Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Гарункштис, А. П. Лауринчикас, Й. Стеудинг, Приближенное функциональное уравнение для дзета-функции Лерха, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 494–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:16:02

УДК 511

ПРИБЛИЖЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЛЕРХА

Р. Гарункштис, А. Лауринчикас, Й. Стеудинг

В статье доказывается приближенное функциональное уравнение для дзета-функции Лерха, которая является обобщением дзета-функции Римана и дзета-функции Гурвица.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть, как обычно, $s = \sigma + it$, $e(z) = \exp(2\pi iz)$, а $[\lambda]$ и $\{\lambda\}$ означают соответственно целую и дробную часть действительного числа λ .

При $0 < \alpha \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ дзета-функция Лерха $L(\lambda, \alpha, s)$ задается рядом

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(\lambda n)}{(n + \alpha)^s}. \quad (1)$$

Этот ряд абсолютно сходится при $\sigma > 1$. Очевидно, $L(\lambda, \alpha, s) = L(\{\lambda\}, \alpha, s)$, поэтому в дальнейшем будем считать, что $0 < \lambda \leq 1$. Если $0 < \lambda < 1$, то ряд (1) сходится даже при $\sigma > 0$. Кроме того, имеет место функциональное уравнение

$$L(\lambda, \alpha, 1-s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left(e\left(\frac{s}{4} - \alpha\lambda\right) L(-\alpha, \lambda, s) + e\left(-\frac{s}{4} + \alpha(1-\lambda)\right) L(\alpha, 1-\lambda, s) \right), \quad (2)$$

показывающее, что $L(\lambda, \alpha, s)$ – целая функция. Первое доказательство того, что функция $L(\lambda, \alpha, s)$ удовлетворяет этому функциональному уравнению, было дано Лерхом [1].

Если $\lambda = 1$, то дзета-функция Лерха сводится к дзета-функции Гурвица $\zeta(s, \alpha) := L(1, \alpha, s)$, которая может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением простого полюса в точке $s = 1$ и при $\sigma > 0$, если $0 < \alpha < 1$, и $\sigma > 1$, если $\alpha = 1$, удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \zeta(1-s, \alpha) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) & \left(\sin\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n\alpha)}{n^s} \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n\alpha)}{n^s} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Впервые эта формула была доказана Гурвишем [2] (см. также [3]).

При $\alpha = \lambda = 1$ дзета-функция Лерха становится хорошо известной дзета-функцией Римана $\zeta(s) := \zeta(s, 1)$. Мы напомним функциональное уравнение (см., например, [3]), которому удовлетворяет дзета-функция Римана:

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s), \quad (4)$$

где

$$\chi(s) := 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s).$$

В неопубликованных заметках Римана Зигель нашел приближенное функциональное уравнение для $\zeta(s)$ (см. [3]–[5]): пусть $0 \leq \sigma \leq 1$, $m = [\sqrt{t/2\pi}]$ и $N < At$ с некоторой достаточно маленькой константой A . Тогда

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^s} + \chi(s) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{1-s}} + (-1)^{m-1} e^{\pi i(s-1)/2} (2\pi t)^{s/2-1/2} e^{it/2-i\pi/8} \\ & \times \Gamma(1-s) \left(S_N + O\left(\left(\frac{AN}{t}\right)^{N/6}\right) + O(e^{-At}) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$S_N := \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\nu \leq n/2} \frac{n! i^{\nu-n}}{\nu! (n-2\nu)! 2^n} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2-\nu} a_n \psi^{(n-2\nu)}\left(\frac{\eta}{\pi} - 2m\right)$$

с a_n , определенным ниже формулой (10), и

$$\psi(a) := \frac{\cos(\pi(a^2/2 - a - 1/8))}{\cos(\pi a)}. \quad (6)$$

Для дзета-функции Гурвица приближенное функциональное уравнение при $\sigma = 1/2$ было получено Рейном [6].

Отметим, что формулы (2)–(4) объединяются в уравнение

$$L(\lambda, \alpha, 1-s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \left(e\left(\frac{s}{4} - \alpha\lambda\right) L(-\alpha, \lambda, s) + e\left(-\frac{s}{4} + \alpha(1-\{\lambda\})\right) L(\alpha, 1-\{\lambda\}, s) \right). \quad (7)$$

Расширяя эти результаты, в настоящей заметке мы докажем приближенное функциональное уравнение для дзета-функции Лерха.

При $0 < \lambda < 1$, $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ и $0 \leq t \leq \pi\lambda x$ дзета-функция Лерха может быть приближена конечной суммой, см. [7]:

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{0 \leq m \leq x} \frac{e(\lambda n)}{(m + \alpha)^s} + O_{\sigma_0}(x^{-\sigma}). \quad (8)$$

Для приложений последняя сумма часто оказывается слишком длинной. Более точное приближение дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. Пусть $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1$ и $0 \leq \sigma \leq 1$. Пусть $t \geq 1$, $y = (t/(2\pi))^{1/2}$, $q = [y]$, $m = [y - \alpha]$ и $\beta = q - m$. Тогда

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{k=0}^m \frac{e(\lambda k)}{(k + \alpha)^s} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma-1/2+it} e^{it+\pi i/4-2\pi i\{\lambda\}\alpha} \sum_{n=0}^q \frac{e(-\alpha n)}{(n + \lambda)^{1-s}} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma/2} e^{\pi i f(\lambda, \alpha, \sigma, t)} \psi(2y - 2q + \beta - \{\lambda\} - \alpha) + O(t^{(\sigma-2)/2}),$$

где

$$f(\lambda, \alpha, \sigma, t) = -\frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi e} - \frac{7}{8} + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \{\lambda\}^2) - \alpha\beta + 2y(\beta + \{\lambda\} - \alpha) - \frac{1}{2}(q+m) - \{\lambda\}(\beta + \alpha).$$

Отметим, что приближенное функциональное уравнение теоремы имеет место равномерно по α , $0 < \alpha \leq 1$, и λ , $0 < \lambda \leq 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Поскольку $L(\lambda, \alpha, s) = \overline{L(1 - \{\lambda\}, \alpha, \overline{s})}$, легко также получить приближение для $L(\lambda, \alpha, s)$ при отрицательных t . Также отметим, что остаточный член в теореме может быть улучшен и записан в виде формулы (5).

2. Доказательство теоремы. Предположим, что $\sigma > 1$. Тогда ввиду хорошо известной формулы

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+m)z} z^{s-1} dz = \frac{\Gamma(s)}{(\alpha+m)^s}$$

получаем

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{k=0}^m \frac{e(\lambda k)}{(k + s)^s} + \frac{e^{2\pi i\{\lambda\}m}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-(m+\alpha)z}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} z^{s-1} dz.$$

Преобразуем последний интеграл в контурный интеграл как в [6] или [1]. Это дает

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{k=0}^m \frac{e(\lambda k)}{(k + s)^s} + \frac{e^{2\pi i(\{\lambda\}m-s/2)}\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_G \frac{e^{-(m+\alpha)z}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} z^{s-1} dz,$$

где G начинается и кончается в $+\infty$ и обходит начало координат в положительном направлении, при этом не включая нулей функции $e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1$, отличных от $z = 0$, если $\lambda = 1$. Из принципа аналитического продолжения вытекает, что последняя формула имеет место при $\sigma < 2$.

Заменим контур G прямыми G_1, G_2, G_3, G_4 , соединяющими

$$+\infty, c\eta + i\eta(1+c) + 2\pi i\{\lambda\}, -c\eta + i\eta(1-c) + 2\pi i\{\lambda\}, -c\eta - (2q+1)\pi i + 2\pi i\{\lambda\}, +\infty,$$

где $c := 2^{-3/4}$ и $\eta := 2\pi y$. Если y – целое число, нужно сделать небольшой обход над полюсом $z = i\eta + 2\pi i\{\lambda\}$. Вычисляя вычеты, таким же путем, что у Лерха [1], получаем (сокращение iff означает “если и только если”)

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{k=0}^m \frac{e(\lambda k)}{(k + s)^s} - e^{2\pi i(\{\lambda\}m-s/2)}\Gamma(1-s) \sum_{\substack{n=-q \\ n \neq 0 \text{ iff } \lambda=1}}^q \operatorname{Res}_{z=2\pi i(n+\{\lambda\})} \frac{e^{-(m+\alpha)z}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} z^{s-1} + \frac{e^{2\pi i(\{\lambda\}m-s/2)}\Gamma(1-s)}{2\pi i} \left(\int_{G_1} + \int_{G_2} + \int_{G_3} + \int_{G_4} \right) \frac{e^{-(m+\alpha)z}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} z^{s-1} dz. \quad (9)$$

Сначала рассмотрим интегралы. Через A обозначим положительную константу, которая в разных случаях может быть разной. Пусть $z = u + iv = \varrho e^{i\phi}$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Тогда $|z^{s-1}| = \varrho^{\sigma-1} e^{-t\phi}$. На G_4 имеем, что $\phi \geq 5\pi/4$, $\varrho > A\eta$, и $|e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1| > A$. Отсюда, для всякого $\varepsilon > 0$

$$\int_{G_4} \ll \eta^{\sigma-1} e^{-5\pi t/4} \int_{-c\eta}^{\infty} e^{-(m+\alpha)u} du \ll e^{(m+\alpha)c\eta-5\pi t/4} \ll e^{t(c+\varepsilon-5\pi/4)}.$$

Поскольку при $\theta > 0$

$$\operatorname{arctg} \theta = \int_0^\theta \frac{d\mu}{1+\mu^2} > \int_0^\theta \frac{d\mu}{(1+\mu)^2} = \frac{\theta}{1+\theta},$$

то $\operatorname{arctg}(c/(1-c)) > c + A$. Таким образом, при достаточно больших t

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{1-c+2\pi\lambda/\eta}\right) > c + A.$$

Поэтому при $t > t_0 = t_0(c)$ на G_3 имеем, что

$$\phi \geq \frac{1}{2}\pi + \operatorname{arctg} \frac{c}{1-c+2\pi\lambda/\eta} > \frac{1}{2}\pi + c + A.$$

Отсюда,

$$z^{s-1} e^{-(m+\alpha)z} \ll \eta^{\sigma-1} e^{-t(\pi/2+c+A)+mc\eta} \ll \eta^{\sigma-1} e^{-t(\pi/2+A)},$$

и $|e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1| > A$. Следовательно,

$$\int_{G_3} \ll \eta^\sigma e^{-t(\pi/2+A)}.$$

Так как $|e^{z-2\pi i\lambda} - 1| > Ae^u$ на G_1 , то

$$\frac{z^{s-1} e^{-(m+\alpha)z}}{e^{z-2\pi i\lambda} - 1} \ll \eta^{\sigma-1} \exp\left(-t \operatorname{arctg} \frac{(1+c)\eta + 2\pi\{\lambda\}}{u} - (m+1+\alpha)u\right).$$

При $0 < \theta < 1$,

$$\operatorname{arctg} \theta < \int_0^\theta \frac{d\mu}{(1-\mu)^2} = \frac{\theta}{1-\theta},$$

поэтому

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{1+c} < c - A.$$

Значит, для достаточно больших t

$$\operatorname{arctg} \frac{c}{1+c+2\pi c\{\lambda\}/\eta} < c - A.$$

Поскольку $m+1+\alpha \geq y = t/\eta$ и

$$\frac{d}{du} \left(\operatorname{arctg} \frac{(1+c)\eta + 2\pi\{\lambda\}}{u} + \frac{u}{\eta} \right) = -\frac{(1+c)\eta + 2\pi\{\lambda\}}{u^2 + ((1+c)\eta + 2\pi\{\lambda\})^2} + \frac{1}{\eta} > 0,$$

имеем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{(1+c)\eta + 2\pi\{\lambda\}}{u} + \frac{u}{\eta} &\geq \operatorname{arctg} \left(\frac{(1+c)}{c} + \frac{2\pi\{\lambda\}}{\eta} \right) + c \\ &= \frac{\pi}{2} + c - \operatorname{arctg} \frac{c}{1+c+c2\pi\{\lambda\}/\eta} > \frac{1}{2}\pi + A. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{G_1} &\ll \eta^{\sigma-1} \int_0^{\pi\eta} e^{-(\pi/2+A)t} du + \eta^{\sigma-1} \int_{\pi\eta}^{\infty} e^{-xu} du \\ &\ll \eta^{\sigma} e^{-(\pi/2+A)t} + \eta^{\sigma-1} e^{-\pi\eta x} \ll \eta^{\sigma} e^{-(\pi/2+A)t}. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим контур G_2 . Титчмарш в [5, § 4.16], полагая

$$\Psi(z) := \exp \left((s-1) \log \left(1 + \frac{z}{\sqrt{t}} \right) - iz\sqrt{t} + \frac{1}{2}iz^2 \right) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (10)$$

получает, что $a_0 = 1$, $a_n \ll t^{-n/2+[n/3]}$ (не обязательно равномерно по n). Более того, он доказывает, что если

$$r_N(z) := \Psi(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n,$$

то

$$r_N(z) \ll |z|^N \left(\frac{5e}{2N\sqrt{t}} \right)^{N/3} \quad (11)$$

при $N \leq 27t/50$, $|z| \leq 20(2N\sqrt{t}/5)^{1/3}/21$, и следовательно,

$$r_N(z) \ll \exp \left(\frac{14}{29} |z|^2 \right) \quad (12)$$

при $|z| \leq \sqrt{t}/2$. На G_2 имеем

$$\left(\frac{z}{i\eta} \right)^{s-1} e^{-(m+\alpha)z} = e^{g(z)} \Psi \left(\frac{z-i\eta}{i\sqrt{2\pi}} \right),$$

где

$$g(z) := \frac{\eta}{2\pi}(z-i\eta) + \frac{i}{4\pi}(z-i\eta)^2 - (m+\alpha)z.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{G_2} \frac{e^{-(m+\alpha)z}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} z^{s-1} dz &= \int_{G_2} \frac{(i\eta)^{s-1} e^{g(z)}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \left(\frac{z-i\eta}{i(2\pi)^{1/2}} \right)^n dz \\ &+ \int_{G_2} \frac{(i\eta)^{s-1} e^{g(z)}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} r_N \left(\frac{z-i\eta}{i\sqrt{2\pi}} \right) dz =: G_{21} + G_{22}. \end{aligned}$$

Для $z \in G_2$ имеем, что $z = i\eta + 2\pi i\{\lambda\} + \mu e^{\pi i/4}$, где μ — действительное число, $|\mu| \leq \sqrt{2}c\eta$. Тогда

$$e^{g(z)} \ll \exp\left(-\frac{\mu^2}{4\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\{\lambda\}|\mu|\right), \\ (i\eta)^{s-1} \ll \eta^{\sigma-1} e^{-\pi t/2}.$$

Если на G_{22} имеет место неравенство $|e^{z-2\pi i\lambda} - 1| > A$, то в силу (11) и (12) получаем, что для достаточно больших t и фиксированного N

$$G_{22} \ll \eta^{\sigma-1} e^{-\pi t/2} \left(\int_0^{A(N\sqrt{t})^{1/3}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\{\lambda\}|\mu|\right) \left(\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \left(\frac{5e}{2N\sqrt{t}}\right)^{N/3} d\mu \right. \\ \left. + \int_{A(N\sqrt{t})^{1/3}}^{\eta/2} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\{\lambda\}|\mu|\right) + \frac{7\mu^2}{29\pi} \left|1 + \frac{2\pi i\{\lambda\}e^{-\pi i/4}}{\mu}\right|^2 d\mu \right) \\ \ll \eta^{\sigma-1} e^{-\pi t/2} (t^{-N/6} + e^{-At^{2/6}}) \ll \eta^{\sigma-1} e^{-\pi t/2} t^{-N/6}. \quad (13)$$

Если условие $|e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1| > A$ не выполняется (например, если контур проходит слишком близко от полюсов $z = 2\pi i(q + \{\lambda\})$), то тогда его заменяем дугой окружности $|z - 2\pi i(q + \{\lambda\})| = \pi/2$. На этой окружности

$$z = 2\pi i(q + \{\lambda\}) + \frac{1}{2}\pi e^{i\theta}$$

и

$$e^{g(z)} \ll A, \quad r_N \left(\frac{z - i\eta}{i\sqrt{2\pi}} \right) \ll t^{-N/6}.$$

Следовательно, эта часть не превосходит

$$\ll \eta^{\sigma-1} e^{-\pi t/2} t^{-N/6}.$$

Отсюда и из (13) вытекает, что

$$G_{22} \ll \eta^{\sigma-1} e^{-\pi t/2} t^{-N/6}.$$

В интеграле G_{21} контур G_2 заменяем бесконечной прямой G'_2 , частью которой является G_2 . При этом интеграл G_{21} дает погрешность

$$\ll \eta^{\sigma-1} e^{-\pi t/2} \int_{\sqrt{2}c\eta}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu^2}{4\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\{\lambda\}|\mu|\right) \sum_{n=0}^{N-1} t^{-n/2+[n/3]} \left(\frac{2\pi i\lambda + \mu e^{\pi i/4}}{\sqrt{2}\pi}\right)^2 d\mu \\ \ll e^{-\pi(t+A)/2}.$$

Следовательно,

$$G_{21} = (i\eta)^{s-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{i^n (2\pi)^{n/2}} \int_{G'_2} \frac{e^{g(z)}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} (z - i\eta)^n dz + O(e^{-\pi(t+A)/2}).$$

Последний интеграл может быть представлен в таком виде:

$$- \int_L \exp(g(z + 2\pi i(q + \{\lambda\}))) \frac{(z + 2\pi i(q + \{\lambda\}) - i\eta)^n}{e^z - 1} dz,$$

где прямая L проходит между 0 и $2\pi i(1 + \{\lambda\})$ в направлении $\arg z = \pi/4$. Выше упомянутый интеграл равен $n!$, умноженному на коэффициент при ξ^n в выражении

$$\begin{aligned} I &= - \int_L \exp(g(z + 2\pi i(q + \{\lambda\}))) + \xi(z + 2\pi i(q + \{\lambda\}) - i\eta) \frac{dz}{e^z - 1} \\ &= - \exp\left(-i\pi(q + \{\lambda\})^2 + i2\eta(q + \{\lambda\}) - \frac{3}{4} \frac{i\eta^2}{\pi} + i\xi(2\pi(q + \{\lambda\}) - \eta)\right) \\ &\quad \times \int_L \exp\left(\frac{iz^2}{4\pi} + z\left(\frac{\eta}{\pi} - q - \{\lambda\} - m - \alpha + \xi\right)\right) \frac{dz}{e^z - 1}. \end{aligned}$$

Однако в силу [5, §2.10]

$$\int_L \frac{e^{iz^2/(4\pi) + az}}{e^z - 1} dz = -2\pi e^{i\pi(a^2/2 + 3/8)} \psi(a).$$

Отсюда, принимая во внимание равенство

$$\exp i\left(\frac{\pi m^2}{2} - \frac{\pi q^2}{2} + \pi qm\right) = \exp i\left(\frac{\pi\beta}{2} - \pi q\right),$$

после упрощений получаем

$$I = 2\pi G \psi(2y - q' - m' + \xi) \exp\left(\frac{\pi i}{2} \xi^2\right) \exp(\pi i \xi(q' - m'))$$

с

$$\begin{aligned} G &= \exp \pi i \left(-y^2 + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \{\lambda\}^2) - \alpha\beta \right. \\ &\quad \left. + 2y(\beta + \{\lambda\} - \alpha) - \frac{1}{2}(q + m) - \{\lambda\}(q + m + \alpha) \right), \end{aligned}$$

где $q' = q + \{\lambda\}$ и $m' = m + \alpha$. Поэтому коэффициент при ξ^n в I равен

$$2\pi G \sum_{l+2\mu+\nu=n} (l!2^\mu \mu! \nu!)^{-1} \psi^{(l)}(2y - q' - m') (\pi i)^{\mu+\nu} (q' - m')^\nu.$$

Здесь $2y - q' - m' \ll 1$, отсюда $\psi^{(l)}(2y - q' - m') \ll 1$, $l \in \mathbb{N}$, и $q' - m' \ll 1$, значит, коэффициенты имеют оценку $\ll 1$. Теперь полагаем $N = 3$. Поскольку $a_n \ll t^{-n/2}$ при $n = 1, 2$, то

$$\int_{G_2} \frac{e^{-m'z}}{e^{z-2\pi i\{\lambda\}} - 1} z^{s-1} dz = 2\pi G(i\eta)^{s-1} (\psi(2y - q' - m') + O(t^{-1/2})).$$

В силу формулы Стирлинга

$$e^{2\pi i(\{\lambda\}m-s/2)}\Gamma(1-s) = -\sqrt{2\pi}t^{1/2-\sigma-it}\exp\left(\frac{\pi t}{2}+it-\frac{i\pi}{2}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi i}{2}+2\pi i\{\lambda\}m\right)(1+O(t^{-1})),$$

и

$$\frac{e^{2\pi i(\{\lambda\}m-s/2)}\Gamma(1-s)}{2\pi i}2\pi G(i\eta)^{s-1}=\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma/2}e^{\pi i f(\lambda,\alpha,\sigma,t)}(1+O(t^{-1})).$$

Доказательство завершаем вычислением суммы вычетов в (9) и получаем, что

$$\begin{aligned} L(\lambda, \alpha, s) = & \sum_{k=0}^m \frac{e(\lambda k)}{(k+\alpha)^s} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma-1/2+it} e^{it+\pi i/4-2\pi i\{\lambda\}\alpha} \\ & \times \left(\sum_{n=0}^q \frac{e(-\alpha n)}{(n+\lambda)^{1-s}} - e^{\pi i s+2\pi i \alpha} \sum_{n=0}^q \frac{e(\alpha n)}{(n+1-\{\lambda\})^{1-s}} \right) \\ & + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma/2} e^{i f(\lambda,\alpha,\sigma,t)} \psi(2y-2q+\beta-\{\lambda\}-\alpha) + O(t^{(\sigma-2)/2}). \end{aligned}$$

Это должно быть сравнимо с функциональным уравнением для дзета-функций Лерха (7). Третий член правой части последнего равенства дает оценку $\ll e^{-\pi t}$. Следовательно, теорема доказана.

Простое применение приближенного функционального уравнения приводит к оценке $L(\lambda, \alpha, 1/2+it) \ll t^{1/4}$, $t \rightarrow \infty$, в то же время приближение (8) дает лишь оценку $\ll t^{1/2}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lerch M. Note sur la fonction $\mathcal{K}(z, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{2k\pi i x} (z+k)^{-s}$ // Acta Math. 1887. V. 11. P. 19–24.
- [2] Hurwitz A. Einige Eigenschaften der Dirichletschen Funktionen $F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten // Z. Math. Phys. 1887. V. 27. P. 86–101.
- [3] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
- [4] Siegel C. L. Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie // Quellen, Studien, Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B: Studien. 1932. V. 2. P. 45–80.
- [5] Titchmarsh E. C. The Theory of the Riemann Zeta-Function. 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown. Oxford: Oxford University Press, 1986.
- [6] Rane V. V. On the mean square value of Dirichlet L-series // J. London Math. Soc. (2). 1980. V. 21. P. 203–215.
- [7] Garunkštis R., Laurinčikas A. On the Lerch zeta-function // Lith. Math. J. 1996. V. 36. № 4. P. 337–346.

(Гарункштис Р., Лауринчикас А.) Вильнюсский университет,

(Стеудинг Й.) Франкфуртский университет им. И. В. Гёте

E-mail: ramunas.garunkstis@maf.vu.lt, antanas.laurincikas@maf.vu.lt
steuding@math.uni-frankfurt.de

Поступило

30.10.2000