Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, Свойства метрической проекции на множество, слабо выпуклое по Виалю, и параметризация многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 483–489

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:46:46

УДК 517.982.252

СВОЙСТВА МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ НА МНОЖЕСТВО, СЛАБО ВЫПУКЛОЕ ПО ВИАЛЮ, И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СО СЛАБО ВЫПУКЛЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

М. В. Балашов, Г. Е. Иванов

Работа продолжает исследование класса слабо выпуклых (по Виалю) множеств. Для точек, лежащих в достаточно малой окрестности замкнутого слабо выпуклого подмножества гильбертова пространства, доказано существование и единственность метрической проекции на это множество. Иными словами, показано, что замкнутые слабо выпуклые множества обладают чебышевским слоем. Показано, что метрическая проекция точки на слабо выпуклое множество удовлетворяет условию Липшица относительно точки и условию Гёльдера с показателем $1/2$ относительно множества. Рассмотрен метод построения непрерывной параметризации многозначного отображения со слабо выпуклыми значениями. Получена явная оценка модуля непрерывности параметризующей функции.

Библиография: 7 названий.

Работа продолжает исследование класса слабо выпуклых (по Виалю) множеств, начатое в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть заданы число $R \geq 0$ и вектор a в нормированном пространстве E . Через $B_R^E(a)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса R с центром в точке a :

$$B_R^E(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leq R\}.$$

Если ясно, о каком пространстве E идет речь, то вместо $B_R^E(a)$ будем писать $B_R(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть в нормированном пространстве E заданы две точки x_0, x_1 , и пусть задано число $R \geq \|x_1 - x_0\|/2$. Множество

$$D_R(x_0, x_1) = \bigcap_{a \in E: \{x_0, x_1\} \subset B_R(a)} B_R(a)$$

называется *сильно выпуклым отрезком*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00787.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество A в нормированном пространстве называется *слабо выпуклым по Виалю* с константой $R > 0$, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ таких, что $0 < \|x_1 - x_0\| < 2R$, существует точка $x \in D_R(x_0, x_1) \cap A$, не совпадающая с точками x_0 и x_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть E – нормированное пространство. *Расстоянием* от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Через $\pi(x, A)$ обозначим метрическую проекцию точки x на множество A , т.е. такую точку $a \in A$, что $\|x - a\| = \varrho(x, A)$.

Заметим, что метрическая проекция точки на множество не всегда существует и не всегда единственна.

Так, множество в ℓ_2

$$M = \left\{ x \in \ell_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{(1 + 1/k)^2} \geq 1 \right\}$$

слабо выпуклое с константой $R = 1/2$, однако для точки $x = 0$ не существует метрической проекции на M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что множество A в нормированном пространстве E обладает *чебышевским слоем* величины $R > 0$, если для любой точки $x \in E$ такой, что $\varrho(x, A) < R$, существует и единственна метрическая проекция $\pi(x, A)$ точки x на множество A .

Далее нам понадобится следующая оценка [1; лемма 5.1].

ЛЕММА 1. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задано множество X , замкнутое и слабо выпуклое по Виалю с константой R . Пусть заданы векторы $x \in X$, $y \in X$, $z \in \mathcal{H}$ такие, что $0 < \varrho \leq \varrho(z, X) < R$. Тогда

$$\|y - x\| \leq 2 \sqrt{\frac{R(\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 - 2\varrho^2)}{R - \varrho}}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задано множество A , замкнутое и слабо выпуклое по Виалю с константой R . Тогда множество A обладает чебышевским слоем величины R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in \mathcal{H}$, $\varrho(y, A) < R$. Требуется доказать существование и единственность вектора $x_0 \in A$ такого, что

$$\|y - x_0\| = \varrho(y, A). \quad (1)$$

По определению расстояния $\varrho(y, A)$ существует последовательность $\{x_k\}$ элементов множества A такая, что

$$\|y - x_k\| \rightarrow \varrho(y, A) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (2)$$

В силу леммы 1 для любых $k, j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|x_k - x_j\| \leq 2\sqrt{\frac{R(\|y - x_k\|^2 + \|y - x_j\|^2 - 2\rho^2(y, A))}{R - \rho(y, A)}}.$$

Отсюда и из (2) следует фундаментальность последовательности $\{x_k\}$. Поэтому последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому x_0 . Из замкнутости множества A следует, что $x_0 \in A$. Переходя к пределу в соотношении (2), получаем равенство (1). Тем самым, доказано существование вектора $x_0 \in A$, удовлетворяющего равенству (1).

Докажем теперь единственность такого x_0 . Пусть $x, x_0 \in A$, $\|y - x\| = \|y - x_0\| = \rho(y, A)$. Тогда в силу леммы 1 справедливо равенство $x = x_0$.

Из результатов [1; лемма 6.1 и теорема 6.1] вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задано множество A , замкнутое и слабо выпуклое по Виялю с константой R , и задана точка $x \notin A$. Пусть существует точка a – метрическая проекция точки x на множество A . Тогда

$$\text{int } B_R\left(a + \frac{R}{\|x - a\|}(x - a)\right) \cap A = \emptyset.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Расстоянием Хаусдорфа между двумя множествами A, B в нормированном пространстве E называется число

$$h(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества A_1, A_2 , замкнутые и слабо выпуклые по Виялю с константой R . Пусть заданы число $r \in (0; R)$ и точки $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ такие, что $\rho(x_i, A_i) \leq r$ при $i = 1, 2$. Тогда

$$\|\pi(x_1, A_1) - \pi(x_2, A_2)\| \leq \frac{R}{R - r}\|x_1 - x_2\| + \sqrt{\frac{2rRh(A_1, A_2)}{R - r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $a_i = \pi(x_i, A_i)$, $i = 1, 2$. В силу леммы 2 справедливо условие

$$\text{int } B_R\left(a_1 + \frac{R}{\|x_1 - a_1\|}(x_1 - a_1)\right) \cap A_1 = \emptyset. \quad (3)$$

Обозначим $h = h(A_1, A_2)$. Из определения хаусдорфова расстояния и включения $a_2 \in A_2$ следует, что $\rho(a_2, A_1) \leq h$. Отсюда и из условия (3) следует, что

$$\left\|a_1 + \frac{R}{\|x_1 - a_1\|}(x_1 - a_1) - a_2\right\| \geq R - h,$$

т.е.

$$\|a_1 - a_2\|^2 - \frac{2R}{\|x_1 - a_1\|} \langle x_1 - a_1, a_2 - a_1 \rangle + R^2 \geq (R - h)^2 \geq R^2 - 2Rh.$$

Отсюда и из соотношений $\|x_1 - a_1\| = \rho(x_1, A_1) \leq r$ вытекает неравенство

$$2R\langle x_1 - a_1, a_2 - a_1 \rangle \leq r(\|a_1 - a_2\|^2 + 2Rh). \quad (4)$$

Аналогично, справедливо неравенство

$$2R\langle x_2 - a_2, a_1 - a_2 \rangle \leq r(\|a_1 - a_2\|^2 + 2Rh). \quad (5)$$

Складывая неравенства (4) и (5), получаем неравенство

$$R\langle x_2 - x_1, a_1 - a_2 \rangle + R\|a_1 - a_2\|^2 \leq r\|a_1 - a_2\|^2 + 2Rh.$$

Следовательно,

$$\|a_1 - a_2\|^2 \leq \frac{R}{R-r}\langle x_1 - x_2, a_1 - a_2 \rangle + \frac{2rRh}{R-r} \leq \frac{R}{R-r}\|x_1 - x_2\| \cdot \|a_1 - a_2\| + \frac{2rRh}{R-r}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\|a_1 - a_2\| - \frac{R}{2(R-r)}\|x_1 - x_2\| \right)^2 &\leq \left(\frac{R}{2(R-r)}\|x_1 - x_2\| \right)^2 + \frac{2rRh}{R-r} \\ &\leq \left(\frac{R}{2(R-r)}\|x_1 - x_2\| + \sqrt{\frac{2rRh}{R-r}} \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|a_1 - a_2\| - \frac{R}{2(R-r)}\|x_1 - x_2\| \leq \frac{R}{2(R-r)}\|x_1 - x_2\| + \sqrt{\frac{2rRh}{R-r}},$$

что доказывает требуемое утверждение.

Теорема 2 показывает, что метрическая проекция точки, лежащей в R -окрестности замкнутого слабо выпуклого по Виялю с константой R множества, удовлетворяет условию Липшица относительно проецируемой точки и условию Гёльдера с показателем $1/2$ относительно множества. Для выпуклых множеств гёльдерова зависимость проекции точки от множества была показана в работе [2].

Следующий пример показывает, что в теореме 2 показатель $1/2$ в условии Гёльдера не может быть улучшен даже в случае выпуклых множеств A_1 и A_2 .

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$. Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задано множество

$$A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_2 \leq \varepsilon, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Пусть множество A_2 симметрично множеству A_1 относительно прямой $x_2 = \varepsilon/2$. Легко видеть, что $h(A_1, A_2) = \sqrt{1 + \varepsilon^2} - 1 \leq \varepsilon^2/2$. Выберем точку $x^\circ = (t, \varepsilon/2)$, $t > 2$. Из элементарной планиметрии легко следует, что

$$\begin{aligned} \pi(x^\circ, A_1) &= \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2 + \varepsilon^2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{4t^2 + \varepsilon^2}} \right), \\ \pi(x^\circ, A_2) &= \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2 + \varepsilon^2}}, \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{4t^2 + \varepsilon^2}} \right) \right) = \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2 + \varepsilon^2}}, \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\sqrt{4t^2 + \varepsilon^2}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\|\pi(x^\circ, A_1) - \pi(x^\circ, A_2)\| = \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{4t^2 + \varepsilon^2}} \geq \frac{1}{2}\varepsilon \geq \frac{1}{2}\sqrt{2h(A_1, A_2)}.$$

Через $co A$ будем обозначать выпуклую оболочку множества A .

ЛЕММА 3. Пусть в евклидовом пространстве E заданы множество A и векторы a, b, x_0 такие, что $A \subset B_r(a)$, $\text{int } B_R(b) \cap A = \emptyset$, $x_0 \in \text{co } A$. Тогда справедливо неравенство

$$\|x_0 - a\|^2 - \|x_0 - b\|^2 \leq r^2 - R^2. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $x \in A$ в силу соотношений $A \subset B_r(a)$, $\text{int } B_R(b) \cap A = \emptyset$ справедливы неравенства $\|x - a\| \leq r$, $\|x - b\| \geq R$. Следовательно,

$$\|x - a\|^2 - \|x - b\|^2 \leq r^2 - R^2.$$

Поэтому $A \subset S$, где

$$S = \{x \in E : \|x - a\|^2 - \|x - b\|^2 \leq r^2 - R^2\}.$$

Поскольку

$$S = \{x \in E : 2\langle b - a, x \rangle \leq r^2 - R^2 - \|a\|^2 + \|b\|^2\},$$

то множество S является полупространством, а значит, выпукло. Поэтому $x_0 \in \text{co } A \subset S$.

ЛЕММА 4. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множество A , замкнутое и слабо выпуклое по Виялю с константой R , и вектор $a \in \mathcal{H}$ такой, что $A \subset B_r(a)$. Тогда

$$h(A, \text{co } A) \leq \frac{r^2}{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A \subset \text{co } A$, то достаточно доказать, что для любого вектора $y \in \text{co } A$ справедливо неравенство

$$\varrho(y, A) \leq \frac{r^2}{R}. \quad (7)$$

Пусть $y \in \text{co } A$. Обозначим $\varrho = \varrho(y, A)$. Если $\varrho = 0$, то неравенство (7) выполнено. Поэтому будем предполагать, что $\varrho > 0$.

Поскольку $\text{int } B_\varrho(y) \cap A = \emptyset$, то, применяя лемму 3 для $x_0 = b = y$, $R = \varrho$, получаем неравенство $\|y - a\|^2 \leq r^2 - \varrho^2$. Следовательно,

$$\varrho \leq r. \quad (8)$$

В случае $r \geq R$ имеем $\varrho(y, A) = \varrho \leq r \leq r^2/R$. Следовательно, выполнено неравенство (7). Тем самым, в случае $r \geq R$ лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай $r < R$. Тогда в силу неравенства (8) справедливы неравенства $\varrho(y, A) \leq \varrho \leq r < R$. Поэтому, согласно теореме 1 существует вектор $x \in A$ такой, что $\|y - x\| = \varrho(y, A)$. В силу леммы 2 справедливо включение

$$\text{int } B_R\left(x + R \frac{y - x}{\|y - x\|}\right) \subset A^c.$$

Применяя лемму 3 для

$$b = x + R \frac{y - x}{\|y - x\|}, \quad x_0 = y,$$

получаем неравенство

$$\|y - a\|^2 - \left\| y - x - R \frac{y - x}{\|y - x\|} \right\|^2 \leq r^2 - R^2.$$

Следовательно,

$$\varrho(y, A) = \|y - x\| \leq R - \|y - x - Rp\| \leq R - \sqrt{R^2 - r^2} \leq \frac{r^2}{R},$$

что доказывает неравенство (7).

ЛЕММА 5 [3; § 2.1]. Пусть выпуклые замкнутые множества A_1 и A_2 из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ содержатся в шаре $B_R(0)$. Тогда

$$\|\pi(0, A_1) - \pi(0, A_2)\| \leq \sqrt{2Rh(A_1, A_2)} + h(A_1, A_2).$$

Для многозначных отображений с выпуклыми значениями задачи параметризации рассматривались в работах [3]–[7].

В следующей теореме приведен метод построения параметризации многозначного отображения со слабо выпуклыми значениями. Получена явная оценка модуля непрерывности параметризующей функции.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (E, ϱ) – метрическое пространство, $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Пусть $F: E \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ – многозначное отображение, принимающее замкнутые слабо выпуклые по Виалю с константой R значения. Пусть $r \in (0; R)$ и для любого $x \in E$ существует вектор $a_x \in \mathcal{H}$ такой, что $F(x) \subset B_r^{\mathcal{H}}(a_x)$. Пусть существует число M такое, что $F(x) \subset B_M^{\mathcal{H}}(0)$.

Тогда существует функция $f: E \times B_1^{\mathcal{H}}(0) \rightarrow \mathcal{H}$, задающая параметризацию многозначного отображения F , т.е. $F(x) = f(x, B_1^{\mathcal{H}}(0))$ для всех $x \in E$. При этом

- 1) для любого $x \in E$ функция $f(x, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица;
- 2) если многозначное отображение F непрерывно в метрике Хаусдорфа, то для любого $u \in B_1^{\mathcal{H}}(0)$ функция $f(\cdot, u)$ непрерывна на E ;
- 3) если многозначное отображение F удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа, то для любого $u \in B_1^{\mathcal{H}}(0)$ функция $f(\cdot, u)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$ на E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x \in E$, $u \in B_1^{\mathcal{H}}(0)$ определим

$$G(x) = \overline{\text{co}} F(x), \quad g(x, u) = \pi(Mu, G(x)).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \|g(x_1, u_1) - g(x_2, u_2)\| \\ & \leq \|\pi(Mu_1, G(x_1)) - \pi(Mu_2, G(x_1))\| + \|\pi(Mu_2, G(x_1)) - \pi(Mu_2, G(x_2))\|. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое слагаемое в правой части (9) оценим так:

$$\|\pi(Mu_1, G(x_1)) - \pi(Mu_2, G(x_1))\| \leq M\|u_1 - u_2\|. \quad (10)$$

Используя лемму 5, оценим второе слагаемое в правой части (9), воспользовавшись тем, что

$$\sup_{z \in G(x_1) \cup G(x_2)} \|z - Mu_2\| \leq 2M.$$

Имеем

$$\|\pi(Mu_2, G(x_1)) - \pi(Mu_2, G(x_2))\| \leq h(F(x_1), F(x_2)) + 2\sqrt{Mh(F(x_1), F(x_2))}. \quad (11)$$

Из неравенств (9)–(11) получаем оценку

$$\|g(x_1, u_1) - g(x_2, u_2)\| \leq M \cdot \|u_1 - u_2\| + h(F(x_1), F(x_2)) + 2\sqrt{Mh(F(x_1), F(x_2))}. \quad (12)$$

По построению $\pi(Mu, G(x)) \in G(x)$; следовательно, $g(x, u) \in G(x)$ и $g(x, B_1(0)) \subset G(x)$.

Так как $G(x) \subset B_M^{\mathcal{H}}(0)$, то для любого $y \in G(x)$ найдется точка $u_y \in B_1^{\mathcal{H}}(0)$ такая, что $y = Mu_y = g(x, u_y)$, т.е. $y = g(x, u_y)$. Итак, $g(x, B_1^{\mathcal{H}}(0)) = G(x)$.

Таким образом, мы параметризовали многозначное отображение $G(x) = \overline{\text{co}} F(x)$, гёльдерово с показателем $1/2$ по x и липшицево по u . Константы указаны в формуле (12).

Определим теперь $f(x, u) = \pi(g(x, u), F(x))$. В силу леммы 4

$$h(F(x), G(x)) \leq \frac{r^2}{R} < r < R,$$

т.е. множество $G(x)$ в силу теоремы 1 содержится в чебышевском слое $F(x)$, и поэтому проекция $\pi(g(x, u), F(x))$ существует и единственна. Равенство $f(x, B_1^{\mathcal{H}}(0)) = F(x)$ очевидно.

Применяя теорему 2, получаем, что

$$\begin{aligned} \|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)\| &\leq \frac{R}{R-r} \|g(x_1, u_1) - g(x_2, u_2)\| + \sqrt{\frac{2rRh(F(x_1), F(x_2))}{R-r}} \\ &\leq \frac{R}{R-r} (M \cdot \|u_1 - u_2\| + h(F(x_1), F(x_2)) + 2\sqrt{Mh(F(x_1), F(x_2))}) \\ &\quad + \sqrt{\frac{2rRh(F(x_1), F(x_2))}{R-r}}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют утверждения 1)–3) теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Е. Иванов, “Множества, слабо выпуклые по Виалю и по Ефимову–Стечкину”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 35–60.
- [2] J. W. Daniel, “The continuity of metric projections as functions of the data”, *J. Approximation Theory*, **12** (1974), 234–239.
- [3] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.
- [4] A. D. Ioffe, “Representation of set-valued mappings – II. Application to differential inclusions”, *SIAM J. Control Optim.*, **21** (1983), 641–651.
- [5] J.-P. Aubin, A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer, 1984.
- [6] A. Ornelas, “Parametrization of Caratheodory multifunctions”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **83** (1990), 33–44.
- [7] A. LeDonne, M. V. Marchi, “Representation of Lipschitz compact convex valued mappings”, *Rend. Acad. Naz. Lincei*, **68** (1980), 278–280.

М. В. Балашов, Г. Е. Иванов

Московский физико-технический институт

E-mail: balashov@mail.mipt.ru, givanov@mail.mipt.ru

Поступило

14.03.2005