Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Несколько замечаний о вариационных принципах, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 2, 305–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2839>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:42:11

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ

А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров

Введение. Прошло двадцать лет со дня появления вариационного принципа Экланда [1], оказавшегося сильным и удобным инструментом нелинейного анализа. Вместе с двумя его наиболее известными модификациями, предложенными Борвейном и Прайсом [2] и ДеВиллем [3] (см. также [5]), принцип Экланда лег в основу новой техники, эффективно работающей в разнообразных ситуациях, позволившей доказать много новых и усилить ряд известных результатов в разнообразных областях анализа, геометрии, теории экстремума, теории Люстерника–Шнирельмана, теории Гамильтона–Якоби и др.

Вариационными принципами называют группу результатов, показывающих, что полунепрерывную снизу и ограниченную снизу функцию на полном метрическом пространстве можно произвольно мало возмутить так, что возмущенная функция будет иметь абсолютный (и даже строгий) минимум.

Непрерывную функцию $\varphi_{x,\alpha}(\cdot)$ ($\alpha > 0$), заданную на метрическом пространстве (X, d) назовем *холм-функцией* (от *bump-function*), сосредоточенной на $B(x, \alpha) := \{u \in X \mid d(x, u) \leq \alpha\}$, если $\varphi_{x,\alpha}(x) = 1$. Она ограничена, неотрицательна на $B(x, \alpha)$ и неположительна вне этого шара.

Вот формулировки вариационных принципов Экланда, Борвейна–Прайса и ДеВилля.

Принцип Экланда [1]. Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, f – полунепрерывная снизу и ограниченная снизу функция на X , причем $f(w) \leq \inf f + \varepsilon$.

Тогда для любого $\lambda > 0$ существует элемент x_* , для которого

- (a) $f(x_*) \leq f(w)$,
- (b) $d(w, x_*) \leq \lambda$,
- (c) $f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_*) > f(x_*) \quad \forall x \neq x_*$ (т.е. возмущенная функция $f(\cdot) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\cdot, x_*)$ достигает строгого абсолютного минимума в точке x_*).

Принцип Борвейна–Прайса [2]. Если в предыдущих условиях X – банахово пространство, то $\forall \lambda > 0, p \geq 1$ и любой последовательности

$$\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n = 1$$

существует последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, сходящаяся к x_* , и при этом

- (a) $f(x_*) \leq f(w)$,
- (b) $d(w, x_*) \leq \lambda$,
- (c) функция

$$f(\cdot) + \varepsilon \lambda^{-p} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \|\cdot - x_n\|^p$$

достигает абсолютного минимума в x_* .

Принцип ДеВилля [3], [4] (см. также [5]). Пусть X – банахово пространство, в котором существует некоторая дифференцируемая по Фреше холм-функция $\varphi(\cdot)$. Пусть $\mathcal{F}$ – банахово пространство ограниченных на X функций с топологией не слабее топологии равномерной сходимости, содержащее холм-функции вида $\varphi(\lambda \cdot + a)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in X$).

Тогда множество функций $g \in \mathcal{F}$, обладающих тем свойством, что $f + g$ достигают строгого абсолютного минимума в некоторой точке, есть плотное G_δ -подмножество $\mathcal{F}$.

Вопреки распространенному мнению все три принципа являются независимыми и не следуют один из другого. Дело не только в разных требованиях на пространство: ниже мы приводим метрические обобщения принципов Борвейна–Прайса и ДеВилля. Принцип Борвейна–Прайса (в отличие от принципа Экланда) не гарантирует, что возмущенная функция имеет строгий минимум, а принцип ДеВилля (в отличие от первых двух) не позволяет локализовать точку абсолютного минимума с той же точностью.

Естественно попытаться понять единую суть всех трех вариационных принципов и найти объединяющую их формулировку. В данной статье мы решаем эту задачу почти полностью. Основной результат, доказываемый далее – это “конструктивный” вариационный принцип, обобщающий принцип Борвейна–Прайса. Из него следует (в существенном) и принцип Экланда.

Само же наше доказательство (как и доказательство теоремы 1) фактически навеяно основным мотивом доказательства принципа ДеВилля – холм-функциями.

Мы показываем связи конструктивного вариационного принципа с принципами Экланда и Борвейна–Прайса, доказываем метрический вариант принципа ДеВилля и в заключение обсуждаем связи между итерационными принципами Ньютона–Люстерника–Грейвса и вариационными принципами. Существует большая группа теорем (типа теорем о накрытиях и регулярности), к доказательству которых применялись и итерационные методы и вариационные принципы. В заключение статьи мы объясняем, что теоремы существования, получаемые итерационными процедурами, следуют также из принципа Экланда.

1. Конструктивный вариационный принцип. Мы начнем с формулировки простого результата, чье доказательство на наш взгляд весьма красноречиво и просто объясняет то, что лежит в основе вариационных принципов.

Назовем семейство холм-функций Φ *полным*, если для любого $x \in X$ и любого $\alpha > 0$ множество Φ содержит холм-функцию $\varphi_{x,\alpha}(\cdot)$, сосредоточенную на $B(x, \alpha)$ такую, что для любого фиксированного x эти функции непрерывны по α равномерно на каждом шаре с центром x (это означает, что $\varphi_{x,\alpha'}(u) \rightarrow \varphi_{x,\alpha}(u)$ равномерно на шаре), и семейство функций $\{\varphi_{x,\alpha}(\cdot)\}$, где $\{(x, \alpha)\}$ пробегает ограниченное множество в $X \times \mathbb{R}_+$, равномерно ограничено на любом ограниченном множестве X .

Очевидный пример такого семейства $\varphi_{x,\alpha}(\cdot) = 1 - \alpha^{-1}d(\cdot, x)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, Φ – полное семейство холм-функций на X , f – полунепрерывная снизу на X , неотрицательная функция и при этом существуют $w \in X$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $f(w) \leq \varepsilon$.

Тогда для любого $\lambda > 0$ существует число $0 < \alpha_* < 1$ такое, что для любых последовательностей $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ положительных чисел, удовлетворяющих

условиям

$$\alpha_0 \leq \lambda \alpha_*, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \leq \lambda, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \leq 1,$$

существует последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, $x_n \in X$, сходящаяся к $x_* \in X$, такая, что

- (a) $d(x_n, w) \leq \lambda$,
- (b) $f(x_n) \leq f(w)$,
- (c) существует последовательность $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ такая, что $0 \leq \gamma_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, и при этом функция

$$g(\cdot) = f(\cdot) - \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \gamma_n \varphi_n(\cdot)$$

достигает абсолютного минимума в точке x_* (где мы положили $\varphi_n(\cdot) = \varphi_{x_n, \alpha_n}(\cdot)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $\lambda = 1$, которого всегда можно достичь, заменяя $d(\cdot, \cdot)$ на $\lambda d(\cdot, \cdot)$. Положим $x_0 := w$, $\varphi_0(\cdot) := \varphi_{x_0, \alpha_0}(\cdot)$,

$$\gamma_0 := \sup\{\gamma \geq 0 \mid f(u) - \varepsilon \gamma \varphi_0(u) \geq 0 \quad \forall u\}.$$

Если $\gamma_0 = 1$, то, положив для $n \geq 1$ $\gamma_n = 0$, получаем утверждение теоремы.

Пусть $\gamma_0 < 1$. Функция $f_1 := f - \varepsilon \gamma_0 \varphi_0$, очевидно, также неотрицательна, полунепрерывна снизу и нижняя грань этой функции на шаре $B(x_0, \alpha_0)$ равна нулю. Если эта нижняя грань достигается в некоторой точке x_* , то снова получается утверждение теоремы. Если же нижняя грань не достигается, то найдется точка $x_1 \in B(x_0, \alpha_0)$, в которой $f_1(x_1) \leq \varepsilon \beta_1$, и мы можем повторить всю конструкцию, заменив f на f_1 , ε на $\varepsilon \beta_1$, α_0 на α_1 , w на x_1 и φ_0 на φ_1 . В итоге получим $x_2 \in B(x_1, \alpha_1)$, затем $x_3 \in B(x_2, \alpha_2)$ и т.д. Последовательность $\{x_n\}$ – последовательность Коши. В силу полноты X она сходится к некоторому элементу x_* , а так как по построению $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha_n$, получаем утверждение (a) теоремы. Из того, что $f_n(x_n) \leq \varepsilon \beta_n$ и функция f полунепрерывна снизу, вытекает, что $g(x_*) = 0$, а вместе с тем g по построению неотрицательна. Значит, выполнены утверждения (b) и (c) теоремы.

Несколько более сложные рассуждения, чем в теореме 1 позволяют доказать следующий основной результат.

Зафиксировав w , положим

$$r_\Phi := \sup\{\varphi_{x, \alpha}(u) \mid u \in B(w, 1), x \in B(w, 1), \alpha \leq 1\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, f – полунепрерывная снизу, ограниченная снизу на X функция. Пусть Φ – полное семейство холм-функций на X и $\varepsilon > 0$ таковы, что $f(w) \leq \inf f + \varepsilon$. Тогда для любого $\lambda > 0$

- либо функция $f - \varphi_{w, \lambda}$ достигает абсолютного минимума в w ,
- либо существуют числа $1 > \alpha_* > \beta_* > 0$ такие, что для любых последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ положительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_0 \leq \lambda \alpha_*, \quad \beta_0 \leq \beta_*, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \leq \lambda, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \leq 1,$$

существуют $x_* \in X$ и сходящаяся к x_* последовательность $\{x_n\} \in X$ такие, что

- (а) $d(x_*, w) \leq \lambda$,
- (б) $f(x_*) \leq f(w) + \varepsilon(r_\Phi - 1)$,
- (с) функция

$$g(\cdot) = f(\cdot) - \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \varphi_n(\cdot)$$

достигает абсолютного минимума в точке x_* (где мы снова положили $\varphi_n(\cdot) = \varphi_{x_n, \alpha_n}(\cdot)$).

СЛЕДСТВИЕ 1. В предположениях теоремы для любого $\lambda > 0$ и $p \geq 1$ существует $\mu_* \in [0, 1]$ такое, что для любой последовательности $\{\mu_n\}$ положительных чисел таких, что

$$\mu_* \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \leq 1,$$

существуют x_* и последовательность $\{u_n\}$, сходящаяся к x_* такие, что

- (а) $d(u_n, w) \leq \lambda$,
- (б) $f(x_*) \leq f(w)$,
- (с) функция

$$\overline{g}(\cdot) = f(\cdot) + \varepsilon \lambda^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n d^p(\cdot, u_n)$$

достигает абсолютного минимума в точке x_* .

Более того, если $f(\cdot) + \varepsilon \lambda^{-p}(d^p(\cdot, w) - 1)$ не достигает абсолютного минимума в w , тогда μ_* можно выбрать строго меньшим, чем единица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $\varphi_{x, \alpha}(\cdot) = 1 - \alpha^{-p} d^p(\cdot, x)$, $x \in X$, $\alpha > 0$, образуют полное семейство холм-функций с $r_\Phi = 1$. Если $f - \varepsilon \lambda^{-p} \varphi_{w, 1}$ достигает абсолютного минимума в w , мы получим (а)–(с), положив $u_n = w$, $\mu_n = 1$ для всех n . В ином случае выберем $1 > \alpha_* \gg 0$ в соответствии с теоремой. Разумеется, можно выбрать их так, чтобы $\alpha_*^p > \beta_*$. Выберем $\mu_* \in (\beta_* \alpha_*^{-p}, 1)$ и последовательность $\{\mu_n\}$, удовлетворяющую условиям. Пусть, далее, число N выбрано столь большим, чтобы

$$\sum_{n=0}^N \mu_n \leq \beta_* \alpha_*^{-p}.$$

Выбрав последовательность $\{\alpha_n\}$ положительных чисел так, чтобы $\alpha_0 = \lambda\alpha_*$ и $\sum \alpha_n \leq 1$, положим

$$\beta_0 = \alpha_0^p \sum_{n=0}^N \mu_n, \quad \beta_n = \alpha_n^p \sum_{n=0}^N \mu_{N+n}.$$

Теперь можно применить теорему для этих α_n и β_n и найти x_* и последовательность x_n , сходящуюся к x_* и удовлетворяющую свойствам (а)–(с) теоремы. Если теперь положить u_n равным x_0 при $n = 0, \dots, N$ и $x_N - n$ при $n > N$, мы получим, что соотношения (а)–(б) тривиально выполняются для u_n , а из соответствующей части теоремы (с учетом того, что $r_\Phi = 1$) почти автоматически выводится и (с).

Следствие 1 представляет собой метрическое обобщение принципа Борвейна–Прайса. Нов в одном отношении оно идет дальше: заключительное утверждение следствия (определяемая им свобода выбора μ_n) есть связующее звено между конструктивным принципом и принципом Экланда.

Действительно, утверждения принципа Экланда (с ' $<$ ' замененным на ' $\leq$ ') следуют из следствия 1 сразу: достаточно взять $\varphi_{x,\alpha}(\cdot) = 1 - \alpha^{-1}d(x, \cdot)$.

Если функция $f + \varepsilon\lambda^{-1}d(\cdot, w)$ не достигает абсолютного минимума в w , утверждение (с) также непосредственно вытекает из следствия 1. И лишь если эта функция достигает абсолютного минимума в точке w , в этом единственном случае строгое неравенство в (с) не вытекает непосредственно из следствия 1. Здесь требуется дополнительное рассуждение, являющееся незначительным упрощением доказательства самого принципа Экланда, и мы его не приводим.

2. Обобщение принципа ДеВилля на метрические пространства. Конструктивный принцип предоставляет большую свободу в выборе возмущения функции f , но все же “не дотягивает” до доказательства массивности множества “хороших” возмущающих функций, обеспечиваемого принципом ДеВилля. Нижеследующая теорема обобщает этот принцип на метрические пространства в полном объеме. Доказательство является лишь незначительной модификацией доказательства из [3].

ТЕОРЕМА 3. Пусть (X, d) – полное метрическое пространство и $\mathcal{F}$ – банахово пространство ограниченных непрерывных функций на X таких, что

(а) для любого $g \in \mathcal{F}$ имеет место неравенство

$$\|g\|_{\mathcal{F}} \geq \|g\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |g(x)|;$$

(б) существует полное семейство Φ холм-функций на X , принадлежащих $\mathcal{F}$.

Пусть, далее, f – собственная, полунепрерывная снизу на X функция, ограниченная снизу. Тогда множество функций $g \in \mathcal{F}$, обладающих тем свойством, что $f+g$ достигают абсолютного минимума в одной точке, есть плотное G_δ -подмножество $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого n множество

$$U_n = \left\{ g \in \mathcal{F} \mid \exists z : (f+g)(z) < \inf \left\{ (f+g)(x) \mid d(x, z) \geq \frac{1}{n} \right\} \right\}$$

открыто в силу (а). Легко показывается с помощью (b), что U_n плотно в $\mathcal{F}$.

Отсюда следует, что $G = \bigcap U_n$ — плотное G_δ -подмножество $\mathcal{F}$, и для любого $g \in G$ существует последовательность x_n такая, что

$$(f + g)(x_n) < \inf \left\{ (f + g)(x) \mid d(x, x_n) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Ясно, что для $m > n$ мы будем иметь $d(x_m, x_n) < 1/n$, ибо иначе удовлетворялись бы неравенства $(f + g)(x_m) > (f + g)(x_n)$ и $(f + g)(x_m) < (f + g)(x_n)$. Значит, $\{x_n\}$ — последовательность Коши, сходящаяся к некоторому x_* . Но тогда для любого $x \neq x_*$ получим, взяв ε и m так, чтобы удовлетворялось неравенство $\frac{1}{2}d(x, x_*) > \varepsilon > 1/m$,

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) \leq (f + g)(x_m) \\ &< \inf \left\{ (f + g)(u) \mid d(u, x_m) \geq \frac{1}{m} \right\} \leq (f + g)(x). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. В допущениях теоремы 2 для любой последовательности $\{f_n\}$ собственных полунепрерывных снизу, ограниченных снизу функций и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in \mathcal{F}$ с нормой, меньшей чем ε , такая, что для любого n функция $f_n + g$ достигает строгого глобального минимума на X .

3. Итерационные принципы Ньютона–Люстерника–Грейвса и принцип Экланда.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (X, d_X) — полное метрическое, а (Y, d_Y) — метрическое пространство, в которых заданы точки $x_0 \in X$, $y \in Y$, F — замкнутое многозначное отображение из X в Y , $r > 0$ и $M: B_X(x_0, r) \rightarrow X$ — отображение, обладающее для некоторого положительного $\theta < 1$ следующими свойствами: $d_Y(y, F(x_0)) \leq (1 - \theta)r$ и либо

$$(a) \quad d_X(x, M(x)) \leq d_Y(y, F(x)), \quad d(y, F(M(x))) \leq \theta d_X(x, M(x)) \quad \forall x \in B_X(x_0, r),$$

либо

$$(b) \quad d_X(x, M(x)) \leq d_Y(y, F(x)), \quad d_Y(y, F(M(x))) \leq \theta d_Y(y, F(x)) \quad \forall x \in B_X(x_0, r).$$

Тогда включение $y \in F(x)$ имеет решение x_* и, более того, x_* есть предел последовательности $\{x_k\}$, получаемой простой итерацией отображения M : $x_{k+1} = M(x_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, начиная с точки x_0 .

Доказательство этой теоремы очень просто, и мы его не приводим. Сам по себе общий итеративный принцип решения уравнений восходит, по-видимому, к Ньютону. В бесконечномерном случае подобные конструкции применяли Люстерник, Грейвс (для доказательства вариантов теоремы о неявной функции), Канторович и многие другие. Многие подобные результаты непосредственно следуют из теоремы 4 (в частности, теорема Дмитрука–Милютин–Осмоловского из [4]). Покажем, что сама теорема 4 является следствием принципа Экланда.

Действительно, заменив d_X и d_Y на $r^{-1}d_X$ и $r^{-1}d_Y$ соответственно, сведем дело к случаю $r = 1$. Пусть $w = x_0$. Рассмотрим функцию $f(x) = d_Y(y, F(x))$. Из замкнутости F следует, что f полунепрерывна снизу. Очевидно, что она неотрицательна и

$f(w) \leq 1 - \theta$. В силу принципа Экланда, существует x_* с условием $d_X(x_*, w) \leq 1$ такое, что $f(x) + (1 - \theta)d_X(x, x_*) > f(x_*)$, если $x \neq x_*$. Рассмотрим точку $x = M(x_*)$. Из вторых неравенств в условиях (а), (b) теоремы 4 вытекает, что $x_* = M(x_*)$. Тогда

$$\begin{aligned} d_Y(y, F(x_*)) &< d_Y(y, F(M(x_*))) + (1 - \theta)d_X(x_*, M(x_*)) \\ &\leq d_Y(y, F(M(x_*))) + (1 - \theta)d_Y(y, F(x_*)). \end{aligned}$$

В случае (а) имеем $d_Y(y, M(Fx_*)) \leq d_Y(y, F(x_*))$, в случае (b) мы получаем то же неравенство из второго неравенства в (b). В обоих случаях (в предположении $y \notin F(x_*)$) приходим к противоречию: $d_Y(y, F(x_*)) < d_Y(y, F(x_*))$.

Мы получили основное утверждение теоремы 4 (впрочем, не столь конструктивно), а заодно убедились в важности строгого неравенства в утверждении (с) принципа Экланда.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.10.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ekeland I. // J. Math. Anal. Appl. 1974. V. 47. P. 324–325.
2. Borwein J. M., Preiss D. // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 303. P. 517–527.
3. DeVille R. Nouveaux principes variationnelles // Sem. Init. 'a l'Analyse / ed. G. Choquet, G. Godefroy, M. Rogalsky, J. Saint-Rayvond. 30-e Anne'e 1990/91 № 21.
4. Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П. // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 11–46.
5. Ekeland I. // Bull. Amer. Math. Soc. 1979. P. 433–479.