Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Локальная теорема о двух радиусах для квазианалитических классов функций, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 490–500

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:02:53

УДК 517.5

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О ДВУХ РАДИУСАХ ДЛЯ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

В. В. Волчков

Получена точная характеристика максимальной гладкости ненулевых функций с нулевыми интегралами по шарам, радиусы которых принадлежат данному двухэлементному множеству.

Библиография: 24 названия.

Введение. Пусть f – локально суммируемая функция на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (обозначение $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$), E – заданное множество положительных чисел. Предположим, что при всех $r \in E$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{|y| \leq r} f(x+y) dy = 0, \quad (1)$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Для каких E отсюда следует, что f – нулевая функция? Известная теорема Л. Зальцмана о двух радиусах утверждает, что $f = 0$, если E состоит из двух положительных чисел r_1 и r_2 , для которых число r_1/r_2 не является отношением корней функции Бесселя $J_{n/2}$ (см. [1]). Примеры показывают (см. [1]), что указанное условие для r_1/r_2 является необходимым.

Получение локального аналога теоремы Зальцмана, например, когда f задана в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $R > \max(r_1, r_2)$, и равенство (1) выполнено при всех $x \in B_{R-r}$, является существенно более трудной проблемой. Возникающее при этом нарушение групповой структуры сдвигов, действующей на пространстве решений (1), создает серьезные препятствия для применения методов анализа Фурье, использованных в [1]. Первые результаты в этом направлении содержатся в работах Смита, Беренштейна, Гэя, Ижера (см. [2]–[4]). Принципиально новый метод, основанный на явном решении уравнения (1) в специальных функциях, был предложен в [5], где получен окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах. Для его формулировки введем следующие обозначения: $\Lambda_n = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ – последовательность всех положительных корней функции $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания; E_n – множество чисел вида α/β , где $\alpha, \beta \in \Lambda_n$;

$$A_n = \left\{ t > 0 : \forall N > 0 \exists \alpha, \beta \in \Lambda_n : \left| t - \frac{\alpha}{\beta} \right| < (1 + \beta)^{-N} \right\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда ISF, грант № U91200, фонда ISSEP, грант № APU071013, и фонда МНОП, грант № YSU081012.

© В. В. Волчков, 2006

Структура множества A_n подробно изучена в [5; § 8]. Отметим, что A_n имеет нулевую лебегову меру на $(0, +\infty)$ и пересечение A_n с любым интервалом $(a, b) \subset (0, +\infty)$ имеет мощность континуума. В работе [5] доказана

ТЕОРЕМА А. Пусть $E = \{r_1, r_2\}$, $R > \max(r_1, r_2)$, $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ и

$$\int_{|y| \leq r} f(x+y) dy = 0 \quad \text{при всех } r \in E, \quad x \in B_{R-r}. \quad (2)$$

Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) если $r_1 + r_2 < R$ и $r_1/r_2 \notin E_n$, то $f = 0$;
- 2) если $r_1 + r_2 = R$, $r_1/r_2 \notin E_n$, и $f \in C^\infty(B_R)$, то $f = 0$;
- 3) если $n = 1$, $r_1 + r_2 = R$ и $r_1/r_2 \notin E_1$, то $f = 0$;
- 4) если $r_1 + r_2 = R$ и $r_1/r_2 \in A_n \setminus E_n$, то $f = 0$;
- 5) если $n \geq 2$, $r_1 + r_2 = R$ и $r_1/r_2 \notin A_n$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ существует ненулевая $f \in C^m(B_R)$ с условием (2);
- 6) если $r_1 + r_2 > R$, то существует ненулевая $f \in C^\infty(B_R)$ с условием (2);
- 7) если $r_1/r_2 \in E_n$, то существует ненулевая вещественноаналитическая на $\mathbb{R}^n$ функция f , для которой равенство (2) выполнено при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Отметим, что утверждения 1), 2) и 7) теоремы А содержатся и в предшествующих работах [1]–[4]. При $R > r_1 + r_2 + \min(r_1, r_2)$ первое утверждение доказано Смитом [2]. Различные доказательства утверждений 1), 2) были даны Беренстейном, Гэм и Ижером (см. [3], [4]). Утверждение 6) при дополнительном ограничении $r_1/r_2 \notin A_n$ получено в [3].

Утверждения 5), 2) и 7) теоремы А позволяют сделать вывод о характере максимальной гладкости ненулевых функций, удовлетворяющих (2) при соответствующих r_1, r_2 . В частности, наибольшая степень гладкости (вещественная аналитичность) у таких функций достигается в случае $r_1/r_2 \in E_n$. При условиях утверждения 5) допустима любая конечная гладкость и этот результат является неулучшаемым (см. утверждение 2)). В остальных случаях, т.е. при $r_1/r_2 \notin E_n$ и $r_1 + r_2 > R$, вопрос о точной характеристике максимальной гладкости $f \neq 0$, удовлетворяющей (2), оставался открытым. В данной работе получено решение этой задачи в терминах теории квазианалитических классов функций.

1. Формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ – множество n -мерных мультииндексов, т.е. всех векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными целыми координатами. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с длиной $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ обозначим $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|}/(\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n})$ – операторы частного дифференцирования порядка $|\alpha|$. Пусть также $\bar{G}$ – замыкание области $G \subset \mathbb{R}^n$.

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E = \{r_1, r_2\}$, $R > r_2 > r_1$, $r_1 + r_2 > R$, $f \in C^\infty(B_R)$ и выполнено условие (2). Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) если $r_1/r_2 \notin E_n$ и существует последовательность положительных чисел $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ такая, что

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{1/q}} = \infty \quad (3)$$

и для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\sup_{x \in B_{r_1}} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|}, \quad (4)$$

то $f = 0$;

2) для любой последовательности положительных чисел $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ такой, что

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\inf_{q \geq j} M_q^{1/q}} < \infty, \quad (5)$$

существует ненулевая функция $f \in C^\infty(B_R)$, удовлетворяющая (2), у которой

$$\sup_{x \in B_R} |(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|} \quad (6)$$

при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Согласно теореме Карлемана (см. п. 2) условия (3), (4) означают, что f принадлежит квазианалитическому классу функций в шаре $\overline{B_{r_1}}$. В частности, при $r_1/r_2 \in E_n$ первое утверждение теоремы 1 неверно (см. утверждение 7) теоремы А). Отметим также, что в неравенстве (4) нельзя заменить B_{r_1} открытым шаром меньшего радиуса с центром в нуле (см. п. 4). Таким образом, точной характеристикой максимально допустимой гладкости $f \neq 0$, удовлетворяющей (2) при $r_1/r_2 \notin E_n$, $r_1 + r_2 > R$, является отсутствие квазианалитичности в $\overline{B_{r_1}}$.

По поводу других результатов, связанных с теоремой о двух радиусах, см. [6]–[18] и библиографию к этим работам.

Автор благодарит Л. Зальцмана и К. А. Беренштейна за обсуждения и представленную литературу.

2. Обозначения и вспомогательные конструкции. Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{M} = \{M_q\}_{q=0}^\infty$ – заданная последовательность положительных чисел. Обозначим через $C^\mathcal{M}(\overline{G})$ множество всех функций $f \in C^\infty(\overline{G})$ таких, что

$$|(\partial^\alpha f)(x)| \leq K^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|} \quad \text{при всех } x \in \overline{G}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (7)$$

где постоянная $K > 0$ зависит от f , но не от α и x . Класс $C^\mathcal{M}(\overline{G})$ называется *квазианалитическим*, если для всякой функции $f \in C^\mathcal{M}(\overline{G})$ из условия $(\partial^\alpha f)(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \overline{G}$ и всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ следует, что $f = 0$. Известная теорема Карлемана (обычно формулируемая для случая отрезка на $\mathbb{R}^1$, из которого легко следует общий случай) утверждает, что для квазианалитичности класса $C^\mathcal{M}(\overline{G})$ необходимо и достаточно выполнения условия (3) (см., например, [19], [20; гл. 1] и библиографию к этим работам).

Для фиксированного $r > 0$ и $R > r$ обозначим $V_r(B_R)$ множество функций $f \in C^\infty(B_R)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r , содержащимся в B_R . Пусть также $V_r^\mathcal{M}(B_R)$ – множество всех функций $f \in V_r(B_R)$ таких, что сужение f на $\overline{B_r}$ принадлежит $C^\mathcal{M}(\overline{B_r})$.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противного, предполагается, что $n \geq 2$. Пусть $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ (для любого $x \in \mathbb{R}^n$ $\rho = |x|$, а если $x \neq 0$, то $\sigma = x/\rho \in S^{n-1}$). Обозначим: $\mathcal{H}_k$ – пространство сферических гармоник степени k на S^{n-1} , рассматриваемое как подпространство $L^2(S^{n-1})$ (см. [21; гл. 4, § 2]), d_k – размерность $\mathcal{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}$, $1 \leq l \leq d_k$, –

фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Всякой функции $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} F_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, R), \quad (8)$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma. \quad (9)$$

Пусть $\text{SO}(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$ с нормированной мерой Хаара $d\tau$, $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления группы $\text{SO}(n)$ на пространство $\mathcal{H}_k$ (см. [22; гл. 9, § 2, п. 7]), $\{t_{l,p}^k\}$, $1 \leq l, p \leq d_k$, – матрица представления $T^k(\tau)$, т.е.

$$Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{d_k} t_{l,p}^k(\tau) Y_p^{(k)}(\sigma), \quad \tau \in \text{SO}(n), \quad \sigma \in S^{n-1}.$$

В частности, при $k = 0$ имеем $d_0 = 1$, $Y_1^{(0)}(\sigma) = 1$, $t_{1,1}^0(\tau) = 1$ при всех $\sigma \in S^{n-1}$, $\tau \in \text{SO}(n)$. При $n = 2$ и $k \geq 1$ всюду в дальнейшем будет использоваться следующий базис в $\mathcal{H}_k$:

$$Y_1^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad Y_2^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k$$

(в этом случае $d_k = 2$ при всех $k \geq 1$). Если τ – вращение на угол θ в $\mathbb{R}^2$, то для этого базиса

$$t_{1,1}^k(\tau) = \overline{t_{2,2}^k(\tau)} = e^{-ik\theta}, \quad t_{1,2}^k(\tau) = t_{2,1}^k(\tau) = 0.$$

При этом для членов ряда (8) из формулы (9) имеем равенство

$$f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\delta) = \int_{\text{SO}(2)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{l,l}^k(\tau)} d\tau. \quad (10)$$

При $n \geq 3$ из неприводимости $T^k(\tau)$ (см. [22; гл. 9, § 2, п. 10]) следует, что при всех $1 \leq l, p \leq d_k$

$$f_{k,l}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) = d_k \int_{\text{SO}(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{l,p}^k(\tau)} d\tau \quad (11)$$

(см. [10; гл. 9, § 2, п. 10]). Формулы (10), (11) показывают, что для $f \in C^\infty(B_R)$ члены ряда (8) можно доопределить в точке $x = 0$ так, что они станут функциями класса $C^\infty(B_R)$. Далее все функции из класса C^∞ в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, допускающие такое продолжение в точку $x = 0$, считаются доопределенными в нуле указанным образом.

3. Свойства функций класса $V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$. Тогда для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l, p \leq d_k$

$$f_{k,l}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) \in V_r^{\mathcal{M}}(B_r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $n \geq 3$, $\tau \in \text{SO}(n)$ и $\{\xi_{i,j}(\tau)\}$, $1 \leq i, j \leq n$, – ортогональная матрица, соответствующая вращению τ . Полагая $u(x) = f_{k,l}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma)$, из (11) получаем

$$(\partial^\alpha u)(x) = d_k \int_{\text{SO}(n)} \sum_{s_1=1}^n \cdots \sum_{s_{|\alpha|}=1}^n \xi_{s_1,j_1}(\tau) \cdots \xi_{s_{|\alpha|},j_{|\alpha|}}(\tau) \times \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{s_1} \cdots \partial x_{s_{|\alpha|}}} \right) (\tau^{-1}x) \overline{t_{l,p}^k(\tau)} d\tau$$

для некоторых $j_1, \dots, j_{|\alpha|}$, зависящих только от $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$. Поскольку $|\xi_{i,j}(\tau)| \leq 1$, из неравенства (7) для $G = B_r$ и [22; гл. 1, § 4, п. 3, формула (3)] имеем оценку

$$|(\partial^\alpha u)(x)| \leq K^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|}, \quad x \in \overline{B}_r, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

где постоянная $K > 0$ не зависит от α и x . Кроме того, $u \in V_r(B_r)$ (см. [5; лемма 1]). Отсюда следует утверждение леммы при $n \geq 3$. Аналогичные рассуждения (с использованием (10) вместо (11)) позволяют доказать лемму 1 и при $n = 2$, $p = l$. Пусть теперь $n = 2$, $p \neq l$. Очевидно, если $f(x_1, x_2) \in V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$, то $f(x_1, -x_2) \in V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$. Поскольку $Y_2^{(k)}(\sigma_1, \sigma_2) = Y_1^{(k)}(\sigma_1, -\sigma_2)$, утверждение следует из уже рассмотренных случаев. Таким образом, лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$, $s \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{M}(s) = \{M_{q+s}\}_{q=0}^\infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) $\partial^\beta f \in V^{\mathcal{M}(|\beta|)}(B_R)$ для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$;
- 2) при всех $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq d_k$

$$(D_k f_{k,l})(\rho) \in V^{\mathcal{M}^{(k)}}(B_R), \quad (12)$$

где

$$D_k = \prod_{j=1}^n \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{n+k-j-1}{\rho} I \right),$$

I – тождественный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение непосредственно следует из определения класса $V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$. Докажем утверждение 2). По лемме 1 функция $u(x) = f_{k,l}(\rho)Y(\sigma) \in V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$ при любом $Y \in \mathcal{H}_k$. Полагая

$$P(x) = \rho^k Y(\sigma), \quad Q(x) = (n+2k-2)x_1 P - \rho^2 \frac{\partial P}{\partial x_1},$$

получаем

$$(n+2k-2) \frac{\partial u}{\partial x_1} = \left(f'_{k,l}(\rho) - \frac{k}{\rho} f_{k,l}(\rho) \right) Q(x) \rho^{-k-1} + \left(f'_{k,l}(\rho) + \frac{n+k-2}{\rho} f_{k,l}(\rho) \right) \rho^{1-k} \frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

Поскольку $\rho^{-k-1}Q \in \mathcal{H}_{k+1}$, $\rho^{1-k} \frac{\partial P}{\partial x_1} \in \mathcal{H}_{k-1}$ (см. [22; гл. 9, § 2, п. 3]), из утверждения 1) и леммы 1 имеем

$$\left(f'_{k,l}(\rho) + \frac{n+k-2}{\rho} f_{k,l}(\rho) \right) Y^{(k-1)}(\sigma) \in V_r^{\mathcal{M}^{(1)}}(B_R)$$

при любом $Y^{(k-1)} \in \mathcal{H}_{k-1}$. Проведя подобное рассуждение k раз, получим (12).

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 1$ и

$$\varphi_n(x) = J_{(n-2)/2}(|x|)|x|^{(2-n)/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (13)$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1) для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$|(\partial^\alpha \varphi_n)(x)| \leq \frac{2^{1-n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad (14)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция;

2) при любых $r > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{|x| \leq r} \varphi_n(x+y) dx = (2\pi r)^{n/2} J_{n/2}(r) \varphi_n(y). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ имеем

$$\varphi_1(x) = J_{-1/2}(|x|)|x|^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x \quad (16)$$

(см. [23; гл. 1, § 7]). В этом случае утверждения лемм 3 очевидны. Пусть $n \geq 2$. Тогда неравенство (14) вытекает из формулы

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} e^{i(x,\sigma)} d\sigma,$$

где

$$(x, \sigma) = \sum_{j=1}^n x_j \sigma_j$$

(см., например, [24; введение, лемма 3.6]). Равенство (15) является следствием теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца (см. [5; формула (12)]).

ЛЕММА 4. Пусть $\{a_q\}_{q=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{q=1}^\infty a_q^{-1} = +\infty$. Тогда для любого $\gamma > 0$

$$\sum_{q=1}^\infty a_q^{-1-\gamma/q} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathcal{E}_\gamma = \{q \in \mathbb{N} : a_q^\gamma > 2^q\}$ и предположим, что

$$\sum_{q=1}^\infty a_q^{-1-\gamma/q} < +\infty.$$

Тогда

$$\sum_{q=1}^\infty a_q^{-1} = \sum_{q \in \mathcal{E}_\gamma} a_q^{-1} + \sum_{q \notin \mathcal{E}_\gamma} a_q^{-1} < \sum_{q \in \mathcal{E}_\gamma} 2^{-q/\gamma} + 2 \sum_{q \notin \mathcal{E}_\gamma} a_q^{-1-\gamma/q} < +\infty,$$

что противоречит условию.

ЛЕММА 5. Пусть $n \geq 1$ и $g(|x|) \in V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$. Тогда при $x \in B_R$ выполнено равенство

$$g(|x|) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q \varphi_n \left(\frac{x}{r} \nu_q \right), \quad c_q \in \mathbb{C}, \quad (17)$$

где φ_n определяется формулой (13). Кроме того, для любых $q \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$|c_q| \leq K^{j+1} \nu^{n-1-j} M_j \quad (18)$$

с постоянной $K > 0$, не зависящей от j и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ из условия следует

$$\int_{t-r}^{t+r} g(|x|) dx = 0 \quad \text{при} \quad |t| < R - r.$$

Дифференцируя по t , получаем, что $g(|x|)$ периодична с периодом $2r$ на $(-R, R)$. Учитывая, что $\Lambda_1 = \{\pi m\}_{m=1}^{\infty}$ (см. [23; гл. 1, § 7]) и разлагая $g(|x|)$ в ряд Фурье на $[-r, r]$, из (6) имеем (17). Оценка (18) для коэффициентов Фурье следует из неравенства

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^j (g(|x|)) \leq K^{j+1} M_j, \quad x \in [-r, r],$$

вытекающего из условия $g(|x|) \in V_r^{\mathcal{M}}(B_R)$.

Пусть теперь $n \geq 2$. Разложение (17) для функции $g(|x|) \in V_r(B_R)$, в котором $c_q = O(\nu_q^{-p})$ при $q \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $p > 0$, получено в [5; § 7, следствие из теоремы 3]. При этом условии ряд в (17) сходится равномерно на $\mathbb{R}^n$ и допускает почленное дифференцирование любое число раз (см. (14)). Используя [23; гл. 1, формула (1.1)], а также [23; гл. 1, формула (6.3)], из (17) и определения ν_q получаем

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^m (g(\rho)) \Big|_{\rho=r} = 0 \quad (19)$$

при любом $m \in \mathbb{Z}_+$. Докажем оценку (18). Поскольку

$$\nu_q J'_{(n-2)/2}(\nu_q) - \frac{n-2}{2} J_{(n-2)/2}(\nu_q) = -\nu_q J_{n/2}(\nu_q) = 0 \quad (20)$$

(см. [23; гл. 1, формула (6.3)]), равенство

$$t^{(n-2)/2} g(rt) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q \nu_q^{(2-n)/2} J_{(n-2)/2}(\nu_q t) \quad (21)$$

есть разложение функции $t^{(n-2)/2} g(rt)$ в ряд Дини на $[0, 1]$ (см. [23; гл. 2, § 24]). Из (21) и [23; гл. 2, формула (24.10)] находим

$$c_q J_{(n-2)/2}^2(\nu_q) = 2\nu_q^{n/2-1} \int_0^1 t^{n/2} g(rt) J_{(n-2)/2}(\nu_q t) dt.$$

Интегрируя по частям с учетом (19), (20) и [23; гл. 1, формула (6.2)], при любом $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned} c_q J_{(n-2)/2}^2(\nu_q) \nu_q^{1-n/2-2m} (-r^2)^m \\ = 2 \int_0^1 t^{n/2} \left(\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{n-1}{t} \frac{d}{dt} \right)^m g \right) (rt) J_{(n-2)/2}(\nu_q t) dt \\ = \frac{-2}{\nu_q} \int_0^1 t^{n/2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{n-1}{t} \frac{d}{dt} \right)^m g \right) (rt) J_{n/2}(\nu_q t) dt. \end{aligned}$$

Используя [24; введение, § 3, формула (3)], а также [5; формулы (1), (11)], отсюда и из оценки (14) при $\alpha = 0$ получаем (18).

4. Доказательство теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1) ТЕОРЕМЫ 1. Пусть сначала $n \geq 2$, $f \in C^\infty(B_R)$ и выполнены условия (2)–(4). Докажем, что $f_{k,l} = 0$ при всех k, l . Положим

$$g(\rho) = (D_k f_{k,l})(\rho), \quad (22)$$

тогда $g(\rho) \in V_r^{\mathcal{M}^{(k)}}(B_R)$ (см. лемму 2). По лемме 5 при $r = r_1$ выполнено равенство (17), в котором

$$|c_q| \leq K_1^{j+1} \nu_q^{n-1-j} M_{j+k}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (23)$$

и постоянная $K_1 > 0$ не зависит от j и q . Продолжим $g(|x|)$ на $\mathbb{R}^n$ по формуле (17) (это возможно ввиду (14), (23) и [5; формула (11)]). Тогда $g(|x|) \in V_{r_1}(\mathbb{R}^n)$ (см., например, (15)). Полагая

$$h(x) = \int_{|y| \leq r_2} g(|x+y|) dy,$$

из (17) и (15) находим

$$h(x) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q (2\pi r_2)^{n/2} \left(\frac{r_1}{\nu_q} \right)^{n-1} J_{n/2} \left(\frac{r_2}{r_1} \nu_q \right) \varphi_n \left(\frac{\nu_q}{r_1} x \right).$$

Используя (14), (23) и [5; формула (10)], отсюда имеем

$$|(\partial^\alpha h)(x)| \leq K_1^{j+1} M_{j+k} \sum_{q=1}^{\infty} \nu_q^{|\alpha|-j-1/2} \quad (24)$$

при любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $j > |\alpha|$ (постоянная $K_1 > 0$ не зависит от x, j, α). Полагая в (24) $j = |\alpha| + 1$ и учитывая [5; формула (11)], получаем оценку

$$|(\partial^\alpha h)(x)| \leq K_2^{|\alpha|+1} M_{|\alpha|+1+k}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с константой $K_2 > 0$, не зависящей от x и α . Тогда из (3), леммы 4 и теоремы Карлемана (см. п. 2) следует, что h принадлежит квазианалитическому классу функций в любом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$. Поскольку $f \in V_{r_2}(B_R)$, из (22) и леммы 2 получаем, что

$h = 0$ в B_{R-r_2} . Тогда $h = 0$ в $\mathbb{R}^n$ и $g(\rho) \in V_r(R^n)$, $r = r_1, r_2$. Так как $r_1/r_2 \notin E_n$, из первого утверждения теоремы А вытекает, что $g = 0$. Учитывая, что $f_{k,l}$ как функция переменной $\rho \in [0, R]$ принадлежит классу $C^\infty[0, R]$ (см. (9)), отсюда и из (22) имеем $f_{k,l} = 0$. Таким образом, $f = 0$ в B_R и при $n \geq 2$ утверждение 1) доказано.

Пусть $n = 1$. В этом случае положим $g(|x|) = f(x) + f(-x)$. Тогда $g(|x|) \in V_r^{\mathcal{M}}(-R, R)$ и по лемме 5 при $r = r_1$ имеют место (17), (18). Повторяя приведенные выше рассуждения, получим $g = 0$, откуда $f'(x) = f'(-x)$. Далее, для производной $f' \in V_r^{\mathcal{M}(1)}(-R, R)$ аналогично имеем $f' = 0$. Поскольку $f \in V_r(-R, R)$, отсюда следует утверждение 1) и при $n = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что утверждение 1) становится неверным, если в неравенстве (4) заменить B_{r_1} открытым шаром меньшего радиуса с центром в нуле. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ положим $R = r_1 + \varepsilon/2$. Тогда всякая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $G = B_{r_1-\varepsilon/2} \setminus \bar{B}_{r_1-\varepsilon}$ такая, что

$$\int_G f(x) dx = 0,$$

принадлежит $V_r(B_R)$ при всех $r \geq r_1$ и $\partial^\alpha f = 0$ в $\bar{B}_{r_1-\varepsilon}$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2) ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $r_1 + r_2 - R = \varepsilon_1 > 0$ и выполнены условия (5), (6). Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{M_q^{1/q}\}_{q=1}^\infty$ не убывает (в противном случае M_q можно заменить на $m_q = (\inf_{j \geq q} M_j^{1/j})^q \leq M_q$). Из (6) следует, что существует последовательность положительных чисел $\{\zeta_q\}_{q=0}^\infty$ такая, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \zeta_q^{1/q} = +\infty$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q \geq j} (M_q/\zeta_q)^{1/q}} < \infty. \quad (25)$$

Поскольку $R + \varepsilon_1/2 < r_1 + r_2$, из [5; § 9] получаем, что существует вещественнозначная функция $f_1 \in V_r(B_{R+\varepsilon_1/2})$, $r = r_1, r_2$, такая, что

$$\int_{B_{R+\varepsilon_1/2}} |f_1(x)| dx = 1. \quad (26)$$

Из (26) и [5; следствие 1 из теоремы 2, лемма 6] вытекает, что $\text{supp } f_1 \cap B_{r_1} \neq \emptyset$. Тогда в некотором открытом шаре B с центром $x_0 \in B_{r_1}$ и радиусом $\delta < R - r_1$ функция f_1 не обращается в нуль, т.е. сохраняет знак. Пусть $\varepsilon_2 = \min(\delta, \varepsilon_1/2)$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/2$. Рассмотрим ненулевую неотрицательную функцию $u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ с носителем в $[0, \varepsilon_2/(2\sqrt{n})]$, удовлетворяющую условию

$$|u_1^{(j)}(t)| \leq \frac{K_1^{j+1} M_j}{\zeta_j}, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

где постоянная $K_1 > 0$ не зависит от j и t . Существование такой функции следует из (25) и [20; теоремы 1.3.5, 1.3.8]. Полагая

$$K = \max_{j \geq 1} \frac{K_1^{1+j}}{\zeta_j}, \quad u(t) = \frac{u_1(t)}{K},$$

имеем $|u^{(j)}(t)| \leq M_j$ на $\mathbb{R}^1$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\psi(x) = \prod_{j=1}^n u(x_j);$$

тогда $\psi \geq 0$ и

$$\text{supp } \psi \subset B_{\varepsilon_2/2}. \quad (27)$$

Кроме того, для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ получаем

$$|(\partial^\alpha \psi)(x)| = \prod_{j=1}^n |u^{(\alpha_j)}(x_j)| \leq \prod_{j=1}^n M_{\alpha_j} \leq M_{|\alpha|}. \quad (28)$$

Далее, свертка $f = f_1 * \psi$ определена в $B_{R+\varepsilon}$ и принадлежит $V_r(B_{R+\varepsilon})$, $r = r_1, r_2$. Из (28) и (26) следует, что $|(\partial^\alpha f)(x)| \leq M_{|\alpha|}$ для всех $x \in B_{R+\varepsilon}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Поскольку $\varepsilon_2/2 < \delta$, из (27) и определения f имеем $f(x_0) \neq 0$. Таким образом, f удовлетворяет всем требуемым условиям и утверждение 2) доказано.

В заключение отметим, что аналогично можно получить подобные теоремы о двух радиусах и для других уравнений типа (1), рассмотренных в [15]–[17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Zalcman, “Analyticity and the Pompeiu problem”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **47** (1972), 237–254.
- [2] I. D. Smith, “Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72** (1972), 403–416.
- [3] C. A. Berenstein, R. Gay, “A local version of the two-circles theorem”, *Israel J. Math.*, **55** (1986), 267–288.
- [4] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger, “Inversion of the local Pompeiu transform”, *J. Analyse Math.*, **54** (1990), 259–287.
- [5] В. В. Волчков, “Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах”, *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 15–34.
- [6] C. A. Berenstein, L. Zalcman, “Pompeiu’s problem on symmetric spaces”, *Comm. Math. Helv.*, **55**:4 (1980), 593–621.
- [7] M. El Harchaoui, “Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe: cas de deux boules”, *J. Anal. Math.*, **67** (1995), 1–37.
- [8] J. M. Cohen, M. A. Picardello, “The 2-circle and 2-disk problems on trees”, *Israel J. Math.*, **64** (1988), 73–86.
- [9] В. В. Волчков, “Решение проблемы носителя для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30.
- [10] В. В. Волчков, “Новые теоремы о среднем для решений уравнения Гельмгольца”, *Матем. сб.*, **184**:7 (1993), 71–78.
- [11] В. В. Волчков, “Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:1 (1994), 182–194.
- [12] В. В. Волчков, “О множествах инъективности преобразования Радона на сферах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:3 (1999), 63–76.
- [13] В. В. Волчков, “Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях”, *Матем. заметки*, **53**:2 (1993), 30–36.
- [14] В. В. Волчков, “Теоремы о двух радиусах на пространствах постоянной кривизны”, *Докл. РАН*, **347**:3 (1996), 300–302.

- [15] В. В. Волчков, “Окончательный вариант теоремы о среднем в теории гармонических функций”, *Матем. заметки*, **59**:3 (1996), 351–358.
- [16] В. В. Волчков, “Новые теоремы о среднем для полианалитических функций”, *Матем. заметки*, **56**:3 (1994), 20–28.
- [17] Вит. В. Волчков, “Теоремы о среднем для одного класса полиномов”, *Сиб. матем. ж.*, **35**:4 (1994), 737–745.
- [18] В. В. Волчков, “Теоремы о шаровых средних на комплексных гиперболических пространствах”, *Доповіді НАН України*, 2000, № 4, 7–10.
- [19] Г. В. Бадалян, *Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций*, Наука, М., 1990.
- [20] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986.
- [21] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [22] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1991.
- [23] Б. Г. Коренев, *Введение в теорию бесселевых функций*, Наука, М., 1971.
- [24] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции, Мир, М., 1987.

В. В. Волчков

Донецкий национальный университет

E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua

Поступило

27.07.2000

Исправленный вариант

21.06.2004