Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Багдерина, Интегрируемые уравнения главного резонанса, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 465–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:32:09

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЛАВНОГО РЕЗОНАНСА

Ю. Ю. Багдерина

1. Введение. Уравнение главного резонанса для комплексной функции $u(t)$

$$iu' - \varphi(t)u + \lambda|u|^2u = F(t), \quad F(t) = f(t)e^{i\theta(t)}, \quad (1)$$

возникает при усреднении обыкновенного дифференциального уравнения со слабой кубической нелинейностью по быстрым одночастотным колебаниям [1; § 14, 18], [2; гл. 9]. С ним связано описание резонансных явлений в ряде задач небесной механики [3], физики плазмы [4], теории ускорителей релятивистских частиц [5]. Параметрическому резонансу соответствует уравнение [1; § 16]

$$iu' - \varphi(t)u + \lambda|u|^2u = F(t)\bar{u}, \quad F(t) = f(t)e^{2i\theta(t)}. \quad (2)$$

Также рассматривается уравнение

$$iu' - \varphi(t)u + \lambda|u|^2u = \frac{i}{2}f(t)\left(e^{i\theta(t)} + e^{-i\theta(t)}\frac{u}{\bar{u}}\right), \quad (3)$$

описывающее движение частиц в ускорителе с постоянным управляющим магнитным полем при подходе к точке, в которой нарушается режим автофазировки [5; § 4.7, 7.4], [6], и уравнение

$$iu' - \varphi(t)u + \lambda|u|^2u = f(t)e^{i\theta(t)}|u| + ig(t)u, \quad (4)$$

возникающее при моделировании процессов перемагничивания в ферромагнетиках.

В уравнениях (1)–(4) $\bar{u}$ обозначает комплексное сопряжение функции u , $\lambda = \text{const} \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, действительные функции $f(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$, $g(t)$ предполагаются гладкими. С помощью теста Пенлеве [7] исследуется интегрируемость следующих из (1)–(4) уравнений для действительной функции $\rho(t) = |u|^2$. В случаях, когда они инвариантны относительно преобразований переноса и растяжения, построены интегралы уравнений (1)–(4).

2. Интегралы уравнений главного резонанса. Подстановка $u(t) = r(t)e^{i\psi(t)}$ позволяет получить эквивалентное представление уравнений (1)–(4) в виде систем уравнений

$$r' = -f(t)\sin(\psi - \theta(t)), \quad \psi' = \lambda r^2 - \varphi(t) - \frac{f(t)}{r}\cos(\psi - \theta(t)), \quad (1')$$

$$r' = -f(t)r\sin 2(\psi - \theta(t)), \quad \psi' = \lambda r^2 - \varphi(t) - f(t)\cos 2(\psi - \theta(t)), \quad (2')$$

$$r' = f(t)\cos(\psi - \theta(t)), \quad \psi' = \lambda r^2 - \varphi(t), \quad (3')$$

$$r' = -f(t)r\sin(\psi - \theta(t)) + g(t)r, \quad \psi' = \lambda r^2 - \varphi(t) - f(t)\cos(\psi - \theta(t)) \quad (4')$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00124-а, фонда Президента РФ для поддержки молодых ученых, грант № МК-9002.2006.1, фонда INTAS, грант № 03-51-4286, и Фонда содействия отечественной науке.

© Ю. Ю. БАГДЕРИНА, 2006

для действительных функций амплитуды и фазы. Исключение функции $\psi(t)$ из (1')–(4') приводит к уравнениям второго порядка для функции $r(t)$. Однако в дальнейшем более удобно рассматривать уравнения относительно функции $\rho(t) = r^2(t)$. Для систем (1')–(4') они имеют соответственно вид

$$\left(\rho'' - 2f^2 - \rho' \frac{f'}{f}\right)^2 = (\Phi - \lambda\rho)^2(4f^2\rho - \rho'^2), \quad (1'')$$

$$\left(\rho'' - 4f^2\rho - \rho' \frac{f'}{f}\right)^2 = 4(\Phi - \lambda\rho)^2(4f^2\rho^2 - \rho'^2), \quad (2'')$$

$$\left(\rho\rho'' - \frac{\rho'^2}{2} - \rho\rho' \frac{f'}{f}\right)^2 = \rho^2(\Phi - \lambda\rho)^2(4f^2\rho - \rho'^2), \quad (3'')$$

$$\begin{aligned} \left(\rho\rho'' - \frac{3}{2}\rho'^2 + \left(2g - \frac{f'}{f}\right)\rho\rho' + 2\rho^2\left(g\frac{f'}{f} - g' + f^2 - g^2\right)\right)^2 \\ = \rho^2(\Phi - \lambda\rho)^2(4f^2\rho^2 - (\rho' - 2g\rho)^2), \end{aligned} \quad (4'')$$

$\Phi(t) = \theta'(t) + \varphi(t)$. Инвариантность уравнений (1'')–(4'') относительно точечных преобразований позволяет найти некоторые интегралы систем (1')–(4').

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1) Если $f(t) = C_1$, $\varphi(t) = C_2 - \theta'(t)$ (здесь и далее $C_i = \text{const}$), то интегралом для системы (1') является соотношение $4C_1r \cos(\psi - \theta(t)) + 2C_2r^2 - \lambda r^4 = \text{const}$, для системы (2') $2r^2(C_1 \cos 2(\psi - \theta(t)) + C_2) - \lambda r^4 = \text{const}$, для системы (3') $3C_1 \sin(\psi - \theta(t)) + 3C_2r - \lambda r^3 = \text{const}$.

2) Если $f(t) = C_1(t - t_0)^{-3/2}$, $\varphi(t) = C_2(t - t_0)^{-1} - \theta'(t)$, то для системы (1') интеграл получается подстановкой

$$R = r\sqrt{t - t_0}, \quad \chi = \psi - \theta(t) \quad (5)$$

в общее решение уравнения

$$\frac{dR}{d\chi} = \frac{R^2/2 - C_1R \sin \chi}{\lambda R^3 - C_2R - C_1 \cos \chi};$$

для системы (3') – подстановкой (5) в общее решение уравнения

$$\frac{dR}{d\chi} = \frac{R/2 + C_1 \cos \chi}{\lambda R^2 - C_2}.$$

Если $f(t) = C_1(t - t_0)^{-1}$, $\varphi(t) = C_2(t - t_0)^{-1} - \theta'(t)$, то для системы (2') интеграл получается подстановкой (5) в общее решение уравнения

$$\frac{dR}{d\chi} = \frac{R/2 - C_1R \sin 2\chi}{\lambda R^2 - C_2 - C_1 \cos 2\chi}.$$

3) Если $g(t) = C_1f(t) + \frac{f'(t)}{2f(t)}$, $\varphi(t) = C_2f(t) - \theta'(t)$, то интеграл системы (4') получается из общего решения уравнения Абеля второго рода

$$\frac{dR}{d\chi} = \frac{2R(C_1 - \sin \chi)}{\lambda R - C_2 - \cos \chi}$$

подстановкой $R = r^2/f(t)$, $\chi = \psi - \theta(t)$. В частности, если $C_1 = 0$, интегралом является $(3 \cos(\psi - \theta(t)) + C_2)r f^{-1/2} - \lambda r^3 f^{-3/2} = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что в случае 1) уравнения (1'')–(3'') инвариантны относительно симметрии переноса $X_1 = \partial_t$, а в случае 2) – относительно симметрии растяжения $X_2 = (t - t_0)\partial_t - \rho\partial_\rho$. В случае 3) уравнение (4'') допускает оператор $X_3 = f(t)^{-1}\partial_t + f'(t)f(t)^{-2}\rho\partial_\rho$. Им соответствуют симметрии $Z_1 = \partial_t + \theta'(t)\partial_\psi$ и $Z_2 = 2(t - t_0)(\partial_t + \theta'(t)\partial_\psi) - r\partial_r$ уравнений (1')–(3') и симметрия $Z_3 = 2f(t)^{-1}(\partial_t + \theta'(t)\partial_\psi) + f'(t)f(t)^{-2}r\partial_r$ уравнений (4').

После подстановки инвариантов R, χ операторов Z_1, Z_2, Z_3 ($R = r$ для Z_1) в качестве новых независимых переменных системы (1')–(4') сводятся к одному уравнению относительно $R(\chi)$. Его общее решение дает интеграл уравнений (1')–(4') в рассматриваемых случаях.

3. Интегрируемость уравнений (1'')–(4''). Применение теста Пенлеве [7] и слабого теста Пенлеве [8] к уравнениям (1'')–(4'') приводит к следующему результату.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Уравнения (3''), (4'') проходят слабый тест Пенлеве; разложение решения в окрестности подвижной особой точки t_0 имеет вид

$$\rho = (t - t_0)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^{j/2}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Уравнения (1''), (2'') проходят тест Пенлеве при условии

$$f(t) = C_1 e^{C_0 t}, \quad \varphi(t) = C_2 - \theta'(t). \quad (6)$$

Если $C_0 \neq 0$, то задача интегрирования уравнения (1) сводится к решению третьего уравнения Пенлеве

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \gamma y^3 + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \frac{\delta}{y} \quad (7)$$

с параметрами $\alpha = -\lambda C_1 C_0^{-2}$, $\beta = (C_2 - iC_0)C_1 C_0^{-2}$, $\gamma = 0$, $\delta = C_1^2 C_0^{-2}$, а уравнения (2) – к решению пятого уравнения Пенлеве

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) y'^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{x} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1} \quad (8)$$

с параметрами $\alpha = 0$, $\beta = (C_2/C_0 - i/2)^2/2$, $\gamma = -C_1^2/(2C_0^2)$, $\delta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка в (1''), (2'') разложения

$$\rho = (t - t_0)^{-p} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^j \quad (9)$$

решения в окрестности подвижной особой точки t_0 позволяет определить параметр $p = -1$ и резонанс $j = 2$ – степень, при которой в (9) входит произвольная постоянная. Коэффициенты a_j разложения (9) находятся из рекуррентной системы, первые три уравнения которой имеют вид

$$2m = -\lambda^2 a_0^2, \quad m \frac{f_1}{f_0} = a_0(\lambda \Phi_0 - \lambda^2 a_1), \quad 2m \frac{f_2}{f_0} - m \frac{f_1^2}{f_0^2} = \lambda a_0 \Phi_1. \quad (10)$$

Здесь $m = 2$ для уравнения (1''), $m = 1/2$ для (2''), f_j, Φ_j обозначают коэффициенты разложения Тейлора функций $f(t), \Phi(t)$ в точке t_0 . Третье соотношение (10) должно выполняться при произвольных, в том числе действительных, значениях t_0 . Поскольку $\text{Im } a_0 \neq 0$, оно распадается на два условия, эквивалентных (6):

$$f f'' - f'^2 = 0, \quad (\varphi + \theta')' = 0,$$

при выполнении которых уравнения (1''), (2'') проходят тест Пенлеве.

Продифференцировав уравнение (1) и исключив $\bar{u}(t)$, относительно функции $u(t)$ можно получить уравнение второго порядка

$$u'' = \frac{u'^2}{u} - \lambda \bar{F} u^2 - i\varphi' u + F\varphi - iF' + \frac{F^2}{u}.$$

В интегрируемом случае (6) замена $x = e^{C_0 t}$, $y = e^{-i\theta(t)}$ и преобразует его в уравнение (7).

Дифференцирование уравнения (2) и исключение $\bar{u}(t)$ приводит к уравнению

$$u'' = \frac{\lambda u u'^2 - F' u' + \varphi(F\varphi - iF')u}{\lambda u^2 - F} - \lambda \bar{F} u^3 + (F\bar{F} - i\varphi')u$$

относительно функции $u(t)$. В случае (6) заменой

$$x = e^{2C_0 t}, \quad y = 1 - \frac{C_1}{\lambda u^2} e^{C_0 t + 2i\theta(t)}$$

оно преобразуется к уравнению (8).

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (1)–(4) преобразованием $\tilde{u} = e^{-i\theta(t)}$ и приводятся к подобно-го вида уравнениям, в которых параметр $\theta(t)$ равен нулю. То есть с точностью до замены зависимой переменной уравнения (1), (2) интегрируемы при $f(t) = C_1 e^{C_0 t}$, $\varphi(t) = C_2$. В этом случае параметр $\varphi(t)$ не принадлежит классу функций, растущих на бесконечности, которые входят в (1), (2) в качестве $\varphi(t)$ при решении задачи об авторезонансе [6], [9].

Автор благодарен Л. А. Калякину, привлечшему его внимание к данной задаче.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, ГИТТЛ, М., 1955. [2] А. Найфэ, *Введение в методы возмущений*, Мир, М., 1984. [3] А. И. Нейштадт, *Прикл. матем. и мех.*, **39**:4 (1975), 621–632. [4] К. С. Головановский, *Физика плазмы*, **11**:3 (1985), 295–299. [5] А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, *Теория циклических ускорителей*, Физматлит, М., 1962. [6] Л. А. Калякин, *ЖВМиМФ*, **46**:1 (2006), 83–94. [7] M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, *J. Math. Phys.*, **21**:4 (1980), 715–721. [8] A. Ramani, B. Dorizzi, B. Grammaticos, *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 1539–1541. [9] Л. А. Калякин, *Докл. РАН*, **378**:5 (2001), 594–597.

Ю. Ю. Багдерина

Институт математики с вычислительным центром

УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: yulya@mail.rb.ru

Поступило

07.03.2006

Исправленный вариант

05.05.2006