Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Митькин, Об оценке некоторых арифметических сумм с числом делителей, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 471–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:04:49

ОБ ОЦЕНКЕ НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СУММ С ЧИСЛОМ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Д. А. Митькин

Пусть $\tau_k(n)$ при натуральных k, n обозначает число решений уравнения $x_1 \cdots x_k = n$ в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$. В частности, считаем, что

$$\tau_1(n) = 1 \quad , \quad \tau_2(n) = \tau(n).$$

Целью статьи является уточнение оценки К. К. Марджанишвили [1]

$$\sum_{n \leq X} (\tau_k(n))^l \leq A_k^{(l)} X (\ln X + k^l - 1)^{k^l - 1}, \quad (1)$$

где

$$A_k^{(l)} = k^l (k!)^{-(k^l - 1)/(k - 1)} \quad \text{при} \quad X \geq 1.$$

Рассматривая суммы с наименьшим общим кратным вида

$$S_X(k, l) = \sum_{[d_1, \dots, d_k] \leq X} \frac{(\tau([d_1, \dots, d_k]))^l}{[d_1, \dots, d_k]},$$

автор [2] установил оценку

$$\sum_{n \leq X} (\tau(n))^k \leq \frac{X}{(2^k - 1)!} \left(\ln X + \frac{11}{9} (2^k - 1) \right)^{2^k - 1}.$$

В настоящей статье доказывается неравенство $\tau_k(n) \tau_l(n) \leq \tau_{kl}(n)$, которое в сочетании с известной оценкой

$$\sum_{n \leq X} \tau_k(n) \leq \frac{X}{(k - 1)!} (\ln X + k - 1)^{k - 1}$$

позволяет получить следующее уточнение оценки (1):

$$\sum_{n \leq X} (\tau_k(n))^l \leq \frac{X}{(k^l - 1)!} (\ln X + k^l - 1)^{k^l - 1}.$$

ЛЕММА 1. Для любых натуральных $k \geq 2, l \geq 2$ и n справедливо неравенство

$$\tau_k(n) \tau_l(n) \leq \tau_{kl}(n). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\tau_k(n) \tau_l(n)$ и $\tau_{kl}(n)$ – положительные мультипликативные функции, неравенство (2) достаточно доказать при n , равном степени простого числа. При простом p и натуральных $m \geq 2, \alpha$ справедлива формула (см. [3; гл. 2, вопрос 11b])

$$\tau_m(p^\alpha) = \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + m - 1)}{1 \cdot 2 \cdots (m - 1)} = \frac{m(m + 1) \cdots (m + \alpha - 1)}{1 \cdot 2 \cdots \alpha},$$

поэтому неравенство $\tau_k(p^\alpha) \tau_l(p^\alpha) \leq \tau_{kl}(p^\alpha)$ эквивалентно неравенству

$$\prod_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(k + j)(l + j)}{(1 + j)^2} \leq \prod_{j=0}^{\alpha-1} \frac{kl + j}{1 + j},$$

которое справедливо как следствие очевидного неравенства $(k + j)(l + j) \leq (kl + j)(1 + j)$ при $j = 0, 1, \dots, \alpha - 1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично доказывается и более общее неравенство

$$\tau_k(n)\tau_l(n) \leq \tau_m(n)\tau_s(n),$$

где натуральные числа k, l, m, s подчинены условиям $kl = ms$, $k + l < m + s$.

Индукцией по $l \geq 2$ из леммы 1 получается следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ. При любых натуральных n и $l \geq 2$, $k_1 \geq 2, \dots, k_l \geq 2$ справедливо неравенство

$$\tau_{k_1}(n) \cdots \tau_{k_l}(n) \leq \tau_{k_1 \cdots k_l}(n).$$

ЛЕММА 2 [4; с. 358]. При любом натуральном $k \geq 2$ и при любом $X \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_{n \leq X} \tau_k(n) \leq \frac{X}{(k-1)!} (\ln X + k - 1)^{k-1}.$$

ТЕОРЕМА. При любых натуральных l , $k_1 \geq 2, \dots, k_l \geq 2$ и любом $X \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_{n \leq X} \tau_{k_1}(n) \cdots \tau_{k_l}(n) \leq \frac{X}{(k_1 \cdots k_l - 1)!} (\ln X + k_1 \cdots k_l - 1)^{k_1 \cdots k_l - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию из леммы 1 имеем неравенство

$$\tau_{k_1}(n) \cdots \tau_{k_l}(n) \leq \tau_{k_1 \cdots k_l}(n),$$

поэтому требуемая оценка следует из леммы 2 при $k = k_1 \cdots k_l$.

Полагая в условии теоремы $k_1 = \dots = k_l = k$, получим следующее следствие, уточняющее оценку (1).

СЛЕДСТВИЕ. При любых натуральных $k \geq 2$, l и любом $X \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_{n \leq X} (\tau_k(n))^l \leq \frac{X}{(k^l - 1)!} (\ln X + k^l - 1)^{k^l - 1}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. К. Марджанишвили, Докл. АН СССР, **22**:7 (1939), 391–393. [2] Д. А. Митькин, Чебышевский сб., **6**:1 (2005), 146–156. [3] И. М. Виноградов, Основы теории чисел, Наука, М., 1981. [4] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, Дзета-функция Римана, Физматгиз, М., 1994.

Д. А. Митькин

Московский педагогический государственный университет

Поступило

04.04.2006