Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Желябин, Корадикал йордановой (альтернативной) коалгебры и квазирегулярный радикал ее дуальной алгебры, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 509–515

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:28:08

КОРАДИКАЛ ЙОРДАНОВОЙ (АЛЬТЕРНАТИВНОЙ) КОАЛГЕБРЫ И КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЙ РАДИКАЛ ЕЕ ДУАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

В. Н. Желябин

Доказано, что ортогональное дополнение корадикала йордановой (альтернативной) коалгебры совпадает с квазирегулярным радикалом ее дуальной алгебры.

Библиография: 5 названий.

Понятием, дуальным к понятию алгебры над полем, является понятие коалгебры. Одним из основных понятий в теории ассоциативных коалгебр и алгебр Хопфа является понятие корадикала. В [1] доказано, что ортогональное дополнение корадикала ассоциативной коалгебры совпадает с радикалом Джекобсона ее дуальной алгебры. Отсюда, в частности, следует, что радикал Джекобсона (квазирегулярный радикал) дуальной алгебры ассоциативной коалгебры замкнут в конечной (*-слабой) топологии.

Альтернативные и йордановы коалгебры были определены в работе [2].

В данной работе доказано, что квазирегулярный радикал дуальной алгебры йордановой (альтернативной) коалгебры замкнут в конечной топологии.

1. Определения и предварительные результаты. Пусть V – линейное пространство над полем Φ . Через V^* обозначим дуальное пространство для V . Пусть U – подмножество линейного пространства V . Тогда положим

$$U^\perp = \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \text{ для любого элемента } u \in U\}.$$

Аналогично определяется $U^\perp$ для подмножества U из V^* .

Дуальное пространство V^* – линейное топологическое пространство. Базис окрестностей элемента f из V^* этой топологии образуют множества вида $f + W^\perp$, где W – произвольное конечномерное подпространство из V . Данная топология называется *конечной топологией*. Замкнутыми в конечной топологии подпространствами являются подпространства вида $U^{\perp\perp}$, где U – подпространство из V^* .

Для линейных пространств V и U над полем Φ через $V \otimes U$ обозначим их тензорное произведение над Φ . Как известно, отображение $\rho: V^* \otimes V^* \rightarrow (V \otimes V)^*$, определенное следующим правилом:

$$\rho(f \otimes g) \left(\sum_i v_i \otimes u_i \right) = \sum_i f(v_i)g(u_i)$$

Работа выполнена при поддержке фонда FAPESP, грант № 04/08537-4, и Министерства образования РНПВШ, грант № 11617.

является вложением. Если $\phi: V \mapsto U$ – линейное отображение линейных пространств, то сопряженное к нему линейное отображение $\phi^*: U^* \mapsto V^*$ задается правилом: $(\phi^*(u^*))(v) = u^*(\phi(v))$, здесь $v \in V$, $u^* \in U^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара (A, Δ) , где A – линейное пространство, а $\Delta: A \mapsto A \otimes A$ – линейное отображение, называется *коалгеброй*. Отображение Δ называется *коумножением*. Для элемента a коалгебры (A, Δ) , если $\Delta(a) = \sum_i a_{1i} \otimes a_{2i}$, то, следуя Свидлеру [3], будем писать $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Коединицей коалгебры (A, Δ) называется такой функционал ϵ из A^* , что для произвольного элемента a из A имеем

$$a = \sum_a \epsilon(a_{(1)})a_{(2)} = \sum_a \epsilon(a_{(2)})a_{(1)},$$

здесь $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Пусть (A, Δ) – коалгебра. Рассмотрим дуальное пространство A^* . Пусть $\Delta^*: (A \otimes A)^* \mapsto A^*$ – сопряженное отображение для коумножения Δ . Тогда на пространстве A^* можно задать операцию умножения, положив $fg = \Delta^* \rho(f \otimes g)$, где f, g – функционалы из A^* . Пространство A^* с заданным умножением называется *дуальной алгеброй* коалгебры (A, Δ) . Легко видеть, что для любых f, g из A^* и любого a из A справедливо равенство

$$(fg)(a) = \rho(f \otimes g)(\Delta(a)) = \sum_a f(a_{(1)})g(a_{(2)}).$$

Коединица ϵ коалгебры (A, Δ) является единицей для дуальной алгебры A^* .

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A, Δ) задает бимодульное действие на пространстве A , которое определяется следующим образом:

$$f \rightharpoonup a = \sum_a a_{(1)}f(a_{(2)}) \quad \text{и} \quad a \leftharpoonup f = \sum_a f(a_{(1)})a_{(2)},$$

где $f \in A^*$ и $a \in A$.

Нетрудно видеть, что для любых $f, g \in A^*$, $a \in A$ имеют место равенства

$$fg(a) = f(g \rightharpoonup a) = g(a \leftharpoonup f).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть (A, Δ) – произвольная коалгебра и a – элемент из A . Положим

$$\text{Ann}_l(a) = \{f \in A^* \mid f \rightharpoonup a = 0\} \quad \text{и} \quad \text{Ann}_r(a) = \{f \in A^* \mid a \leftharpoonup f = 0\}.$$

Тогда $\text{Ann}_l(a)$, $\text{Ann}_r(a)$ – замкнутые в конечной топологии подпространства алгебры A^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in A$ и $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Рассмотрим в A линейное подпространство U , порожденное всеми элементами $a_{(2)}$. Тогда размерность пространства U конечна и $U^\perp \subseteq \text{Ann}_l(a)$. Пусть g принадлежит замыканию пространства $\text{Ann}_l(a)$. Рассмотрим окрестность $g + U^\perp$ элемента g . Тогда $\text{Ann}_l(a) \cap (g + U^\perp) \neq \emptyset$. Если $f \in \text{Ann}_l(a) \cap (g + U^\perp)$, то $f = g + h$, где $h \in U^\perp$. Поэтому $g = f - h \in \text{Ann}_l(a)$. Следовательно, подпространство $\text{Ann}_l(a)$ замкнуто в конечной топологии.

Аналогично доказывается замкнутость в конечной топологии пространства $\text{Ann}_r(a)$.

Пусть X, Y, Z – линейные подпространства коалгебры (A, Δ) . Положим

$$\wedge(X, Y, Z) = \{a \in A \mid (\Delta \otimes id)\Delta(a) \in X \otimes A \otimes A + A \otimes Y \otimes A + A \otimes A \otimes Z\}.$$

Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть (A, Δ) – произвольная (не обязательно ассоциативная) коалгебра. Тогда для любых линейных подпространств X, Y, Z из A имеет место равенство

$$\wedge(X, Y, Z) = ((X^\perp Y^\perp)Z^\perp)^\perp.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in X^\perp, g \in Y^\perp, h \in Z^\perp$. Тогда $(fg)h \in (X^\perp Y^\perp)Z^\perp$ и для любого $a \in \wedge(X, Y, Z)$ имеем

$$\begin{aligned} (fg)h(a) &= \rho(f \otimes g \otimes h)((\Delta \otimes id)\Delta(a)) \in f(X)g(A)h(A) \\ &\quad + f(A)g(Y)h(A) + f(A)g(A)h(Z) = 0, \end{aligned}$$

где $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Поэтому $a \in ((X^\perp Y^\perp)Z^\perp)^\perp$, если $a \in \wedge(X, Y, Z)$.

Обратно, пусть $a \in ((X^\perp Y^\perp)Z^\perp)^\perp$. Тогда

$$(\Delta \otimes id)\Delta(a) = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \otimes z_i + \sum_{j=1}^m u_j \otimes v_j \otimes w_j,$$

где $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m$ линейно независимы и все $z_i \in Z$, а элементы $w_i \notin Z$. Покажем, что

$$\sum_{j=1}^m u_j \otimes v_j \otimes w_j \in X \otimes A \otimes A + A \otimes Y \otimes A.$$

Если все $v_j \in Y$, то все доказано. Пусть $v_{j_1} \notin Y$ для некоторого индекса $j_1 \leq m$. Тогда для некоторого элемента $g \in Y^\perp$ имеем $g(v_{j_1}) \neq 0$. Определим функционал h на A , полагая $h(Z) = 0, h(w_j) = 0$ для $j \neq j_1$ и $h(w_{j_1}) = 1$. Для любого $f \in X^\perp$ получаем

$$\begin{aligned} (fg)h(a) &= \sum_{i=1}^n f(a_i)g(b_i)h(z_i) + \sum_{j=1}^m f(u_j)g(v_j)h(w_j) \\ &= f(u_{j_1})g(v_{j_1})h(w_{j_1}) = f(u_{j_1})g(v_{j_1}). \end{aligned}$$

Так как $(fg)h \in (X^\perp Y^\perp)Z^\perp$, то $(fg)h(a) = 0$. Следовательно, $f(u_{j_1})g(v_{j_1}) = 0$ и $f(u_{j_1}) = 0$. Поэтому $u_{j_1} \in X^{\perp\perp} = X$. Отсюда получаем, что $\sum_{j=1}^m u_j \otimes v_j \otimes w_j \in X \otimes A \otimes A + A \otimes Y \otimes A$.

Таким образом, $a \in \wedge(X, Y, Z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное подпространство B коалгебры (A, Δ) называется *подкоалгеброй*, если $\Delta(B) \subseteq B \otimes B$.

Хорошо известно, что B является подкоалгеброй тогда и только тогда, когда пространство $B^\perp$ является идеалом в A^* . Дуальная алгебра B^* коалгебры (B, Δ) изоморфна фактор-алгебре $A^*/B^\perp$. Нетрудно показать, что B – подкоалгебра в том и только том случае, когда пространство B есть A^* -подбимодуль. Если I – идеал алгебры A^* , то подпространство $I^\perp$ – подкоалгебра в A .

Коалгебра (A, Δ) называется *простой*, если она имеет только две подкоалгебры: нулевую и саму коалгебру (A, Δ) .

Коалгебра (A, Δ) называется *локально конечномерной*, если любой элемент коалгебры (A, Δ) содержится в конечномерной подкоалгебре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное многообразие алгебр. Тогда пара (A, Δ) называется *$\mathcal{M}$ -коалгеброй*, если ее дуальная алгебра A^* принадлежит многообразию $\mathcal{M}$.

Хорошо известно (см. [2]–[4]), что всякая ассоциативная, альтернативная, йорданова или структуризуемая коалгебра локально конечномерна.

Пусть (A, Δ) – коалгебра, X – подпространство в A . Определим в A последовательность подпространств $\{X_{[n]}\}$, полагая

$$X_{[0]} = 0, \quad X_{[1]} = X \quad \text{и} \quad X_{[n+1]} = \wedge(X_{[n]}, X_{[n]}, X_{[n]}).$$

Для подпространства Y дуальной алгебры A^* положим

$$Y^{[0]} = A^*, \quad Y^{[1]} = Y \quad \text{и} \quad Y^{[n+1]} = (Y^{[n]}Y^{[n]})Y^{[n]} = \left\{ \sum_i (x_i y_i) z_i \mid x_i, y_i, z_i \in Y^{[n]} \right\}.$$

Пусть U – подмножество в A^* . Тогда для $a \in A$ положим $U(a) = \{f(a) \mid f \in U\}$. В следующем предложении мы полагаем $f \cdot a = f \rightharpoonup a$ и $a \cdot f = a \leftharpoonup f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть (A, Δ) – коалгебра с коединицей ϵ , A^* – дуальная алгебра коалгебры (A, Δ) , B – подкоалгебра в A и $I = B^\perp$. Предположим, что куб любого идеала алгебры A^* снова является идеалом. Тогда для любого числа n в коалгебре (A, Δ) имеет место равенство $B_{[n]} = (I^{[n]})^\perp$ и $B_{[n]}$ – подкоалгебра в (A, Δ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать это предложение индукцией по n . Для $n = 1$ все доказано. Предположим, что предложение верно для всех $k \leq n$. Докажем его для $n + 1$. По определению $B_{[n+1]} = \wedge(B_{[n]}, B_{[n]}, B_{[n]})$. В силу предложения 2 имеем

$$B_{[n+1]} = ((B_{[n]}^\perp B_{[n]}^\perp) B_{[n]}^\perp)^\perp.$$

По индукционному предположению получаем, что

$$B_{[n+1]} = (((I^{[n]})^{\perp\perp} (I^{[n]})^{\perp\perp}) (I^{[n]})^{\perp\perp})^\perp.$$

Для подпространства X из A^* через $\overline{X}$ обозначим замыкание X в конечной топологии, т.е. $\overline{X} = X^{\perp\perp}$. Поскольку B – подкоалгебра и куб идеала алгебры A^* – снова идеал, то $I^{[n]}$ – идеал в A^* для любого числа n . Тогда пространство $\overline{I^{[n]}}$ – идеал алгебры A^* .

Покажем, что

$$(I^{[n+1]})^\perp = (((\overline{I^{[n]}})(\overline{I^{[n]}}))\overline{I^{[n]}})^\perp.$$

Поскольку $I^{[n]} \subseteq \overline{I^{[n]}}$, то

$$I^{[n+1]} = (I^{[n]} I^{[n]}) I^{[n]} \subseteq ((\overline{I^{[n]}})(\overline{I^{[n]}}))\overline{I^{[n]}}.$$

Отсюда получаем, что

$$(((\overline{I^{[n]}})(\overline{I^{[n]}}))\overline{I^{[n]}})^\perp \subseteq (I^{[n+1]})^\perp.$$

Пусть $a \in (I^{[n+1]})^\perp$. Пространство $I^{[n]}$ является идеалом алгебры A^* . Поэтому $((A^* I^{[n]}) I^{[n]}) I^{[n]} \subseteq I^{[n+1]}$ и $a \in (((A^* I^{[n]}) I^{[n]}) I^{[n]})^\perp$. Следовательно,

$$A^* (I^{[n]} \cdot (I^{[n]} \cdot (I^{[n]} \cdot a))) = (((A^* I^{[n]}) I^{[n]}) I^{[n]})(a) = 0.$$

Поэтому $I^{[n]} \cdot (I^{[n]} \cdot (I^{[n]} \cdot a)) = 0$. Отсюда получаем, что

$$I^{[n]} \subseteq \bigcap_{x \in I^{[n]} \cdot (I^{[n]} \cdot a)} \text{Ann}_l(x).$$

По предложению 1 $\text{Ann}_l(x)$ – замкнутое в конечной топологии подпространство алгебры A^* . Следовательно,

$$\overline{I^{[n]}} \subseteq \bigcap_{x \in I^{[n]} \cdot (I^{[n]} \cdot a)} \text{Ann}_l(x).$$

Тогда $\overline{I^{[n]}} \cdot (I^{[n]} \cdot (I^{[n]} \cdot a)) = 0$. Поэтому $\epsilon(\overline{I^{[n]}} \cdot (I^{[n]} \cdot (I^{[n]} \cdot a))) = 0$. Отсюда следует, что $((\overline{I^{[n]}} I^{[n]}) I^{[n]})(a) = 0$ и $((\overline{I^{[n]}} (A^* I^{[n]})) I^{[n]})(a) = 0$. Следовательно,

$$A^* (I^{[n]} \cdot ((I^{[n]} \cdot a) \cdot \overline{I^{[n]}})) = ((\overline{I^{[n]}} (A^* I^{[n]})) I^{[n]})(a) = 0.$$

Поэтому $I^{[n]} \cdot ((I^{[n]} \cdot a) \cdot \overline{I^{[n]}}) = 0$ и $\overline{I^{[n]}} \cdot ((I^{[n]} \cdot a) \cdot \overline{I^{[n]}}) = 0$. Тогда

$$(((\overline{I^{[n]}})(\overline{I^{[n]}})) I^{[n]})(a) = \epsilon(\overline{I^{[n]}} \cdot ((I^{[n]} \cdot a) \cdot \overline{I^{[n]}})) = 0.$$

Аналогично получаем, что $((\overline{I^{[n]}})(\overline{I^{[n]}})) \overline{I^{[n]}}(a) = 0$. Поэтому $a \in (((\overline{I^{[n]}})(\overline{I^{[n]}})) \overline{I^{[n]}})^\perp$. Следовательно, $(I^{[n+1]})^\perp \subseteq (((\overline{I^{[n]}})(\overline{I^{[n]}})) \overline{I^{[n]}})^\perp$. Отсюда получаем,

$$(I^{[n+1]})^\perp = (((\overline{I^{[n]}})(\overline{I^{[n]}})) \overline{I^{[n]}})^\perp.$$

Таким образом,

$$B_{[n+1]} = (I^{[n+1]})^\perp.$$

2. Корадикал йордановой (альтернативной) коалгебры. Пусть (A, Δ) – йорданова (альтернативная) коалгебра и B – простая подкоалгебра коалгебры (A, Δ) . Поскольку коалгебра (A, Δ) локально конечномерна, то B – конечномерная подкоалгебра. Обозначим через $\text{Corad}(A)$ сумму всех простых подкоалгебр из (A, Δ) . Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть (A, Δ) – йорданова (альтернативная) коалгебра с коединицей и A^* – дуальная алгебра коалгебры (A, Δ) . Пусть $\text{Rad}(A^*)$ – квазирегулярный радикал алгебры A^* . Тогда

$$\text{Corad}(A)^\perp = \text{Rad}(A^*).$$

Мы докажем данную теорему для случая йордановых коалгебр. Для альтернативных коалгебр доказательство аналогично.

Напомним определение обратимого элемента йордановой алгебры. Элемент x йордановой алгебры *обратим* с обратным y , если $xy = 1$ и $x^2 y = x$.

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1. Пусть (A, Δ) – йорданова коалгебра с коединицей ϵ и $\{B_n\}$ – возрастающая последовательность подкоалгебр в A . Тогда мы имеем последовательность таких эпиморфизмов $\pi_n: A^* \mapsto B_n^*$, что $\text{Кер } \pi_n = B_n^\perp$. Предположим, что $A = \bigcup_n^\infty B_n$. Тогда элемент $f \in A^*$ обратим в A^* в том и только том случае, когда для любого n элемент $\pi_n(f)$ обратим в алгебре B_n^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in A^*$. Если элемент f обратим в A^* , то ясно, что для любого n элемент $\pi_n(f)$ обратим в алгебре B_n^* .

Предположим, что для любого n элемент $\pi_n(f)$ обратим в алгебре B_n^* . Обозначим через $\bar{g}_n$ его обратный элемент в алгебре B_n^* . Пусть элемент $g_n \in A^*$ является прообразом элемента $\bar{g}_n$, т.е. $\pi_n(g_n) = \bar{g}_n$. Рассмотрим эпиморфизм $\phi: B_{n+1}^* \mapsto B_n^*$, полагая $\phi(\pi_{n+1}(h)) = \pi_n(h)$ для любого $h \in A^*$. Тогда мы имеем

$$\pi_n(f)\pi_n(g_{n+1}) = \pi_n(fg_{n+1}) = \phi(\pi_{n+1}(fg_{n+1})) = \phi(\pi_{n+1}(f)\pi_{n+1}(g_{n+1})) = 1.$$

Аналогично $\pi_n(f)^2\pi_n(g_{n+1}) = \pi_n(f)$. Отсюда получаем, что $g_n - g_{n+1} \in B_n^\perp$. Следовательно, $g_n(b) = g_{n+1}(b)$ для любого $b \in B_n$. Поэтому для $k < l$ мы имеем $g_k(b) = g_l(b)$ для любого $b \in B_k$.

Определим отображение $g: A \mapsto \Phi$, полагая $g(a) = g_n(a)$, если $a \in B_n$. Предположим, что $a \in B_k \cap B_l$ и $k < l$. Тогда $g_k(a) = g_l(a)$. Поэтому отображение g определено корректно. Ясно, что отображение g линейно. Поэтому $g \in A^*$. В силу определения функционала g имеем $\pi_n(g) = \pi_n(g_n)$. Отсюда получаем, что $fg - \epsilon, f^2g - f \in B_n^\perp$ для любого числа n . Поскольку $\bigcap_n^\infty B_n^\perp = 0$, то $fg = \epsilon$ и $f^2g = f$. Следовательно, f обратим в алгебре A^* .

ЛЕММА 2. Пусть (A, Δ) – йорданова коалгебра с коединицей ϵ , B – подкоалгебра в A и $I = B^\perp$. Предположим, что $A = \bigcup_n^\infty B_{[n]}$. Тогда I – квазирегулярный идеал алгебры A^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку A^* – йорданова алгебра, то куб идеала алгебры A^* – снова идеал. В силу предложения 3 имеем $(I^{[n]})^\perp = B_{[n]}$. Поэтому $B_{[n]}$ – подкоалгебра коалгебры (A, Δ) и $B_{[n]}^\perp = (I^{[n]})^{\perp\perp}$. Следовательно, $\pi_n: A^* \mapsto B_{[n]}^*$ эпиморфизм алгебр, причем $\text{Кер } \pi_n = B_{[n]}^\perp$. Ясно, что последовательность подкоалгебр $\{B_{[n]}\}$ возрастает. Пусть f – элемент из I . Тогда для любого числа n существует такое число k , что $f^k \in I^{[n]} \subseteq (I^{[n]})^{\perp\perp} = B_{[n]}^\perp$. Поэтому $\pi_n(f)$ – нильпотентный элемент алгебры $B_{[n]}^*$. Следовательно, для любого числа n элемент $\pi_n(\epsilon) - \pi_n(f)$ обратим в $B_{[n]}^*$ (см. гл. 14 [5]). Тогда по лемме 1 элемент $\epsilon - f$ обратим в алгебре A^* .

Таким образом, I – квазирегулярный идеал алгебры A^* .

ЛЕММА 3. Пусть (A, Δ) – йорданова коалгебра с коединицей. Тогда $\text{Rad}(A^*) \subseteq \text{Corad}(A)^\perp$. Если B – конечномерная подкоалгебра в A , то $B \subseteq \text{Corad}(A)_{[n]}$ для некоторого числа n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – простая подкоалгебра в (A, Δ) . Поскольку коалгебра (A, Δ) – локально конечномерна, то C – конечномерная подкоалгебра. Фактор-алгебра $A^*/C^\perp$ изоморфна алгебре C^* , которая является простой конечномерной алгеброй. Поэтому $\text{Rad}(A^*) \subseteq C^\perp$. Следовательно, $R(A^*) \subseteq \text{Corad}(A)^\perp$.

Рассмотрим коалгебру (B, Δ) . Ее дуальная алгебра B^* конечномерна. Поэтому $\text{Rad}(B^*)$ – пересечение максимальных идеалов алгебры B^* . Отсюда получаем,

что $\text{Rad}(B^*) = \text{Corad}(B)^\perp$. Так как $\text{Rad}(B^*)^{[n]} = 0$ для некоторого числа n (см. гл. 15 [5]), то в силу предложения 3 получаем, что

$$0 = \text{Rad}(B^*)^{[n]} = (\text{Corad}(B)_{[n]})^\perp.$$

Следовательно, $B = \text{Corad}(B)_{[n]}$.

Как легко видеть, $\text{Corad}(B) \subseteq \text{Corad}(A)$. Индукцией по числу n получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Corad}(B)_{[n+1]} &= \wedge(\text{Corad}(B)_{[n]}, \text{Corad}(B)_{[n]}, \text{Corad}(B)_{[n]}) \\ &= ((\Delta \otimes id)\Delta)^{-1}(\text{Corad}(B)_{[n]} \otimes B \otimes B \\ &\quad + B \otimes \text{Corad}(B)_{[n]} \otimes B + B \otimes B \otimes \text{Corad}(B)_{[n]}) \\ &\subseteq ((\Delta \otimes id)\Delta)^{-1}(\text{Corad}(A)_{[n]} \otimes A \otimes A \\ &\quad + A \otimes \text{Corad}(A)_{[n]} \otimes A + A \otimes A \otimes \text{Corad}(A)_{[n]}) \\ &= \text{Corad}(A)_{[n+1]}. \end{aligned}$$

Следовательно, $B \subseteq \text{Corad}(A)_{[n]}$ для некоторого числа n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу леммы 3 достаточно доказать, что $\text{Corad}(A)^\perp$ – квазирегулярный идеал алгебры A^* . Для любого числа n положим $B_{[n]} = \text{Corad}(A)_{[n]}$. В силу предложения 3 $\{B_{[n]}\}$ – возрастающая последовательность подкоалгебр в A . По лемме 3 любая конечномерная подкоалгебра из A содержится в $\text{Corad}(A)_{[n]}$ для некоторого n . Поэтому $A = \bigcup_n^\infty B_{[n]}$. Применяя лемму 2, получаем, что $\text{Corad}(A)^\perp \subseteq \text{Rad}(A^*)$. По лемме 3 $\text{Rad}(A^*) \subseteq \text{Corad}(A)^\perp$.

Таким образом, $\text{Corad}(A)^\perp = \text{Rad}(A^*)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. G. Heyneman, D. E. Radford, “Reflexivity and coalgebras of finite type”, *J. Algebra*, **28** (1974), 215–246.
- [2] J. A. Anquela, T. Cortes, F. Montaner, “Nonassociative coalgebras”, *Comm. Algebra*, **22**:12 (1994), 4693–4716.
- [3] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Math. Lecture Note Series, W. A. Benjamin Inc., New York, 1969.
- [4] В. Н. Желябин, “Структуризуемые коалгебры”, *Алгебра и логика*, **35**:5 (1996), 529–542.
- [5] К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

В. Н. Желябин

Институт математики СО РАН

E-mail: vicnic@math.nsc.ru

Поступило

07.07.2005

Исправленный вариант

08.12.2005