Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Рыжаков, Резольвентные пределы квантовой эволюции открытых систем, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 476–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2837>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:47:50

РЕЗОЛЬВЕНТНЫЕ ПРЕДЕЛЫ КВАНТОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ

Г. В. Рыжаков

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – алгебра ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ – симметричное фоковское пространство. Рассмотрим уравнение для оператора эволюции U_t

$$\frac{dU_t}{dt} = iHU_t, \quad U(0) = I, \quad (1)$$

с гамильтонианом H , действующего в тензорном произведении $\mathfrak{H} = \mathcal{H} \otimes \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$, где

$$\begin{aligned} H &= H_0 \otimes I - I \otimes i\nabla + H_{\text{int}}, \\ H_{\text{int}} &= K \otimes \Lambda(g) + R \otimes A^\dagger(g) + R^* \otimes A(g), \end{aligned} \quad (2)$$

причем $K^* = K$, $H_0^* = H_0$ и R – ограниченные операторы,

$$\Lambda(g) = \int dx g(x) a^\dagger(x) a(x), \quad A(g) = \int dx \bar{g}(x) a(x), \quad A^\dagger(g) = A^*(g),$$

$g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $a(x)$ и $a^\dagger(x)$ – плотности операторов уничтожения и рождения.

Вместо фиксированной функции g , входящей в определение гамильтониана H_{int} , будем рассматривать семейство неотрицательных финитных функций $g_\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, 1]$, которое имеет пределом дельта-функцию:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int f(x) g_\alpha(x) dx = f(0)$$

для любой непрерывной ограниченной функции f , причем диаметр $d_g(\alpha)$ носителя функции g_α стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$. С физической точки зрения такой предел соответствует модели точечного взаимодействия системы с окружением. Формальный предел семейства гамильтонианов $\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{\text{int}}^\alpha$ является *сингулярно возмущенным оператором*, так как результат его действия на векторы вида $\psi(v) \otimes r$, где $\psi(v) \in \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ – когерентный вектор, $v(0) = 0$, $r \in \mathcal{H}$, равен нулю, а линейная оболочка таких векторов плотна в $\mathfrak{H}$.

В дальнейшем, где это не приводит к путанице, будем опускать индекс α . Случай, когда операторы K , R и H_0 коммутируют, рассмотрен в [1]. В настоящей работе рассматривается обобщение на случай некоммутирующих операторов.

Рассмотрим уравнение (1) в представлении взаимодействия, порождаемом оператором $\hat{H}_0 = H_0 \otimes I - I \otimes i\nabla$, не зависящим от g :

$$\frac{dU(t)}{dt} = iH(t)U(t), \quad U(t) = e^{-i\hat{H}_0 t} U_t e^{i\hat{H}_0 t}, \quad (3)$$

с гамильтонианом

$$H(t) = e^{-i\hat{H}_0 t} H_{\text{int}} e^{i\hat{H}_0 t} = K(t) \otimes \Lambda_t(g) + R(t) \otimes A_t^\dagger(g) + R^*(t) \otimes A_t(g), \quad (4)$$

где $K(t)$ и $R(t)$ – непрерывные по норме семейства ограниченных операторов

$$K(t) = e^{-iH_0 t} K e^{iH_0 t}, \quad R(t) = e^{-iH_0 t} R e^{iH_0 t},$$

а операторы $\Lambda_t(g)$, $A_t(g)$ и $A_t^\dagger(g) = A_t^*(g)$ являются неограниченными:

$$\begin{aligned}\Lambda_t(g) &= e^{-t\nabla} \Lambda(g) e^{t\nabla} = \int dx g(x-t) a^\dagger(x) a(x), \\ A_t(g) &= e^{-t\nabla} A(g) e^{t\nabla} = \int dx g(x-t) a(x).\end{aligned}$$

В качестве тотального множества, задающего область определения данных операторов, возьмем линейную оболочку $\mathcal{L}_\varepsilon$ множества

$$E_\varepsilon^S = \{\phi(f) : \phi(f) \in E^S, \|f\|_{L_2(\mathbb{R})} < 1, |f| < \varepsilon\},$$

где E^S – множество когерентных векторов, $0 < \varepsilon \leq 1$. Линейная оболочка такого множества плотна в $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ [2]; рассматриваемые операторы – сильно непрерывное по t семейство операторов, действующих из E_ε^S в $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$. С его помощью введем следующую норму в $\mathfrak{H}$:

$$p(X) = \sup_{\psi, h} \|Xh \otimes \psi\|_{\mathfrak{H}}, \quad (5)$$

где $\psi \in E_\varepsilon^S$, $h \in \mathcal{H}$, причем $\|\psi\|_{\Gamma^S} = \|h\|_{\mathcal{H}} = 1$.

Свойства преднормы для $p(X)$ проверяются непосредственно. Свойство нормы $p(X) = 0 \implies X = 0$ следует из линейности рассматриваемых операторов и тотальности множества E_ε^S . Норма $p(X)$ определяет локально выпуклую топологию в $\mathfrak{H}$ [3].

Пусть

$$K_\Lambda(t) = \int_0^t K(s) \Lambda_s(g) ds, \quad K_g(t, u) = \int_0^t K(s) g(u-s) ds.$$

Положим

$$R(t, u) = e^{-iK_g(t, u)} e^{-iK_\Lambda(t)} R(t) e^{iK_\Lambda(t)}$$

и рассмотрим семейство операторов

$$\begin{aligned}U_\alpha(t) &= e^{iK_\Lambda(t)} \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \int_0^\tau ds \int du \tilde{R}^*(\tau, u) \tilde{R}(s, u) g(u-\tau) g(u-s) \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \int dw a^\dagger(w) \int_0^t d\tau g(w-\tau) \tilde{R}(\tau, w) \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \int dw \int_0^t d\tau \tilde{R}^*(\tau, w) a(w) g(w-\tau) \right\}.\end{aligned}$$

Семейство операторов $U_\alpha(t)$ корректно определено на $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H}) = \mathcal{L}_\varepsilon \otimes \mathcal{H}$, его зависимость от α обусловлена семейством g_α . Найдём асимптотику разрешающего оператора уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (4) с точностью до $O(t^2)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H(t)$ определено в (4). Тогда для любых единичных векторов $\phi \in E_\varepsilon^S$, $\varphi \in \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$, $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\left(h_2 \otimes \varphi, \left(U_\alpha(t + \Delta t) - \left(1 + \int_t^{t+\Delta t} H(\tau) d\tau \right) U_\alpha(t) \right) h_1 \otimes \phi \right)_{\mathfrak{H}} \\ &= O(\Delta t^2) C_1(\varphi, \phi) C_3(g_\alpha) + O(t \Delta t) C_2(\varphi, \phi) C_4(g_\alpha),\end{aligned} \quad (6)$$

где C_1 и C_2 – ограниченные функции на $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, а C_3 и C_4 – функционалы на $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Рассмотрим предел семейства операторов U_α при $g_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \delta(x)$. Выражение для действия предельного оператора на произвольный когерентный вектор $\psi(f)$ можно записать

явно:

$$\begin{aligned}\psi^t(f) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_\alpha(t)\psi(f) \\ &= \exp\{i(H_0)_5 t\} \exp\{-(R^*(\exp\{iK\} - iK - 1)(iK)^{-2}R)_3 t\} \\ &\quad \times \exp\left\{i \int_0^t d\tau (R^*(e^{iK} - 1)(iK)^{-1})_1 f(\tau)\right\} \psi(f^t); \end{aligned} \quad (7)$$

предельная функция $f^t(x)$ равна $f^t(x) = r(x)(f(x+t) + h(x))$, причем

$$h(x) = iI_{(-t,0)}(x)((1 - e^{-iK})(iK)^{-1}R)_2, \quad r(x) = \exp\{i(K)_4 I_{(-t,0)}(x)\}.$$

Индексы у операторов определяют порядок их действия.

Вычислим краевое условие, которому удовлетворяет предельный вектор состояния, а также предельный генератор семейства групп U_α . Учитывая теорему 1 и тот факт, что генератор (2) не зависит от времени, краевое условие и предельный генератор можно найти, используя семейство $U_\alpha(t)$. Определим следующие специальные операторы уничтожения:

$$A_\pm \psi(v) \stackrel{\text{def}}{=} v(\pm 0)\psi(v), \quad v \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Из (7) следует, что

$$A_- \psi^t(f) = [(e^{iK})_4 f(t) + i(e^{iK})_4 ((1 - e^{-iK})(iK)^{-1}R)_2] \psi^t(f)$$

и $A_+ \psi^t(f) = f(t)\psi^t(f)$, откуда получаем краевое условие для ψ^t :

$$(A_- - e^{iK}A_+ - i(e^{iK} - 1)(iK)^{-1}R)\psi^t = 0. \quad (8)$$

Для вывода предельного уравнения учтем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)I_{(-t,0)}(x) = 0 \quad \text{при } x \neq 0,$$

откуда следует, что такое же соотношение выполняется и для аргумента когерентного вектора:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\right)f^t(x) = 0.$$

Опуская промежуточные вычисления, получаем

$$\frac{d}{dt}\psi^t = [\nabla + i(R^*(e^{iK} - 1)(iK)^{-1})_1 f(t) - i(H_0)_5 - (R^*(\exp\{iK\} - iK - 1)(iK)^{-2}R)_3] \psi^t.$$

Устремляя t к нулю и учитывая краевое условие, имеем

$$\begin{aligned} &-i \left(\frac{d}{dt} U(t)\psi(f) \right) \Big|_{t=0} \\ &= [-i\nabla + R^*(e^{iK} - 1)(iK)^{-1}A_+ + H_0 + iR^*(\exp\{iK\} - iK - 1)(iK)^{-2}R] \psi(f). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Сильным резольвентным пределом семейства операторов (2) при $g_\alpha \rightarrow \delta$ является оператор

$$H = -i\nabla + H_0 + R^*(e^{iK} - 1)(iK)^{-1}A_+ + iR^*(\exp\{iK\} - iK - 1)(iK)^{-2}R,$$

имеющий в качестве области определения подмножество векторов из $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{H})$, удовлетворяющих краевому условию (8).

Исходя из явного вида предельного разрешающего оператора можно вывести стохастическое дифференциальное уравнение, которому оно подчиняется. Рассмотрим предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} (\psi(w), (U(t+dt) - U(t))\psi(v))_{\Gamma S} = (\psi(w), M(dt)\psi(v))_{\Gamma S},$$

где стохастический дифференциал $M(t)$ не должен зависеть от выбора конкретных когерентных векторов $\psi(w)$ и $\psi(v)$. Опуская промежуточные вычисления, находим выражения для стохастического дифференциала $M(dt)$ в форме Хадсона–Партасарати (см. [4]–[6]):

$$M(dt) = (e^{iK} - 1) d\Lambda_t + (e^{iK} - 1)(iK)^{-1} iR dA_t^\dagger + iR^* (e^{iK} - 1)(iK)^{-1} dA_t + (H_0 + R^* (e^{iK} - iK - 1)(iK)^{-2} R) dt.$$

Данный результат согласуется с результатами теоремы, связывающей коэффициенты исходного и предельного уравнений [7], [8].

Для формулировки основного результата введем вспомогательное понятие *упорядоченного операторозначного когерентного вектора* $\psi_{\mathcal{N}}(J)$. По определению, это вектор фоковского пространства, элементами которого являются операторы некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$, имеющий вид

$$\psi_{\mathcal{N}}(H) = \overleftarrow{\exp} \left\{ \int dx a^\dagger(x) J(x) \right\} |0\rangle, \quad J \in L_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathbb{R}).$$

Упорядочение в хронологической экспоненте ведется по аргументам $x \in \mathbb{R}$ оператора $J(x)$. Таким образом, при действии компоненты

$$\phi_n(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n)$$

упорядоченного когерентного вектора $\psi(J)_{\mathcal{N}}$ на элемент гильбертова пространства $\mathcal{H}$ вначале действует оператор с наименьшим аргументом $x_m = \min(x_1, \dots, x_n)$, затем оператор с аргументом $\min(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_m\})$ и т.д. Каждая компонента такого вектора симметрична по своим аргументам: $\phi_n(\dots x_i \dots x_j \dots) = \phi_n(\dots x_j \dots x_i \dots)$ при $\forall n, 1 \leq i < j \leq n$.

Получим в явном виде выражение для действия оператора $U(t)$ на упорядоченный когерентный вектор $\psi_{\mathcal{N}}(h)$ с аргументом

$$h(x) = h_0(x) + h_1(x) I_{(-T, 0)}(x), \quad (9)$$

где $h_0(x)$ – числовая функция, $h_1(x)$ – ограниченная при любом x операторозначная функция со значениями в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T > 0$. Такой вид начального состояния выбран с целью возможности проверки группового свойства разрешающего оператора. Пусть

$$\begin{aligned} \hat{R} &= (1 - e^{-iK})(iK)^{-1} R, & \hat{R}_2 &= R^* (\exp\{iK\} - iK - 1)(iK)^{-2} R, \\ W^t(x) &= L^t(t) h(x+t) L_-^t(t) I_{\mathbb{R} \setminus (-t, 0)}(x) + V(x, t), \\ V(x, t) &= L^t(-x) e^{iK} (h(x+t) + i\hat{R}) L_-^t(-x) I_{(-t, 0)}(x), \\ L^t(z) &= \overleftarrow{\exp} \left\{ i \int_{t-z}^t d\tau (H_0 + i\hat{R}_2 + h(\tau) \hat{R}^*) \right\}, & L_-^t(z) &= (L^t(z))^{-1}. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Предельный разрешающий оператор $U(t)$, являющийся пределом решений уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (2), действует на когерентный вектор вида $\psi_{\mathcal{N}}(h)$, где h – операторозначная функция вида (9), следующим образом:*

$$U(t)\psi(h) = \psi_{\mathcal{N}}(W^t) L^t(t). \quad (10)$$

Семейство операторов $U(t)$ из (10) является унитарным коциклом: $U^\dagger(t) = U^{-1}(t)$, $U(s)U(t) = U(t+s)$, что проверяется непосредственными вычислениями. Вблизи нуля оператор $U(t)$ совпадает с приближенным оператором $U^l(t)$:

$$\|(U(t) - U^l(t))\psi\|_{\mathfrak{H}} = O(t^2),$$

для любых $\psi \in E_\varepsilon^S$, $\|\psi\| = 1$. Зная явный вид предельного разрешающего оператора для уравнения (1), найдем выражение для частичного следа произвольного оператора $B \in \mathcal{H}$ по состоянию окружения. Для произвольного когерентного вектора $\psi(h)$ из E_ε^S рассмотрим частичное среднее в фокковском пространстве, являющееся элементом из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$P_t(B) = (U_t \psi(h), B U_t \psi(h))_{\Gamma^S}. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 4. Функция $P_t(B)$ удовлетворяет уравнению Линдблада

$$\frac{d}{dt} P_t(B) = P_t(\mathcal{L}_t(B)),$$

генератор которого имеет вид $\mathcal{L}_t(B) = \hat{R}_t^* B \hat{R}_t - W_t^* B - B W_t$, где

$$\hat{R}_t = (e^{iK} - 1)(iK)^{-1}R + e^{iK}h(t), \quad W_t = i(H_0 + (\sin K - K)K^{-2}) - \frac{1}{2}\hat{R}_t^* \hat{R}_t.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.М. Чеботарев, Г.В. Рыжаков, *Матем. заметки*, **74**:5 (2003), 762–781.
 [2] A.M. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, Aportaciones Matemáticas: Textos, **14**, Sociedad Matemática Mexicana, Mexico, 2000. [3] А.П. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967. [4] R. L. Hudson, K. R. Parthasarathy, *Comm. Math. Phys.*, **93**:3 (1984), 301–323. [5] K. R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Monographs in Mathematics, **85**, Birkhäuser, Basel, 1992. [6] P.-A. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists*, Lecture Notes in Math., **1538**, Springer-Verlag, Berlin, 1993. [7] A. S. Holevo, *Quantum Probability and Related Topics*, **7**, World Sci. Publ., Singapore, 1992, 175–202. [8] А.С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003.

Г. В. Рыжаков

Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: gryzhakov@mail.ru

Поступило
 15.05.2006