Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Игнатъев, О. А. Игнатъев, А. А. Солиман, Об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений систем с импульсным воздействием, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 516–525

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:14:57

УДК 517.925

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. О. Игнатьев, О. А. Игнатьев, А. А. Солиман

В работе изучается устойчивость нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. С помощью метода функций Ляпунова получены критерии его асимптотической устойчивости и неустойчивости. Приведены иллюстративные примеры.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. При математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями во многих случаях длительностью возмущений удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят “мгновенный” характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К первым работам в этом направлении следует отнести [1], [2]. Итогом первых работ по дифференциальным уравнениям с импульсным воздействием явилась монография [3], в которой изложены основы этой теории. В последние годы заметно увеличилось число математических работ по исследованию различных аспектов теории импульсных систем [4]–[16], что вызвано запросами новейшей техники. Настоящая статья посвящена изучению устойчивости решений систем с импульсным воздействием. Она является продолжением и развитием работ [17], [18].

2. Определения и некоторые предварительные результаты. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x), & t &\neq \tau_k, \\ \Delta x &= I_k(x), & t &= \tau_k,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ – время, $k \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – это множество натуральных чисел), τ_k – константы, $x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Уравнения (2.1) описывают динамику системы, состоящей из двух частей: непрерывной (при $t \neq \tau_k$), описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, и дискретной (в моменты τ_k), когда решения системы получают скачкообразные изменения. Обозначим

$$B_H := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} < H \right\},$$

$$G_k := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau_{k-1} < t < \tau_k, x \in B_H\}, \quad G := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Сформулируем гипотезы (Г1)–(Г5), которым может удовлетворять система (2.1).

ГИПОТЕЗА (Г1). Функция $f = (f_1, \dots, f_n): G \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна в каждом из множеств G_k , $k \in \mathbb{N}$; $f(t, 0) \equiv 0$, и существует константа $L > 0$ такая, что $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$ при $(t, x) \in G$, $(t, y) \in G$, $x \in B_H$, $y \in B_H$.

ГИПОТЕЗА (Г2). Функции $I_k: B_H \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, непрерывны в B_H и $I_k(0) = 0$ при $k \in \mathbb{N}$.

ГИПОТЕЗА (Г3). Существует константа $h \in (0, H)$ такая, что если $x \in B_h$, то $x + I_k(x) \in B_H$ при $k \in \mathbb{N}$.

ГИПОТЕЗА (Г4). Константы τ_k удовлетворяют условиям

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty.$$

ГИПОТЕЗА (Г5). Константы τ_k удовлетворяют условию: для любых $T > 0$, $t > 0$ отрезок $[t, t + T]$ содержит не более p констант τ_k , причем число p зависит только от T и не зависит от t .

Будем обозначать $x(t, t_0, x_0)$ при $t > t_0$ решение системы (2.1), удовлетворяющее условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ в случае, если $t_0 \neq \tau_k$, $k \in \mathbb{N}$. Если же $t_0 = \tau_k$ при каком-либо натуральном k , то под выражением $x(t, t_0, x_0)$ будем понимать $x(t, t_0 + 0, x_0 + I_k(x_0))$ (при $t > t_0$).

При выполнении гипотез (Г1)–(Г3) система (2.1) допускает тривиальное решение

$$x \equiv 0. \quad (2.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Тривиальное решение системы (2.1) называется *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что если $\|x_0\| < \delta$, то $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Решение (2.2) системы (2.1) называется *притягивающим*, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\eta = \eta(t_0) > 0$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in B_\eta$ существует $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ такое, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \sigma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Тривиальное решение системы (2.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и притягивающее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Будем говорить, что функция $\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathcal{K}$ ($\omega \in \mathcal{K}$), если она непрерывна, строго возрастает и $\omega(0) = 0$.

Следуя [4], введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Будем говорить, что функция $V: \mathbb{R}_+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $\mathcal{V}_0$ ($V \in \mathcal{V}_0$), если V непрерывна на любом из множеств G_k , $V(t, 0) \equiv 0$ для $t \in \mathbb{R}_+$, существуют конечные пределы

$$V(t_0 - 0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t,x) \in G_k}} V(t, x), \quad V(t_0 + 0, x_0) = \lim_{\substack{(t,x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t,x) \in G_{k+1}}} V(t, x),$$

и справедливо равенство $V(t_0 - 0, x_0) = V(t_0, x_0)$.

Пусть $f(t, x)$ является C^{j-1} -функцией: $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$, а V является C^j -функцией $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Определим $V_s: \mathbb{R}_+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$V_s(t, x) := \frac{\partial V_{s-1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_{s-1}}{\partial x_i} f_i(t, x), \quad s = 1, 2, \dots, j,$$

при $t \neq \tau_k$ и $V_s(\tau_k, x) = V_s(\tau_k - 0, x)$, где $V_0(t, x) := V(t, x)$. В частности,

$$V_1(t, x) = \frac{dV}{dx} \Big|_{(2.1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Будем говорить, что функция $V: \mathbb{R}_+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу $\mathcal{V}_m$ ($V \in \mathcal{V}_m$), если V является m раз непрерывно-дифференцируемой на любом из множеств G_k и существуют конечные пределы

$$V_r(t_0 - 0, x_0) = \lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t, x) \in G_k}} V_r(t, x), \quad V_r(t_0 + 0, x_0) = \lim_{\substack{(t, x) \rightarrow (t_0, x_0) \\ (t, x) \in G_{k+1}}} V_r(t, x), \quad r = 0, 1, \dots, m.$$

Здесь $V_0 = V$.

В работах [10], [18] показано, что если система (2.1) такова, что выполнены гипотезы (Г1)–(Г4) и существуют функции $V \in \mathcal{V}_1$, $a, c \in \mathcal{K}$ такие, что

$$\begin{aligned} V(t, x) &\geq a(\|x\|) \quad \text{при} \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_H, \\ \frac{dV}{dt} \Big|_{(2.1)} &\leq -c(\|x\|) \quad \text{при} \quad (t, x) \in G, \\ V(\tau_k + 0, I_k(x) + x) - V(\tau_k, x) &\leq 0 \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

то решение (2.2) системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Целью настоящей работы является получение более мягких условий асимптотической устойчивости в предположении, что функция V удовлетворяет условию $dV/dt \leq 0$ вместо (2.3).

В дальнейшем нам потребуется следующая

ЛЕММА 2.1. Пусть $h(t)$ – скалярная функция, имеющая точки разрыва первого рода при

$$t = b_1, \quad t = b_2, \quad \dots, \quad \text{где} \quad 0 < b_1 < b_2 < \dots, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \infty,$$

причем $h(b_i - 0) = h(b_i)$, в каждом из интервалов (b_i, b_{i+1}) функция $h(t)$ является $j+1$ раз непрерывно-дифференцируемой, ее производные $h'(t), h''(t), \dots, h^{(j+1)}(t)$ ограничены при $t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [b_i, b_{i+1}]$, и выполняется условие: константы b_i удовлетворяют гипотезе (Г5) и выполнены предельные соотношения

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [h(b_i + 0) - h(b_i - 0)] = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} [h^{(r)}(b_i + 0) - h^{(r)}(b_i - 0)] = 0, \quad r = 1, \dots, j.$$

Если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0, \quad (2.4)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h^{(r)}(t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Под производными любого порядка в точках b_i будем понимать левосторонние производные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Покажем вначале, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) = 0. \quad (2.5)$$

Предположим противное: пусть существуют $\xi > 0$ и моменты времени $T_m \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$, такие, что $T_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$ и $|h'(T_m)| \geq 2\xi$. Это означает, что либо $h'(T_m) \geq 2\xi$, либо $h'(T_m) \leq -2\xi$. Из ограниченности $h''(t)$ и условия

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [h'(b_i + 0) - h'(b_i - 0)] = 0$$

следует, что существуют $\zeta > 0$ и $M_1 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$h'(t) \geq \frac{3}{2}\xi \quad (2.6)$$

или

$$h'(t) \leq -\frac{3}{2}\xi \quad (2.7)$$

при $t \in [T_m - \zeta, T_m + \zeta]$, $m \geq M_1$. Отсюда, воспользовавшись условиями леммы, получаем, что существует $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq M_1$, такое, что при $m \geq M_2$ выполняется условие

$$h(T_m + \zeta) \geq h(T_m) + \xi\zeta \quad (2.8)$$

в случае (2.6) или условие

$$h(T_m + \zeta) \leq h(T_m) - \xi\zeta \quad (2.9)$$

в случае (2.7). Из предельного соотношения (2.4) следует, что существует такое $M \geq T_{M_2} > 0$, что $|h(t)| < \xi\zeta/2$ при $t \geq M$. С другой стороны, из неравенств (2.8), (2.9) следует справедливость неравенств

$$|h(T_m + \zeta)| \geq \frac{1}{2}\xi\zeta \quad \text{при } m \in \mathbb{N}, \quad T_m \geq M.$$

Но эти неравенства противоречат предположению (2.4). Полученное противоречие доказывает справедливость предельного соотношения (2.5).

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h''(t) = 0, \quad \dots, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h^{(j)}(t) = 0.$$

Лемма доказана.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть система (2.1) такова, что $f \in C^j$ при $(t, x) \in G$, выполняются гипотезы (Г1)–(Г4) и существуют $V \in \mathcal{V}_{j+1}$, $w_1 \in \mathcal{K}$, $w_2 \in \mathcal{K}$ такие, что

- (А) $V(t, x) \geq w_1(\|x\|)$ при $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_H$;
- (Б) $V_1(t, x) = dV/dt \leq 0$ при $(t, x) \in G$;

- (В) $V_s(t, x)$, $s = 1, \dots, j + 1$, ограничены при $(t, x) \in G$;
 (Г) $\sum_{s=1}^j V_s^2(t, x) \geq w_2(\|x\|)$;
 (Д) $V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \leq 0$ при $x \in B_H$, $k \in \mathbb{N}$;
 (Е) константы τ_k удовлетворяют гипотезе (Г5) и справедливы предельные соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [V_r(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V_r(\tau_k, x)] = 0, \quad r = 0, 1, \dots, j,$$

равномерно по $x \in B_H$.

Тогда решение (2.2) системы (2.1) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий (А), (Б), (Д) в силу [18] следует, что решение (2.2) системы (2.1) устойчиво. Возьмем произвольные $\varepsilon \in (0, H)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $x_0 \in B_\delta$, где $\delta > 0$ таково, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$. Обозначим $v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0))$ ¹. Функция $v(t)$ положительна и не возрастает, следовательно, предел $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ существует и он неотрицателен:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \eta \geq 0. \quad (3.1)$$

Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = 0, \quad (3.2)$$

где $v_1(t) = V_1(t, x(t, t_0, x_0))$. Предположим противное, т.е. будем считать, что предельное соотношение (3.2) не выполняется. Тогда существуют $\beta > 0$ и последовательность $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ ($T_i \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{N}$, $T_{i+1} > T_i$, $T_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$) такая, что $v_1(T_i) \leq -2\beta < 0$. Согласно условиям (А), (Б), (В), (Е) теоремы существуют $\gamma > 0$ и $M_1 \in \mathbb{N}$ такие, что $v_1(t) \leq -\beta$ при $t \in [T_i, T_i + \gamma]$, $i \geq M_1$. Из условий (Б), (Д) следует, что

$$v(T_i + \gamma) \leq v(T_i) - \beta\gamma \quad (3.3)$$

при $i \geq M_1$. Так как

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v(T_i) = \eta,$$

то отсюда и из (3.3) следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v(T_i + \gamma) \leq \eta - \beta\gamma.$$

Но так как $T_i + \gamma \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, то полученное неравенство противоречит предельному соотношению (3.1). Полученное противоречие доказывает справедливость равенства (3.2).

Используя предельное соотношение (3.2) и лемму 2.1, получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^j v_s^2(t) = 0, \quad (3.4)$$

где $v_s(t) = V_s(t, x(t, t_0, x_0))$. Покажем теперь, что нулевое решение системы (2.1) является притягивающим. Для этого нужно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0. \quad (3.5)$$

¹Под $v(\tau_k)$ по-прежнему будем понимать $v(\tau_k - 0)$.

Предположим противное: пусть существуют $\alpha > 0$ и последовательность $\{t_i\}$ ($i \in \mathbb{N}$, $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$) такие, что $\|x(t_i, t_0, x_0)\| \geq \alpha$. Из условия (Г) следует, что

$$\sum_{s=1}^j v_s^2(t_i) \geq w_2(\|x(t_i, t_0, x_0)\|) \geq w_2(\alpha) > 0.$$

Полученное неравенство противоречит (3.4), откуда следует справедливость предельного соотношения (3.5). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если в доказанной теореме положить $j = 1$, $I_k(x) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in B_H$, то получаем известную теорему Марачкова [19].

Обозначим

$$Q_h := \{(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_h : V(t, x) > 0\}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что система (2.1) такова, что $f \in C^j$ при $(t, x) \in G$, выполняются гипотезы (Г1)–(Г4) и существуют функции $V \in \mathcal{V}_{j+1}$ и $w \in \mathcal{H}$ такие, что*

- (а) для любых $t \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in (0, H)$ множество Q_ε непусто;
- (б) $V(t, x), V_1(t, x), \dots, V_{j+1}(t, x)$ ограничены в Q_H ;
- (в) $dV/dt = V_1(t, x) \geq 0$ в Q_H ;
- (г) $\sum_{s=1}^j V_s^2(t, x) \geq w(V(t, x))$;
- (д) $\Delta V|_{t=\tau_k} = V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \geq 0$ при $x \in B_H$, $k \in \mathbb{N}$;
- (е) выполняется условие (Е) теоремы 3.1.

Тогда решение (2.2) системы (2.1) неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольные $\varepsilon \in (0, H)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, и пусть δ – сколько угодно малое положительное число. Покажем, что существуют $x_0 \in B_\delta$ и $t_1 > t_0$ такие, что $\|x(t_1, t_0, x_0)\| \geq \varepsilon$. Выберем $x_0 \in B_\delta$ таким образом, что $V(t_0, x_0) > 0$. Такой выбор возможен в силу условия (а).

Предположим противное: при любом $t > t_0$ выполняется неравенство

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad (3.6)$$

откуда следует, что $(t, x) \in Q_\varepsilon$ и функция $V(t, x(t, t_0, x_0))$ ограничена. Из условий (в), (д) имеем

$$v(t) = V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq V(t_0, x_0) = \beta > 0.$$

Функция $v(t)$ ограничена и неубывает, следовательно, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \eta \geq \beta > 0.$$

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 3.1, можно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_s(t) = 0, \quad s = 1, \dots, j,$$

где $v_s = V_s(t, x(t, t_0, x_0))$, откуда получаем, что имеет место предельное соотношение (3.4). Из условия (г) следует, что

$$\sum_{s=1}^j v_s^2(t) = \sum_{s=1}^j V_s^2(t, x(t, t_0, x_0)) \geq w(V(t, x(t, t_0, x_0))) \geq w(\beta) > 0 \quad (3.7)$$

при $t \geq t_0$. Однако соотношения (3.4) и (3.7) противоречат друг другу. Полученное противоречие показывает, что предположение (3.6) неверно, т.е. решение (2.2) системы (2.1) неустойчиво.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - a(t)x, & \frac{dy}{dt} &= x, & t &\neq \tau_k, k = 1, 2, \dots, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= -\frac{x}{k}, & \Delta y|_{t=\tau_k} &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $a(t) = 2 - \cos 2\pi t - \cos(2\pi \log_2(t+1))$, $\tau_k = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Система (3.8) допускает тривиальное решение

$$x = 0, \quad y = 0. \quad (3.9)$$

Для исследования устойчивости этого решения воспользуемся функцией Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Находим последовательно

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{dV}{dt} = -a(t)x^2, & V_2 &= \frac{dV_1}{dt} = (2a^2 - a')x^2 + 2axy, \\ V_3 &= \frac{dV_2}{dt} = (6aa' - a'' - 4a^3 + 2a)x^2 + (4a' - 6a^2)xy - 2ay^2, \\ V_4 &= \frac{dV_3}{dt} = (6a'^2 + 8aa'' - a''' - 24a^2a' + 6a' + 8a^4 - 10a^2)x^2 \\ &\quad + (-28aa' + 6a'' + 14a^3 - 8a)xy + (6a^2 - 6a')y^2, \\ V_5 &= \frac{dV_4}{dt} = (20a'a'' + 10aa''' - a'''' - 60aa'^2 - 40a^2a'' + 12a'' \\ &\quad + 80a^3a' - 60aa' - 16a^5 + 34a^3 - 8a)x^2 \\ &\quad + (-40a'^2 - 50aa'' + 8a''' + 118a^2a' - 32a' - 30a^4 + 40a^2)xy \\ &\quad + (40aa' - 12a'' - 14a^3 + 8a)y^2. \end{aligned}$$

Производные функции $a(t)$ имеют следующий вид:

$$a^{(s)}(t) = \alpha_s(t) + \beta_s \frac{\sin(2\pi \log_2(t+1))}{(t+1)^s} + \gamma_s \frac{\cos(2\pi \log_2(t+1))}{(t+1)^s},$$

где $\beta_s, \gamma_s, s \in \mathbb{N}$, — это константы, причем $\beta_1 = 2\pi/\ln 2$, $\gamma_1 = 0$,

$$\alpha_1 = 2\pi \sin 2\pi t, \quad \alpha_2 = (2\pi)^2 \cos 2\pi t, \quad \alpha_3 = -(2\pi)^3 \sin 2\pi t, \quad \alpha_4 = -(2\pi)^4 \cos 2\pi t.$$

Функция $a(t)$ неотрицательна, причем $a(t) = 0$ при $t = t_n = 2^n - 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Рассмотрим функцию $W = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2$. Покажем, что $W(t, x, y)$ — функция определено-положительная относительно x и y . Покажем вначале, что функция $W(t_n, x, y)$ определено-положительна. Учитывая $a(t_n) = 0$, $a'(t_n) = 0$, находим последовательно:

$$\begin{aligned} V_1(t_n, x, y) &= 0, & V_2(t_n, x, y) &= 0, & V_3(t_n, x, y) &= -a''(t_n)x^2, \\ V_4(t_n, x, y) &= -a'''(t_n)x^2 + 6a''(t_n)xy, \\ V_5(t_n, x, y) &= (-a''''(t_n) + 12a''(t_n))x^2 + 8a'''(t_n)xy - 12a''(t_n)y^2. \end{aligned}$$

Заметим, что $\gamma_2 = (2\pi)^2 / \ln^2 2 > 0$, откуда получаем, что

$$a''(t_n) > (2\pi)^2. \quad (3.10)$$

Используя (3.10), получаем

$$W(t_n, x, y) \geq V_3^2(t_n, x, y) + V_5^2(t_n, x, y) \geq (2\pi)^4 x^4 + V_5^2(t_n, x, y).$$

Учитывая, что $V_5(t_n, 0, y) = -12a''(t_n)y^2$, и используя неравенство (3.10), можно сделать вывод, что $W(t_n, x, y) > 2w(x^2 + y^2)$, где $w \in \mathcal{K}$. Функции $a(t)$ и $a^{(s)}(t)$, $s = 1, 2, 3, 4$, являются равномерно непрерывными при $t \in \mathbb{R}_+$, поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$W(t, x, y) \geq w(x^2 + y^2) \quad (3.11)$$

при $t_n - \varepsilon \leq t \leq t_n + \varepsilon$. Покажем, что при

$$t \notin [t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon] \quad (3.12)$$

функция W также удовлетворяет свойству (3.11) при любом $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что при условии (3.12) существует $\omega > 0$ такое, что $a(t) > \omega$. Оценим W при таких t :

$$\begin{aligned} W(t, x, y)|_{t \notin [t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon]} &\geq (V_1^2 + V_3^2)|_{t \notin [t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon]} \geq \psi(t, x, y) \\ &= \omega^2 x^4 + [(6aa' - a'' - 4a^3 + 2a)x^2 + (4a' - 6a^2)xy - 2ay^2]^2. \end{aligned}$$

Найдем $\psi(t, x, y)$ при $x = 0$:

$$\psi(t, 0, y) = 4a^2(t)y^4 > 4\omega^2 y^4.$$

Отсюда, учитывая, что $a(t)$, $a'(t)$, $a''(t)$ – функции, ограниченные при $t \in \mathbb{R}_+$, получаем, что при $t \notin [t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon]$ функция W положительно определена относительно x, y . Следовательно, существует $w \in \mathcal{K}$ такая, что выполняется неравенство (3.11) при $t \in \mathbb{R}_+$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Найдем теперь

$$\Delta V|_{t=\tau_k} = \frac{1}{2}[(x + \Delta x|_{t=\tau_k})^2 + (y + \Delta y|_{t=\tau_k})^2] - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = -\frac{x^2}{k} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq 0.$$

Заметим, что $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6 := dV_5/dt$ можно представить в виде

$$V_m = F_m(t)x^2 + P_m(t)xy + Q_m(t)y^2, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

где F_m, P_m, Q_m – ограниченные непрерывные функции t . Следовательно, эти функции ограничены при $x^2 + y^2 < H^2$, и

$$\begin{aligned} \Delta V_m|_{t=\tau_k} &= F_m(\tau_k)[(x + \Delta x|_{t=\tau_k})^2 - x^2] + P_m(\tau_k)[(x + \Delta x|_{t=\tau_k})(y + \Delta y|_{t=\tau_k}) - xy] \\ &\quad + Q_m(\tau_k)[(y + \Delta y|_{t=\tau_k})^2 - y^2] = -F_m(\tau_k)\frac{x^2}{k} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) - P_m(\tau_k)\frac{xy}{k}, \end{aligned}$$

откуда получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta V_m|_{t=\tau_k} = 0$, $m = 1, \dots, 5$.

Таким образом, условия (А)–(Д), (Е1) теоремы 3.1 выполнены, и можно утверждать, что решение (3.9) системы (3.8) асимптотически устойчиво.

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + a(t)x, & \frac{dy}{dt} &= x, & t \neq \tau_k, & k = 1, 2, \dots, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= \frac{x}{k}, & \Delta y|_{t=\tau_k} &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $a(t)$ такая же, как в предыдущем примере. Система (3.13) допускает нулевое решение (3.9). Покажем, что оно неустойчиво. Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Находим

$$\frac{dV}{dt} = a(t)x^2 \geq 0, \quad \Delta V|_{t=\tau_k} = \frac{x^2}{k} + \frac{x^2}{2k^2} \geq 0.$$

Аналогично предыдущему примеру можно показать, что существует такая $w \in \mathcal{K}$, что $W = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2 \geq w(x^2 + y^2)$. То есть все условия теоремы 3.2 выполнены, следовательно, нулевое решение системы (3.13) неустойчиво.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис, “Об устойчивости движения при наличии толчков”, *Сиб. матем. ж.*, **1**:2 (1960), 233–237.
- [2] А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко, “Системы с толчками в заданные моменты времени”, *Матем. сб.*, **74**:2 (1967), 202–208.
- [3] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев, 1987.
- [4] D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications*, Halsted Press, New York–Chichester–Brisbane–Toronto, 1989.
- [5] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore–New Jersey–London, 1989.
- [6] V. Lakshmikantham, X. Liu, “On quasi stability for impulsive differential systems”, *Nonlinear Analysis*, **13**:7 (1989), 819–829.
- [7] A. Cabada, E. Liz, “Discontinuous impulsive differential equations with nonlinear boundary conditions”, *Nonlinear Analysis*, **28**:9 (1997), 1491–1497.
- [8] Р. И. Гладиллина, А. О. Игнатьев, “О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости для импульсных систем”, *Укр. матем. ж.*, **55**:8 (2003), 1035–1043.
- [9] Р. И. Гладиллина, А. О. Игнатьев, “Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием”, *Матем. заметки*, **76**:1 (2004), 44–51.
- [10] А. О. Игнатьев, “Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием”, *Матем. сб.*, **194**:10 (2003), 117–132.
- [11] S. D. Borysenko, G. Iovane, P. Giordano, “Investigations of the properties motion for essential nonlinear systems perturbed by impulses on some hypersurfaces”, *Nonlinear Anal.*, **62** (2005), 345–363.
- [12] А. А. Бойчук, Н. А. Перестюк, А. М. Самойленко, “Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях”, *Дифференц. уравнения*, **27**:9 (1991), 1516–1521.

- [13] A. A. Soliman, “Stability criteria of impulsive differential systems”, *Appl. Math. Comput.*, **134** (2003), 445–457.
- [14] S. Hu, V. Lakshmikantham, “Periodic boundary value problems for second order impulsive differential systems”, *Nonlinear Analysis*, **13**:1 (1989), 75–87.
- [15] K. K. Kenzhebaev, A. N. Stanzhetskii, “Invariant sets of impulsive systems and their stability”, *Nonlinear Oscillations*, **7**:1 (2004), 78–82.
- [16] A. A. Soliman, “On cone perturbing Liapunov function for impulsive differential systems”, *Appl. Math. Comput.*, **163** (2005), 1069–1071.
- [17] A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore–New Jersey–London, 1995.
- [18] С. И. Гургула, Н. А. Перестюк, “Об устойчивости положения равновесия импульсных систем”, *Матем. физика*, **31** (1982), 9–14.
- [19] В. П. Марачков, “Об одной теореме устойчивости”, *Изв. физ.-матем. общ-ва и научно-исслед. ин-та матем. и механ. при Казанском ун-те. Сер. 3*, **12** (1940), 171–174.

А. О. Игнатьев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
Донецк, Украина

E-mail: mila@budinf.donetsk.ua, aoignat@mail.ru,
ignat@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило

26.07.2005

Исправленный вариант

08.02.2006

О. А. Игнатьев

Kent State University, Kent, Ohio, USA

E-mail: aignatye@kent.edu

А. А. Солиман (A. A. Soliman)

Benha University, Kalubia, Egypt

E-mail: a_a_soliman@hotmail.com