаем благодарность рецензенту за проделанную работу и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г.З. Челидзе, “О критических значениях числовых параметров, характеризующих пересечение вложенных множеств”, *Матем. заметки*, **68:2** (2000), 303–310.
- [2] G. Chelidze, “A counterexample in a theorem on the intersection of embedded closed sets”, *Bull. Georgian Acad. Sci.*, **156:2** (1997), 207–209.
- [3] Г.З. Челидзе, “О пересечении последовательности вложенных замкнутых множеств в банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **63:2** (1998), 310–312.
- [4] D. Amir, “On Jung’s constant and related constants in normed linear spaces”, *Pacific J. Math.*, **118** (1985), 1–15.
- [5] N. Vakhania, “Intersection of embedded bounded closed sets in Banach spaces”, *Publicaciones del Departamento de Analisis Matematico, Facultad de Matematicas Universidad Complutense, Seccion 1*, **46**, Madrid, 2000, 163–169.
- [6] Н.Н. Вахания, И.И. Карцивадзе, “Замечание о пересечении последовательности вложенных множеств”, *Матем. заметки*, **3:2** (1968), 165–170.

Г.З. Челидзе

Институт вычислительной математики
им. Н.И. Мухелишвили Академии наук Грузии
E-mail: g.chelidze@mail.ru

Поступило

05.09.2005

Исправленный вариант

10.03.2006

П.Л. Папини

Болонский университет (Болонья, Италия)
E-mail: papini@dm.unibo.it