Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О структуре графов расстояний, имеющих большое хроматическое число, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 473–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:34:42

О СТРУКТУРЕ ГРАФОВ РАССТОЯНИЙ, ИМЕЮЩИХ БОЛЬШОЕ ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО

А. М. Райгородский

1. Постановка задачи и формулировки результатов. В 50-е годы XX века Е. Нелсон предложил исследовать минимальное число $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, в которые можно так раскрасить все точки вещественного евклидова пространства, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1 (см. [1]). Это число, называемое хроматическим числом пространства, стало знаменитым благодаря Г. Хадвигеру (см. [2]), который сам занимался смежными вопросами еще в 1944 г. (см. [3]), и П. Эрдёшу, для которого постановка аналогичных задач была весьма характерна. Термин “хроматическое число” в данном контексте вовсе не случаен. Дело в том, что задачу Нелсона–Эрдёша–Хадвигера ничего не стоит переформулировать на языке теории графов, полагая $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathcal{G}_n)$, где $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$ – граф с множеством вершин $\mathcal{V}_n = \mathbb{R}^n$, множеством ребер

$$\mathcal{E}_n = \{(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : |x - y| = 1\}$$

($|x - y|$ – обычное евклидово расстояние между векторами) и хроматическим числом $\chi(\mathcal{G}_n)$. Конечно, граф $\mathcal{G}_n$ “ужасен”, ведь множество его вершин континуально, и априори не вполне ясно, как можно работать с его хроматическим числом. Тут, однако, на помощь приходит замечательная теорема П. Эрдёша и Н. де Брёйна: *если хроматическое число какого-либо графа конечно, то оно достигается на некотором конечном подграфе исходного графа* (см. [4]). Таким образом, если показать, что $\chi(\mathbb{R}^n) < \infty$, то дальше про континуум вершин можно забыть и манипулировать исключительно так называемыми *конечными графами расстояний*, т.е. подграфами графа $\mathcal{G}_n$. Практически очевиден тот факт, например, что $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (cn)^n$, $c > 0$, так что заведомо все в порядке. Более того, известно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$ (см. [5]), и этот результат никому не удается улучшить с 1972 г. Интересная проблема состоит, стало быть, в отыскании нижних оценок. Впервые их экспоненциальность была установлена П. Франклом и Р.М. Уилсоном, которые в 1981 г. обосновали неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$ (см. [6]). Единственное улучшение оценки Франкла–Уилсона было найдено автором в работе [7]: $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$.

В дальнейшем нас будет в первую очередь волновать структура тех графов расстояний, на которых достигаются наилучшие экспоненциальные оценки хроматического числа пространства. К ее обсуждению мы сейчас и перейдем. Заметим лишь, что в связи с проблемой Нелсона–Эрдёша–Хадвигера получено огромное количество результатов, и многие из них можно найти в обзорах [8] и [9].

Наиболее просто устроены графы расстояний, за счет которых получается неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$, принадлежащее Франклу и Уилсону. Однако уже с ними ясно не все. Понужеству они имеют вид $G = (V, E)$, где

$$V \subseteq \Sigma = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, |\{i : x_i = 1\}| = l\}$$

с некоторым $l \in [0, n]$, а

$$E = \{(x, y) \in V \times V : |x - y| = a\}. \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-3130.2004.1, программы поддержки Ведущих научных школ, грант № НШ-136.2003.1, и фонда ИНТАС, грант № 03-51-5070.

Здесь мы вольны варьировать параметры l и a . Заметим, кстати, что формально граф G не обязан являться подграфом в $\mathcal{G}_n$, ведь у $\mathcal{G}_n$ ребра задаются парами точек на расстоянии 1, а не a . Однако хроматическое число пространства инвариантно относительно величины “запрещенного” расстояния (запрещенного между точками одного цвета), и потому единица была взята нами исключительно для удобства первоначального определения.

У Франкла и Уилсона оптимальной оказывалась ситуация, когда $l \sim (1 - \sqrt{2}/2)n$, $a \sim \sqrt{l}$. При таких значениях параметров оценка как раз и имела вид

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G) \geq (1.207 \dots + o(1))^n;$$

с другими же параметрами оценка была гораздо слабее. Возникает естественный вопрос: так ли уж необходимо, чтобы граф расстояний имел именно упомянутую структуру ($l \sim (1 - \sqrt{2}/2)n$, $a \sim \sqrt{l}$), дабы его хроматическое число было ограничено снизу величиной $(1.207 \dots + o(1))^n$?

Формализовать задачу можно так. Пусть $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_1(n; 0, 1; n - l, l)$ – класс всех графов расстояний $G = (V, E)$, у которых $V \subseteq \Sigma$ (в каждой вершине – векторе из $\mathbb{R}^n$ – ровно $n - l$ нулей и l единиц), а E имеет вид (1) с некоторым (произвольным) a . Тем самым, мы получаем как бы две “степени свободы” внутри класса: V любое, хотя структура его элементов задана наперед, и a любое в разумных пределах (бессмысленно брать a , большее величины максимального расстояния в Σ , и пр.). Положим теперь

$$\chi_1 = \chi_1(n; 0, 1; n - l, l) = \max_{G \in \mathfrak{G}_1} \chi(G).$$

Понятно, что в новых терминах $\chi_1(n; 0, 1; n - l, l) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$, коль скоро $l \sim (1 - \sqrt{2}/2)n$ (Франкл–Уилсон), а при других l такого неравенства пока нет. Стало быть, максимально точные нижние оценки величины χ_1 при разных l и будут свидетельствовать о структуре графа расстояний с большим хроматическим числом.

Мы будем считать, что $l \asymp n$. На первый взгляд, такое ограничение кажется существенным, но, на самом деле, если $l = o(n)$, то верхние оценки χ_1 , принадлежащие автору (см. [10], [11]), субэкспоненциальны, и говорить о величинах типа $(1.207 \dots + o(1))^n$ заведомо не приходится. Итак, пусть $l \sim l_0 n$, $l_0 \in (0, 1/2)$, а $t = [t_0 n] < l$, где $t_0 \in (0, l_0)$. Определим p как минимальное простое число, такое, что $l - 2p < t$. Поскольку $l - t \asymp n$, величина $p = p(l, t)$ асимптотически равна $(l - t)/2$ (см. [12]). Известно, что $C_n^{l-t} = (v_0 + o(1))^n$, где $v_0 = v_0(l, t)$ – константа, большая единицы. Имеет место новая

ТЕОРЕМА. *Выполнена оценка*

$$\chi_1 \geq \max_t \frac{(v_0(l, t) + o(1))^n}{C_n^{p(l, t) - 1}}.$$

По большому счету, в теореме речь идет об отношении $C_n^{l-t}/C_n^{[(l-t)/2]}$, которое, как нетрудно проверить, имеет вид $(c_0 + o(1))^n$, $c_0 = c_0(l, t) > 1$ – константа: все различия между упомянутой дробью и дробью из формулировки попадают в $o(1)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $l_0 \geq 1 - \sqrt{2}/2$, то $\max_t c_0(l, t) = 1.207 \dots$, т.е.*

$$\chi_1 \geq (1.207 \dots + o(1))^n.$$

Следствие дает ответ на самый первый наш вопрос: граф расстояний вовсе не обязан иметь структуру, рассматривавшуюся Франклом и Уилсоном, дабы его хроматическое число было надлежащим образом велико. Если раньше при $l = 0.5$ мы, скажем, имели $\chi_1 \geq (1.139 \dots + o(1))^n$, то теперь мы имеем $\chi_1 \geq (1.207 \dots + o(1))^n$, и т.д.

2. Набросок доказательства теоремы и ее следствия. Пусть фиксированы все параметры из формулировки теоремы. Определим натуральное число r из условия

$$(l - t + 1) \left(2 + \frac{t - 1}{r + 1} \right) \leq n \leq (l - t + 1) \left(2 + \frac{t - 1}{r} \right)$$

и выберем граф $G_t = (V_t, E_t) \in \mathfrak{G}_1$ следующим образом. Прежде всего возьмем $V_t \subset \Sigma$, полагая $V_t = \bigcup_{u=t+r}^{t+2r} V_t^u$, где

$$V_t^u = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma : |\{i \leq t + 2r : x_i = 1\}| = u\}.$$

Нетрудно проверить, что скалярное произведение любых двух векторов из V_t не может быть меньше t . Более того, стандартные комбинаторные выкладки в сочетании с формулой Стирлинга показывают, что $|V_t| = (v_0(l, t) + o(1))^n$. Наконец, результаты работы [13] свидетельствуют о том, что если попарные скалярные произведения векторов в каком-либо $V \subset \Sigma$ ведут себя так же, как и в V_t (оцениваются снизу величиной t), то $|V| \leq |V_t|$, а это в конечном итоге означает, что V_t построено оптимально. Рассмотрим далее

$$E_t = \{(x, y) \in V_t \times V_t : |x - y| = \sqrt{2p}\}.$$

Несложная модификация линейно-алгебраического метода из [6] влечет неравенство $\alpha(G_t) \leq C_n^{p-1}$, где $\alpha(G_t)$ – число независимости нашего графа. Стало быть,

$$\chi_1 \geq \chi(G_t) \geq \frac{|V_t|}{\alpha(G_t)} \geq \frac{(v_0(l, t) + o(1))^n}{C_n^{p(l, t)-1}},$$

и набросок доказательства теоремы завершен. Следствие же получается за счет оптимизации установленного неравенства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Soifer, *Mathematical Coloring Book*, Center for Excellence in Mathematical Education, Colorado Springs, CO, 1997. [2] H. Hadwiger, *Elemente der Math.*, **16** (1961), 103–104. [3] H. Hadwiger, *Portugaliae Math.*, **4** (1944), 140–144. [4] N. G. de Bruijn, P. Erdős, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **54:5** (1951), 371–373. [5] D. G. Larman, C. A. Rogers, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24. [6] P. Frankl, R. M. Wilson, *Combinatorica*, **1:4** (1981), 357–368. [7] А. М. Райгородский, *УМН*, **55:2** (2000), 147–148. [8] А. М. Райгородский, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146. [9] L. A. Székely, *Paul Erdős and his Mathematics, II* (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666. [10] А. М. Райгородский, *Матем. сб.*, **193:10** (2002), 139–160. [11] А. М. Райгородский, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:3** (2005), 81–108. [12] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967. [13] R. Ahlswede, L. H. Khachatrian, *European J. Combin.*, **18:2** (1997), 125–136.

А. М. Райгородский

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: araigor@avangard.ru

Поступило
20.04.2006