Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Автоматическая непрерывность псевдохарактеров на полупростых группах Ли, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 456–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:45:42

УДК 517.986.6

АВТОМАТИЧЕСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПСЕВДОХАРАКТЕРОВ НА ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППАХ ЛИ

А. И. Штерн

Показано, что любой псевдохарактер на полупростой группе Ли непрерывен.

Библиография: 42 названия.

1. Введение. Постановка задачи. В то время как вопросы непрерывности представлений групп многократно изучались с различных точек зрения (как в предположении измеримости или борелевости этих представлений, если речь шла о представлениях локально компактных или метрических групп (см., например, [1]–[10]), так и без этого предположения, в том числе для более общих классов топологических групп [11]–[16]), аналогичный вопрос для квазипредставлений, т.е. таких отображений π данной группы G в группу обратимых операторов в некотором банаховом пространстве E , что величина

$$\sup_{g_1, g_2 \in G} \|\pi(g_1 g_2) - \pi(g_1)\pi(g_2)\|_E$$

мала, практически не исследован. Сложность этого вопроса связана с тем, что он не индивидуален. Вопрос относится, собственно, не к объекту, а к классу и ставится следующим образом: есть ли непрерывное отображение среди малых возмущений данного квазипредставления π ?

Простейшим классом групп, в котором этот вопрос заслуживает изучения, является класс групп Ли. Для однопараметрических групп ответ на вопрос тривиальным образом отрицателен (достаточно упомянуть факт существования разрывных характеров, см., например, [17]), и поэтому он отрицателен и для разрешимых групп Ли, поскольку любая разрешимая группа Ли имеет однопараметрическую факторгруппу. Поэтому следует изучить вопрос о непрерывности для полупростых групп Ли. Поскольку каждая полупростая группа Ли является факторгруппой прямого произведения простых групп Ли, мы будем рассматривать условия автоматической непрерывности для простых групп Ли.

В этой статье мы рассмотрим простейший случай “логарифмируемых” одномерных квазипредставлений, т.е. экспонент от вещественных квазихарактеров на группе. Напомним некоторые определения, необходимые при формулировании основного результата. Вещественная функция f на группе G называется (вещественным)

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00574, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-619.2003.1.

квазихарактером на этой группе [18], [19], если числовое множество

$$\{f(gh) - f(g) - f(h) \mid g, h \in G\} \quad (1)$$

ограничено. Кроме того, квазихарактер f называется *псевдохарактером* на G , если

$$f(g^n) = nf(g) \quad \text{для любых } g \in G \text{ и } n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Понятие псевдохарактера было введено в 1983 г. [20]. Это понятие (применявшееся позже в ряде работ и под именем однородного квазиморфизма [21]) оказалось весьма продуктивным в теории ограниченных когомологий [22]–[28], в теории групп диффеоморфизмов [29], в симплектической геометрии [30]–[32], в комбинаторной теории групп [25] и в теории представлений групп [33], [34] и заслужило популярность, достаточную для отдельной пояснительной публикации в Notices AMS [35].

Напомним, что для любого квазихарактера f на группе G формула

$$\varphi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}f(g^n), \quad g \in G, \quad (3)$$

корректно определяет псевдохарактер φ на G , который называется *псевдохарактером, связанным с квазихарактером f* . Этот псевдохарактер φ непрерывен, если G – топологическая группа и квазихарактер f непрерывен [18], [24]–[28], [36].

В отличие от общего случая квазипредставлений, любой квазихарактер определяет класс эквивалентности (класс отображений, получаемых ограниченным возмущением данного квазихарактера), допускающий выделенный элемент, а именно, псевдохарактер, связанный с данным квазихарактером (3). Таким образом, следующее утверждение можно рассматривать как первый шаг в изучении проблемы автоматической непрерывности для квазипредставлений (в форме, поставленной выше).

ТЕОРЕМА 1. *Любой псевдохарактер на простой группе Ли непрерывен.*

Мы докажем это утверждение ниже, но сначала разъясним и уточним его.

Напомним, что простая группа Ли называется *эрмитово симметрической*, если центр ее универсальной накрывающей группы бесконечен (см. [37]). Семейство некомпактных простых эрмитово симметрических групп Ли состоит из связных простых групп Ли, присоединенная группа которых изоморфна присоединенной группе одной из следующих групп Ли (см. [37]):

- (i) $SU(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}$;
- (ii) $SO_0(2, q)$, где $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 2$ (напомним, что группа $SO_0(2, 2)$ не является простой);
- (iii) $Sp(n, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{R}$;
- (iv) $SO^*(2n)$, $n > 1$ (напомним, что группа $SO^*(2)$ не является простой);
- (v) вещественная форма комплексной простой группы Ли типа E_6 , удовлетворяющая условию $\dim \mathfrak{k} = 46$, где $\mathfrak{k}$ – алгебра Ли максимальной компактной подгруппы присоединенной группы этой вещественной формы;
- (vi) вещественная форма комплексной простой группы Ли типа E_7 , удовлетворяющая условию $\dim \mathfrak{k} = 79$, где $\mathfrak{k}$ – алгебра Ли максимальной компактной подгруппы присоединенной группы этой вещественной формы.

Напомним далее, что односвязные эрмитово симметрические простые группы Ли – единственные простые группы Ли, допускающие нетривиальные псевдохарактеры. А именно, псевдохарактер Гишарде–Вигнера на односвязной эрмитово симметрической простой группе Ли G (центр которой, тем самым, бесконечен) определяется следующим образом. Пусть K – аналитическая подгруппа группы G , отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G . Осуществим изоморфное отождествление центра Z_K аналитической группы K с аддитивной группой поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального параметра на кривой). Рассмотрим разложение Ивасава группы G . Пусть A – абелева, а N – нильпотентная группа в этом разложении, и пусть

$$g = k(g)an, \quad g \in \tilde{G}, \quad k(g) \in \tilde{K}, \quad a \in A, \quad n \in N,$$

– соответствующее разложение элемента $g \in G$. Как хорошо известно, отображение

$$\varpi: g \mapsto k(g), \quad g \in G,$$

переводящее каждый элемент $g \in G$ в “компактную” компоненту $k(g) \in K$ его разложения Ивасава, непрерывно. Рассмотрим композицию ψ отображения ϖ и непрерывной проекции π , отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$. Как доказано в [24]–[28], эта композиция

$$\psi = \pi \circ \varpi$$

определяет некоторый квазихарактер на G . Напомним также, что псевдохарактер φ , соответствующий квазихарактеру ψ (см. (3)), мы называем *псевдохарактером Гишарде–Вигнера* [24]–[28]. Как отмечено выше, псевдохарактер Гишарде–Вигнера автоматически непрерывен на всей группе G , поскольку он связан с непрерывным квазихарактером ψ формулой (3) (см. [24]–[28]).

Итак, сам предмет исследования, т.е. семейство псевдохарактеров на простой группе Ли, существенно зависит от того, является ли группа эрмитово симметрической. В связи с этим наблюдением теорема 1 может быть уточнена следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – простая группа Ли. Если G не является эрмитово симметрической группой или если центр группы G конечен, то любой псевдохарактер на G тождественно равен нулю. Если G – эрмитово симметрическая группа с бесконечным центром, то любой псевдохарактер на G кратен псевдохарактеру Гишарде–Вигнера на G . В частности, любой псевдохарактер на простой группе Ли непрерывен.

Доказательство этой теоремы приведено в следующем разделе.

2. Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы будет дано после нескольких лемм и следствий.

ЛЕММА 1. Если G – аменабельная группа (см., например, [38]), то любой псевдохарактер на G является обычным характером. В частности, ограничение любого псевдохарактера на коммутативную подгруппу является обычным характером этой подгруппы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 1 – частный случай весьма общего факта, но мы напомним его доказательство для полноты изложения. Пусть f – псевдохарактер на G . Из определения псевдохарактера следует, что функция

$$t \rightarrow f(ts) - f(t), \quad t, s \in G,$$

ограничена на G . Для любого правоинвариантного среднего I на пространстве $B(G)$ ограниченных функций на G положим

$$\varphi_I(g) = I_t(f(tg) - f(t)), \quad g \in G. \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_I(sw) &= I_t(f(tsw) - f(t)) = I_t((f(tsw) - f(ts)) + (f(ts) - f(t))) \\ &= \varphi_I(w) + \varphi_I(s), \quad s, t, w \in G, \end{aligned}$$

откуда следует, что φ_I – (аддитивный) характер G . Это означает, в частности, что

$$\varphi_I(g^n) = n\varphi_I(g) \quad \text{для всех } g \in G, \quad n \in \mathbb{N},$$

так что либо $\varphi_I(s) = 0$, либо множество $\{\varphi_I(s) \mid s \in G\}$ неограничено. С другой стороны, по условию,

$$|f(ts) - f(t) - f(s)| \leq C \quad \text{для всех } t, s \in S;$$

применяя среднее I по t , видим, что

$$|\varphi_I(s) - f(s)| \leq C \quad \text{для всех } s \in S.$$

Следовательно, $\varphi_I - f$ – ограниченный псевдохарактер, т.е. нулевая функция, – именно потому, что

$$\varphi_I(g) = n^{-1}\varphi_I(g^n) \quad \text{для всех } g \in G \text{ и всех натуральных } n.$$

Таким образом, f – (обычный) вещественный характер группы G , что и утверждалось.

Повторяя рассуждение, легко видеть, что если G – топологическая группа и если G аменабельна как топологическая группа (см., например, [38]), то любой непрерывный псевдохарактер на G является обычным характером. В частности, в этой ситуации ограничение любого непрерывного псевдохарактера на замкнутую коммутативную подгруппу является обычным непрерывным характером этой подгруппы. Отметим очевидное следствие этого наблюдения.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любой непрерывный псевдохарактер связной локально компактной группы тождественно равен нулю на любой компактной подгруппе этой группы.*

Действительно, ограничение этого псевдохарактера на компактную подгруппу есть ее непрерывный (вещественный) характер; в частности, ограниченный.

ЛЕММА 2. Если G – полупростая связная группа Ли, не являющаяся эрмитово симметрической, то единственным псевдохарактером на G является нулевой характер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из нашего предположения следует, что центр группы G конечен. Пусть f – псевдохарактер на G . Из леммы 1 следует, что ограничение f на каждую однопараметрическую подгруппу в G является ее гомоморфизмом. Кроме того, псевдохарактер f инвариантен относительно внутренних автоморфизмов, так что его ограничения на торы (которые являются обычными гомоморфизмами по лемме 1) инвариантны относительно соответствующих групп Вейля.

Воспользуемся теперь разложением Ивасава $G = KAN$, где группа K компактна (поскольку центр группы G конечен), а группы A , N и AN аменабельны (поскольку A абелева, N нильпотентна, а AN разрешима). Из нашего предположения следует, что компактная группа K полупроста. Если f – псевдохарактер на G , то его ограничения на подгруппы K и AN являются соответственно псевдохарактерами χ_K и χ_{AN} на этих группах. По лемме 1 псевдохарактер χ_{AN} является обычным характером. Но любой характер группы AN тривиален на нильпотентной части N , так что для $g = kan$ разность

$$f(g) - \chi_K(k) - \chi_{AN}(a)$$

должна быть ограничена. С другой стороны, характер χ_{AN} должен быть инвариантен относительно группы Вейля, связанной с A . Эта группа Вейля содержит семейство отражений в элементах некоторого базиса, так что характер χ_{AN} должен принимать равные значения в точках, симметричных относительно соответствующих плоскостей. Гиперплоскостей, проходящих через эти орбиты относительно группы Вейля, не существует. Следовательно, характер χ_{AN} должен быть нулевым. Наконец, любой элемент полупростой компактной группы Ли может быть представлен в виде произведения ограниченного числа элементов, принадлежащих подгруппам, изоморфным группе $SU(2)$ [39; 6.45 и 6.46]. Но любой элемент в группе $SU(2)$ сопряжен своему обратному, и поэтому любой псевдохарактер на группе $SU(2)$ равен нулю. Следовательно, любой псевдохарактер на полупростой компактной группе Ли ограничен и поэтому равен нулю. В частности, псевдохарактер χ_K нулевой. Таким образом, псевдохарактер f ограничен, так что $f = 0$, что и требовалось.

ЛЕММА 3. Если G – эрмитово симметрическая полупростая связная группа Ли, то любой псевдохарактер на G является одним из псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на G . В частности, если центр группы G конечен, то любой псевдохарактер на G равен нулю.

Очевидно, не все непрерывные одномерные псевдопредставления такой группы тривиальны. Даже если G – группа без центра (присоединенная), формула

$$\varphi_n(g) = \exp\left(2in\pi \frac{f(\tilde{g})}{f(z_0)}\right), \quad g \in G, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

где z_0 – образующий элемент центра универсальной накрывающей $\tilde{G}$ группы G (см., например, [40]), $\tilde{g}$ – любой прообраз элемента $g \in G$ в $\tilde{G}$, а f – характер Гишарде–Вигнера на $\tilde{G}$, корректно определяет (нетривиальное при $n \neq 0$) одномерное псевдопредставление группы G (ср. [33], [34]).

Схема доказательства леммы 3 приведена в [41], и здесь мы следуем этой схеме. Докажем сначала следующее вспомогательное предложение.

ЛЕММА 4. Пусть G – односвязная эрмитово симметрическая простая группа Ли, K – аналитическая подгруппа группы G , отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G . Рассмотрим разложение Ивасава

$$g = k(g)an, \quad g \in G, \quad k \in K,$$

связанное с группой K . Рассмотрим композицию отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$. Существует класс сопряженных элементов, на котором эта композиция не принимает постоянного значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если рассматриваемая композиция постоянна на классах сопряженных элементов, то компактная подгруппа $Q \subset K$ с тривиальной центральной компонентой в группе K (с $z(k) = e_K$) является нормальным делителем не только в K , но и в G , что невозможно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть G – эрмитово симметрическая полупростая связная группа Ли и пусть f – псевдохарактер на G . Пусть $Q \subset K$ – компактная подгруппа, образованная элементами с тривиальной центральной компонентой в группе K (с $z(k) = e_K$). По существу повторяя рассуждения, примененные в доказательстве леммы 2, мы видим, что ограничения псевдохарактера f на Q и AN равны нулю. Таким образом, достаточно доказать, что ограничение псевдохарактера f на центр Z_K компактной группы K , которое является обычным характером центра по лемме 1, непрерывно. Действительно, если это ограничение непрерывно, то ограничения псевдохарактера f на K и на AN совпадают с ограничениями некоторого псевдохарактера Гишарде–Вигнера на эти подгруппы. Тогда разность этих псевдохарактеров ограничена и является псевдохарактером, и поэтому равна нулю, так что рассматриваемый псевдохарактер действительно совпадает с некоторым псевдохарактером Гишарде–Вигнера.

Итак, нам осталось доказать, что обычный вещественный характер центра Z_K группы K , получаемый при ограничении псевдохарактера f на Z_K , непрерывен. Воспользуемся леммой 4. Согласно этой лемме существует класс сопряженных элементов, на котором композиция отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$, не принимает постоянного значения. Следовательно, образ ограничения этого вещественно-аналитического отображения на класс сопряженных элементов, содержащий некоторый нетривиальный элемент вида an , $a \in A$, $n \in N$, не является одноточечным множеством и, следовательно, содержит некоторый интервал V в силу теоремы о сохранении области. Ограничение рассматриваемого характера на окрестность V ограничено, поскольку произведение любого элемента z окрестности V на произведение некоторого элемента $q \in Q$ и некоторого элемента $an \in AN$ принадлежит выделенному классу сопряженных элементов, содержащем некоторый фиксированный элемент $z_0 \in K_T$, так что на произведении $zqan$ псевдохарактер f принимает то же значение, что и на построенном элементе z_0 группы Z_K , причем

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(z) - f(zqan)| + |f(zqan)| \\ &= |f(z) - f(z) - f(q) - f(an)| + |f(z_0)| + 2C \leq |f(z_0)| + 2C \end{aligned}$$

при $z \in V$, так что псевдохарактер f , а потому и характер, определяемый ограничением псевдохарактера f на Z_K , ограничен на V . Однако, как хорошо известно, любой характер группы $\mathbb{R}$, ограниченный на некоторой окрестности, непрерывен¹. Это завершает доказательство леммы 4.

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из лемм 1–3.

3. Заключительные замечания. Нетрудно убедиться, что теорема 2 допускает распространение (без существенных изменений) на случай любых одномерных квазипредставлений полупростых групп, откуда, в свою очередь, следует, что любое одномерное псевдопредставление полупростой группы является экспонентой от псевдохарактера этой группы. В сочетании с недавно полученным полным (положительным) решением проблемы Мильмана для полупростых компактных групп Ли (постановка этой проблемы приведена Кажданом в [42]), это позволяет доказать автоматическую непрерывность (в смысле, описанном во введении к статье) любых конечномерных квазипредставлений полупростых групп Ли, но доказательство этой теоремы непрерывности громоздко и не может быть приведено в рамках настоящей статьи.

Отметим интересную нерешенную задачу: верно ли утверждение теоремы 2 для любых связных групп Ли, действие полупростой факторгруппы которых на факторгруппе радикала по его коммутанту не имеет нетривиальных неподвижных точек?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monograf. Mat., **1**, PWN, Warszawa, 1932.
- [2] J. W. Baker, B. M. Lashkarizadeh, “Representations and positive definite functions on topological semigroups”, *Glasgow Math. J.*, **38**:1 (1996), 99–111.
- [3] R. Exel, M. Lacas, “Continuous Fell bundles associated to measurable twisted actions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:3 (1997), 795–799.
- [4] S. A. Gaal, *Linear Analysis and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
- [5] C. C. Moore, “Group extensions and cohomology for locally compact groups. III”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **221**:1 (1976), 1–33.
- [6] R. T. Moore, *Measurable, Continuous and Smooth Vectors for Semi-Groups and Group Representations*, Mem. Amer. Math. Soc., **78**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.
- [7] K.-H. Neeb, “On a theorem of S. Banach”, *J. Lie Theory*, **7**:2 (1997), 293–300.
- [8] K.-H. Neeb, D. Pickrell, “Supplements to the papers entitled: “On a theorem of S. Banach” and “The separable representations of $U(H)$ ””, *J. Lie Theory*, **10**:1 (2000), 107–109.
- [9] V. Pestov, “Review of [7]”, *Math. Review* 98i:22003, 1998.
- [10] Z. Sasvari, *Positive Definite and Definitizable Functions*, Mathematical Topics, **2**, Akademie Verlag, Berlin, 1994.

¹Профессор Р. С. Исмагилов любезно сообщил мне, что аналогичное утверждение было доказано им в одной из его неопубликованных ранних работ в более сильной форме, а именно, для непрерывности характера достаточно его ограниченности на множестве положительной меры. В настоящее время техника развита настолько, что равносильность этого условия условию ограниченности на окрестности очевидна. Действительно, если вещественный характер ограничен на множестве A локально компактной группы G , то он ограничен и на AA^{-1} , а такое множество содержит непустое открытое подмножество по теореме о непрерывности свертки двух квадратично суммируемых функций на локально компактной группе.

- [11] A. I. Shtern, "Continuity of Banach representations in terms of point variations", *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:2 (2002), 250–252.
- [12] А. И. Штерн, "Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах", *Матем. сб.*, **193**:9 (2002), 139–156.
- [13] A. I. Shtern, "Continuity criteria for finite-dimensional representations of compact connected groups", *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **6**:2 (2003), 141–156.
- [14] A. I. Shtern, "Continuity conditions for finite-dimensional representations of some compact totally disconnected groups", *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **8**:1 (2004), 13–22.
- [15] А. И. Штерн, "Критерии непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп", *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 145–159.
- [16] А. И. Штерн, "Критерий непрерывности конечномерных представлений локально компактных групп", *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 951–953.
- [17] Э. Хьюитт, К. А. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, **1**, Наука, М., 1975.
- [18] А. И. Штерн, "Квазипредставления и псевдопредставления", *Функцион. анализ и прилож.*, **25**:2 (1991), 70–73.
- [19] A. I. Shtern, "Quasi-symmetry. I", *Russ. J. Math. Phys.*, **2**:3 (1994), 353–382.
- [20] А. И. Штерн, "Устойчивость представлений и псевдохарактеры", *Ломоносовские чтения*, МГУ, М., 1983.
- [21] C. Bavard, "Longueur stable des commutateurs", *Enseign. Math. (2)*, **37**:2 (1991), 109–150.
- [22] M. Gromov, "Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures", *Functional Analysis on the Eve of the 21st Century, Vol. II* (New Brunswick, NJ, 1993), *Progr. Math.*, **32**, Birkhäuser, Boston, MA, 1996, 1–213.
- [23] J. F. Manning, "Geometry of pseudocharacters", *Geom. Topol.*, **9** (2005), 1147–1185.
- [24] A. I. Shtern, *Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups*, Sfb 288 Preprint № 289, 1997.
- [25] А. И. Штерн, "Структурные свойства и ограниченные вещественные непрерывные 2-гомологии локально компактных групп", *Функцион. анализ и прилож.*, **35**:4 (2001), 67–80.
- [26] A. I. Shtern, "Bounded continuous real 2-cocycles on simply connected simple Lie groups and their applications", *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 122–133.
- [27] A. I. Shtern, "Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups", *Ann. Global Anal. Geom.*, **20** (2001), 199–221.
- [28] A. I. Shtern, "A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locally compact group to be finite-dimensional", *Acta Appl. Math.*, **68**:1–3 (2001), 105–121.
- [29] J.-M. Gambaudo, É. Ghys, "Commutators and diffeomorphisms of surfaces", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24**:5 (2004), 1591–1617.
- [30] P. Biran, M. Entov, L. Polterovich, "Calabi quasimorphisms for the symplectic ball", *Commun. Contemp. Math.*, **6**:5 (2004), 793–802.
- [31] D. Kotschick, S. Morita, "Signatures of foliated surface bundles and the symplectomorphism groups of surfaces", *Topology*, **44**:1 (2005), 131–149.
- [32] D. McDuff, "A survey of the topological properties of symplectomorphism groups", *Topology, Geometry and Quantum Field Theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **308**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, 173–193.
- [33] А. И. Штерн, "Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений", *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 478–480.
- [34] А. И. Штерн, "Проективные представления и чистые псевдопредставления эрмитово симметрических простых групп Ли", *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 140–146.
- [35] D. Kotschick, "What is... a quasi-morphism?", *Notices Amer. Math. Soc.*, **51**:2 (2004), 208–209.

- [36] A. I. Shtern, “Triviality and continuity of pseudocharacters and pseudorepresentations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **5**:1 (1997), 135–138.
- [37] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964.
- [38] A. L. T. Paterson, *Amenability*, Math. Surveys Monographs, **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [39] K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The Structure of Compact Groups*, de Gruyter Studies in Math., **25**, de Gruyter, Berlin, 1998.
- [40] M. A. Naimark, A. I. Štern [Shtern], *Theory of Group Representations*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [41] A. I. Shtern, “Automatic continuity of pseudocharacters on Hermitian symmetric semisimple Lie groups and some applications”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **12**:1 (2006), 1–8.
- [42] D. Kazhdan, “On ε -representations”, *Israel J. Math.*, **43**:4 (1982), 315–323.

А. И. Штерн

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступило

27.10.2005