Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Шумилова, О принципе компактности для периодических сингулярных и тонких структур, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 2, 244–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 04:21:29

УДК 517.9

О ПРИНЦИПЕ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНЫХ И ТОНКИХ СТРУКТУР

В. В. Шумилова

Рассматривается принцип компактности в переменном пространстве L^2 , связанном с периодической борелевской мерой. Предполагается, что периодическая борелевская мера задает некоторую периодическую сингулярную или тонкую структуру. Доказан принцип компактности для периодических сингулярных и тонких сеток, ящичных структур, составных структур на плоскости и в пространстве.

Библиография: 7 названий.

Принцип компактности в пространстве L^2 играет большую роль в теории усреднения дифференциальных операторов, в частности, при исследовании поведения спектра оператора при усреднении [1]. В данной работе доказывается принцип компактности в переменном пространстве L^2 для периодических сингулярных и тонких сеток, ящичных структур и составных структур на плоскости и в пространстве. При этом предполагается, что рассматриваемые структуры описываются некоторой периодической борелевской мерой. Такой подход был предложен Жиковым в связи с исследованием задач усреднения на периодических структурах [2], [3].

1. Пусть F – периодическая “сингулярная” структура в $\mathbb{R}^N$, на которой сосредоточена борелевская мера μ , периодическая по каждому переменному $x_1, x_2, \dots, x_N$ и нормированная условием

$$\int_{\Pi} d\mu = 1, \quad \text{где } \Pi = [0, 1)^N \text{ – ячейка периодичности.}$$

Наряду с сингулярной структурой F будем рассматривать аппроксимирующую ее тонкую структуру F^h , характеризующуюся толщиной $2h > 0$. Тонкой структуре соответствует периодическая нормированная борелевская мера μ^h , слабо сходящаяся к мере μ , $\mu^h \rightharpoonup \mu$ при $h \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Pi} \varphi d\mu^h = \int_{\Pi} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\Pi),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00114.

где $C_{\text{reg}}^\infty(\Pi)$ – множество всех бесконечно дифференцируемых периодических функций.

Приведем модельные примеры сингулярных и соответствующих им тонких структур с заданными на них “естественными” мерами.

Сетки. Пусть F – периодическая сетка на плоскости, состоящая из k прямых, $k = 2, 3, 4$, проходящих через начало координат и пересекающихся друг с другом под углом 45° или 90° , и их сдвигов на целочисленные векторы, μ – периодическая нормированная мера, сосредоточенная на F и пропорциональная там линейной мере Лебега. Тогда F^h – объединение бесконечных полос ширины $2h > 0$, симметричных относительно соответствующих прямых сетки F , μ^h – периодическая нормированная мера, сосредоточенная на F^h и пропорциональная там плоской мере Лебега.

Ящичные структуры. Пусть F – периодическая ящичная структура в $\mathbb{R}^3$, состоящая из координатных плоскостей и их сдвигов на целочисленные векторы, μ – периодическая нормированная мера, сосредоточенная на F и пропорциональная там плоской мере Лебега. Тогда F^h – объединение бесконечных плит толщиной $2h > 0$, симметричных относительно соответствующих плоскостей из структуры F , μ^h – периодическая нормированная мера, сосредоточенная на F^h и пропорциональная там пространственной мере Лебега.

Составные структуры на плоскости. Здесь мера μ , равна полусумме плоской меры Лебега и описанной выше естественной меры на сингулярной сетке F , а μ^h – полусумма плоской меры Лебега и естественной меры на тонкой сетке F^h .

Составные структуры в пространстве. Здесь мера μ равна полусумме пространственной меры Лебега и естественной меры на сингулярной ящичной структуре F , а μ^h – полусумма пространственной меры Лебега и естественной меры на тонкой ящичной структуре F^h .

2. При фиксированном $h > 0$ введем меру μ_ε^h равенством

$$\mu_\varepsilon^h(B) = \varepsilon^N \mu^h(\varepsilon^{-1}B) \quad \text{для любого борелевского множества } B \text{ из } \mathbb{R}^N.$$

После этого считаем, что $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Известно [2], что мера μ_ε^h имеет период ε и слабо сходится к мере Лебега: $d\mu_\varepsilon^h \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu_\varepsilon^h = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим последовательность функций $u_{\varepsilon,h}(x)$ из $C_0^\infty(\Omega)$, ограниченных в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, т.е.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_\varepsilon^h < \infty.$$

Тогда слабая сходимость $u_{\varepsilon,h} \rightharpoonup u$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ означает, что $u \in L^2(\Omega)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h} \varphi d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} u \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Сильная сходимость $u_{\varepsilon,h} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ означает, что $u \in L^2(\Omega)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h} v_{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} uv dx \quad \text{как только} \quad v_{\varepsilon,h} \rightharpoonup v.$$

Нам понадобятся следующие свойства слабой и сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ [2], [3]:

- (i) любая последовательность, ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, компактна в смысле слабой сходимости;
- (ii) если $u_{\varepsilon,h} \rightharpoonup u$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_\varepsilon^h \geq \int_{\Omega} u^2 dx,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $u_{\varepsilon,h} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$.

Будем говорить, что имеет место *принцип компактности* (в пространстве $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$), если любая последовательность функций $u_{\varepsilon,h}$, удовлетворяющая условию

$$u_{\varepsilon,h} \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{и} \quad u_{\varepsilon,h}, \nabla u_{\varepsilon,h} \quad \text{ограничены в} \quad L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h), \quad (1)$$

компактна в смысле сильной сходимости в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$.

Имеет место следующая “рабочая” лемма.

ЛЕММА 1. Пусть для любого куба D со стороной d при $\varepsilon \leq \varepsilon_0(d)$ выполнено неравенство Пуанкаре

$$\int_D f^2 d\mu_\varepsilon^h \leq Cd^2 \int_D |\nabla f|^2 d\mu_\varepsilon^h, \quad \int_D f d\mu_\varepsilon^h = 0, \quad f \in C^\infty(\overline{D}), \quad (2)$$

с постоянной C , не зависящей от d и ε . Тогда имеет место принцип компактности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана последовательность $u_{\varepsilon,h}$, удовлетворяющая условию (1). Продолжим функции $u_{\varepsilon,h}$ нулем на $\mathbb{R}^N$. Так как последовательность $u_{\varepsilon,h}$ ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, то без ограничения общности можно считать, что $u_{\varepsilon,h} \rightharpoonup u$, $u \in L^2(\Omega)$. Разобьем пространство $\mathbb{R}^N$ на полукоткрытые кубы $[0, \delta)^N + \delta n$, где n — целочисленный вектор, и обозначим отдельный куб, принадлежащий Ω , символом $\delta\Pi_j$. Тогда

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2(x) d\mu_\varepsilon^h = \sum \int_{\delta\Pi_j} u_{\varepsilon,h}^2(x) d\mu_\varepsilon^h.$$

Из неравенства Пуанкаре (2) получаем, что для $\varepsilon \leq \varepsilon_0(\delta)$

$$\begin{aligned} \int_{\delta\Pi_j} (u_{\varepsilon,h}(x) - c_j^{\varepsilon,h})^2 d\mu_\varepsilon^h &\leq C\delta^2 \int_{\delta\Pi_j} |\nabla u_{\varepsilon,h}(x)|^2 d\mu_\varepsilon^h, \\ c_j^{\varepsilon,h} &= \frac{1}{p_j^{\varepsilon,h}} \int_{\delta\Pi_j} u_{\varepsilon,h}(x) d\mu_\varepsilon^h, \quad p_j^{\varepsilon,h} = \int_{\delta\Pi_j} d\mu_\varepsilon^h, \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от ε и δ . Раскрывая скобки в последнем неравенстве, для каждого куба $\delta\Pi_j$ имеем

$$\int_{\delta\Pi_j} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_\varepsilon^h = \frac{1}{p_{j,\varepsilon,h}} \left(\int_{\delta\Pi_j} u_{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h \right)^2 + C\delta^2 \int_{\delta\Pi_j} |\nabla u_{\varepsilon,h}|^2 d\mu_\varepsilon^h.$$

Складывая полученные неравенства по всем кубам $\delta\Pi_j$, лежащим в Ω , находим

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_\varepsilon^h \leq \sum \frac{1}{p_{j,\varepsilon,h}} \left(\int_{\delta\Pi_j} u_{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h \right)^2 + C\delta^2 \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon,h}|^2 d\mu_\varepsilon^h$$

или, учитывая ограниченность $\nabla u_{\varepsilon,h}$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$,

$$\int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_\varepsilon^h \leq \sum \frac{1}{p_{j,\varepsilon,h}} \left(\int_{\delta\Pi_j} u_{\varepsilon,h} d\mu_\varepsilon^h \right)^2 + C_1\delta^2,$$

где постоянная C_1 также не зависит от ε и δ . Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_\varepsilon^h \leq \sum \frac{1}{\delta^N} \left(\int_{\delta\Pi_j} u dx \right)^2 + C_1\delta^2,$$

откуда по неравенству Коши–Буняковского

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_\varepsilon^h \leq \int_{\Omega} u^2 dx + C_1\delta^2.$$

Так как δ произвольно, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} u^2 dx,$$

поэтому $u_{\varepsilon,h} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ и лемма доказана.

С помощью леммы 1 докажем принцип компактности для мер специального вида, введенных Жиковым в качестве обобщения канторовой сетки. Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 2. Пусть m_1, m_2 – ненулевые неотрицательные меры на отрезке $I = [0, d]$ и $m_1(I) \leq m_2(I)$. Тогда для меры

$$dm = dm_1(x_1) \times dx_2 + dx_1 \times dm_2(x_2), \quad (3)$$

заданной на квадрате $D = [0, d]^2$, выполнено неравенство Пуанкаре

$$\int_D f^2 dm \leq \frac{2d^2 m_2(I)}{m_1(I)} \int_D |\nabla f|^2 dm, \quad \int_D f dm = 0, \quad f \in C^\infty(\overline{D}). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем точку x , принадлежащую носителю меры $dv_1 = dm_1(x_1) \times dx_2$, и точку x' , принадлежащую носителю меры $dv_2 = dx_1 \times dm_2(x_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &\leq \int_T |\nabla f| dx_1 + \int_{T'} |\nabla f| dx'_2, \\ f^2(x) - 2f(x)f(x') + f^2(x') &\leq 2d \left[\int_T |\nabla f|^2 dx_1 + \int_{T'} |\nabla f|^2 dx'_2 \right], \end{aligned}$$

где T – вертикальное сечение, проходящее через точку x , T' – горизонтальное сечение, проходящее через точку x' . Последнее неравенство интегрируем по x и мере dv_1 , а затем по x' и мере dv_2 . В результате получаем

$$\begin{aligned} v_2(D) \int_D f^2 dv_1 + v_1(D) \int_D f^2 dv_2 \\ \leq 2 \int_D f dv_1 \int_D f dv_2 + 2d^2 \left(v_2(D) \int_D |\nabla f|^2 dv_1 + v_1(D) \int_D |\nabla f|^2 dv_2 \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $2ab \leq (a+b)^2$, из последнего неравенства следует неравенство Пуанкаре (4). Лемма доказана.

Важно отметить, что если в (3) взять меры m_1 и m_2 зависящими от h , то неравенство (4) остается справедливым и для меры m , зависящей от h , $m = m^h$.

Из лемм 1 и 2 непосредственно следует принцип компактности для мер специального вида на плоскости [4]. А именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если периодическая нормированная мера m^h имеет специальный вид*

$$dm^h = dm_1^h(x_1) \times dx_2 + dx_1 \times dm_2^h(x_2),$$

где меры m_1^h и m_2^h слабо сходятся при $h \rightarrow 0$ к ненулевым мерам, то имеет место принцип компактности.

Нетрудно проверить, что аналогичный результат справедлив также и для меры, заданной в пространстве: если периодическая нормированная мера m^h имеет специальный вид

$$dm^h = dm_1^h(x_1) \times dx_2 \times dx_3 + dx_1 \times dm_2^h(x_2) \times dx_3 + dx_1 \times dx_2 \times dm_3^h(x_3),$$

где меры m_1^h , m_2^h и m_3^h слабо сходятся при $h \rightarrow 0$ к ненулевым мерам, то имеет место принцип компактности.

Из принципа компактности для специальных мер непосредственно получаем принцип компактности для следующих периодических структур:

- 1) сингулярной квадратной сетки; сетки, состоящей из двух систем параллельных прямых, пересекающихся под углом 45° ; и соответствующих составных структур на плоскости;

- 2) сингулярной ящичной структуры и соответствующей составной структуры в пространстве;
- 3) составной структуры на плоскости, содержащей систему параллельных прямых, и составной структуры в пространстве, содержащей систему параллельных плоскостей.

Отметим, что для указанных структур естественная мера не зависит от h , $\mu^h = \mu$. Естественные меры на соответствующих тонких структурах не имеют специального вида (за исключением структур из 3)), но оказываются в определенном смысле близкими к специальной мере. Принцип компактности для этих структур вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. Пусть нормированные меры μ^h и m^h связаны соотношением

$$d\mu^h = c^h dm^h \quad \text{на } \Pi \setminus Q_h,$$

где c^h — постоянная, $c^h \rightarrow 1$ при $h \rightarrow 0$, а Q_h — такое множество, что $\mu^h(Q_h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда из принципа компактности в $L^2(\Omega, dm_\varepsilon^h)$ следует принцип компактности в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$.

3. Во многих случаях меры не имеют специального вида, но представимы в виде суммы специальных мер. При доказательстве принципа компактности для таких мер нам понадобятся некоторые понятия из теории двухмасштабной сходимости, введенной Нгуэтсенгом [5] и развитой в работах Аллэра [6] и Жикова [2], [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $u_{\varepsilon,h}$ слабо двухмасштабно сходится к функции $u(x, y) \in L^2(\Omega \times \Pi)$, $u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_\varepsilon^h = \int_{\Omega} \int_{\Pi} u(x, y) \varphi(x) b(y) dx d\mu$$

для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\Pi)$.

Перечислим некоторые свойства слабой двухмасштабной сходимости [2]:

- (i) любая последовательность, ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, компактна в смысле слабой двухмасштабной сходимости;
- (ii) если $u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, то

$$u_{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup \int_{\Pi} u(x, y) d\mu \quad \text{в } L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h).$$

Кроме того, в работах [3], [7] показано, что при определенных условиях, налагаемых на меры μ и μ^h , в частности, выполненных для всех описанных выше модельных структур, имеет место следующее свойство двухмасштабной сходимости:

- (iii) если $u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$ и последовательность $u_{\varepsilon,h}$ удовлетворяет условию (1), то функция $u(x, y)$ не зависит от y , $u(x, y) = u(x)$.

Справедлива следующая

ЛЕММА 4. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- 1) $\mu^h = \mu_1^h + \mu_2^h$ и $\mu_1^h \rightharpoonup \mu_1$, $\mu_2^h \rightharpoonup \mu_2$ при $h \rightarrow 0$;
- 2) *меры μ_1 и μ_2 взаимно сингулярны.*

Тогда, если $u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} u(x)$, то (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u_{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \text{в} \quad L^2(\Omega, d\mu_{1\varepsilon}^h), \quad u_{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \text{в} \quad L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательность $u_{\varepsilon,h}$ ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$, то (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u_{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup u_1(x) \quad \text{в} \quad L^2(\Omega, d\mu_{1\varepsilon}^h), \quad u_{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup u_2(x) \quad \text{в} \quad L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h)$$

и $u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} v_1(x, y)$ (в смысле меры μ_1^h), $u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} v_2(x, y)$ (в смысле меры μ_2^h).

Далее, так как для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) d\mu_{\varepsilon}^h &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) d\mu_{1\varepsilon}^h + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) d\mu_{2\varepsilon}^h \\ &= \mu_1(\Pi) \int_{\Omega} u_1(x) \varphi(x) dx + \mu_2(\Pi) \int_{\Omega} u_2(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

то

$$u_{\varepsilon,h}(x) \rightharpoonup \mu_1(\Pi) u_1(x) + \mu_2(\Pi) u_2(x) \quad \text{в} \quad L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h). \quad (5)$$

С другой стороны, для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\Pi)$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_{\varepsilon}^h \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_{1\varepsilon}^h + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}(x) \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) d\mu_{2\varepsilon}^h \\ = \int_{\Omega} \int_{\Pi} v_1(x, y) \varphi(x) b(y) dx d\mu_1 + \int_{\Omega} \int_{\Pi} v_2(x, y) \varphi(x) b(y) dx d\mu_2, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} \chi_1(y) v_1(x, y) + \chi_2(y) v_2(x, y), \quad (6)$$

где $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ – характеристические функции носителей мер μ_1 и μ_2 . Сравнивая правые части (5) и (6) и учитывая свойство (ii) двухмасштабной сходимости, нетрудно получить, что $u_1 = u_2 = u$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия 1), 2) леммы 4 и свойство (iii) двухмасштабной сходимости. Тогда из принципа компактности в $L^2(\Omega, d\mu_{1\varepsilon}^h)$ и $L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h)$ следует принцип компактности в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана последовательность $u_{\varepsilon, h}$, удовлетворяющая условию (1). Согласно лемме 4 без ограничения общности можно считать, что

$$u_{\varepsilon, h} \rightarrow u \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{1\varepsilon}^h), \quad u_{\varepsilon, h} \rightarrow u \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h).$$

Далее, так как $u_{\varepsilon, h} \rightharpoonup u$ и

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon, h}^2 d\mu_{\varepsilon}^h &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon, h}^2 d\mu_{1\varepsilon}^h + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon, h}^2 d\mu_{2\varepsilon}^h \\ &= (\mu_1(\Pi) + \mu_2(\Pi)) \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} u^2 dx, \end{aligned}$$

то $u_{\varepsilon, h} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 получаем принцип компактности для следующих периодических модельных структур:

- 4) сингулярной сетки, состоящей из четырех систем параллельных прямых, и соответствующей составной структуры на плоскости;
- 5) составной структуры на плоскости, которая содержит сингулярную сетку, состоящую из трех систем параллельных прямых.

Для тонких структур, соответствующих этим структурам, принцип компактности следует из теоремы 2 и леммы 3, поскольку естественные меры на них близки к сумме специальных мер.

4. Для доказательства принципа компактности для некоторых мер, не удовлетворяющих условиям теоремы 2, нам понадобится следующая

ЛЕММА 5. Если выполнено условие 1) из леммы 4 и $u_{\varepsilon, h} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$, то (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u_{\varepsilon, h} \rightarrow u \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{1\varepsilon}^h), \quad u_{\varepsilon, h} \rightarrow u \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как последовательность $u_{\varepsilon, h}$ ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_{1\varepsilon}^h)$ и $L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h)$, то (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u_{\varepsilon, h} \rightharpoonup u_1 \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{1\varepsilon}^h), \quad u_{\varepsilon, h} \rightharpoonup u_2 \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h).$$

Тогда $u = \mu_1(\Pi)u_1 + \mu_2(\Pi)u_2$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon, h}^2 d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} [\mu_1(\Pi)u_1 + \mu_2(\Pi)u_2]^2 dx. \quad (7)$$

С другой стороны,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon, h}^2 d\mu_{1\varepsilon}^h \geq \mu_1(\Pi) \int_{\Omega} u_1^2 dx, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon, h}^2 d\mu_{2\varepsilon}^h \geq \mu_2(\Pi) \int_{\Omega} u_2^2 dx,$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_{\varepsilon}^h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_{1\varepsilon}^h + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_{2\varepsilon}^h \geq \int_{\Omega} [\mu_1(\Pi)u_1^2 + \mu_2(\Pi)u_2^2] dx. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), получаем

$$\int_{\Omega} [\mu_1(\Pi)u_1 + \mu_2(\Pi)u_2]^2 dx \geq \int_{\Omega} [\mu_1(\Pi)u_1^2 + \mu_2(\Pi)u_2^2] dx.$$

Так как $\mu_1(\Pi) + \mu_2(\Pi) = 1$, то из последнего неравенства нетрудно получить, что $u_1 = u_2 = u$, поэтому утверждение леммы сразу следует из соотношения (8).

С помощью леммы 5 доказывается следующая

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- 1) $\mu^h = \mu_1^h + \mu_2^h + \mu_3^h$, $\mu_i^h \rightarrow \mu_i$ при $h \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$;
- 2) $\lambda_1^h = \mu_1^h + \mu_2^h$, $\lambda_2^h = \mu_2^h + \mu_3^h$.

Тогда из принципа компактности в $L^2(\Omega, d\lambda_{1\varepsilon}^h)$ и $L^2(\Omega, d\lambda_{2\varepsilon}^h)$ следует принцип компактности в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана последовательность $u_{\varepsilon,h}$, удовлетворяющая условию (1). Без ограничения общности можно считать, что

$$u_{\varepsilon,h} \rightarrow u_1 \text{ в } L^2(\Omega, d\lambda_{1\varepsilon}^h), \quad u_{\varepsilon,h} \rightarrow u_2 \text{ в } L^2(\Omega, d\lambda_{2\varepsilon}^h),$$

а также в силу леммы 5

$$u_{\varepsilon,h} \rightarrow u_1 \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{1\varepsilon}^h), \quad u_{\varepsilon,h} \rightarrow u_1 \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h)$$

и

$$u_{\varepsilon,h} \rightarrow u_2 \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{2\varepsilon}^h), \quad u_{\varepsilon,h} \rightarrow u_2 \text{ в } L^2(\Omega, d\mu_{3\varepsilon}^h).$$

Отсюда получаем, что $u_1 = u_2 = u$ и $u_{\varepsilon,h} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$. Кроме того, так как

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_{\varepsilon}^h &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_{1\varepsilon}^h + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_{2\varepsilon}^h + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon,h}^2 d\mu_{3\varepsilon}^h \\ &= \mu_1(\Pi) \int_{\Omega} u^2 dx + \mu_2(\Pi) \int_{\Omega} u^2 dx + \mu_3(\Pi) \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} u^2 dx, \end{aligned}$$

то $u_{\varepsilon,h} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$, что и требовалось доказать.

С помощью теоремы 3 принцип компактности доказывается для периодической модельной сетки, состоящей из трех систем параллельных прямых, а с помощью леммы 3 и теоремы 3 – для соответствующей тонкой сетки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
- [2] Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 81–148.
- [3] Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
- [4] Шумилова В. В. О поведении собственных значений оператора с двумя малыми параметрами при усреднении // Материалы VII ВНТК “Современные проблемы математики и естествознания”. Н. Новгород: НГТУ, 2003. С. 22–23.
- [5] Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
- [6] Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
- [7] Шумилова В. В. Некоторые вопросы усреднения задач Дирихле с двумя малыми параметрами // Материалы VIII ВНТК “Современные проблемы математики и естествознания”. Н. Новгород: НГТУ, 2004. С. 23–24.

Муромский институт (филиал)
Владимирского государственного университета
E-mail: electron@mivlgu.murom.ru

Поступило
20.05.2004