Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Коленова, А. М. Себельдин, Об изоморфности абелевой группы своей группе эндоморфизмов, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 536–545

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:32:47

УДК 512.541

ОБ ИЗОМОРФНОСТИ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ СВОЕЙ ГРУППЕ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Е. М. Коленова, А. М. Себельдин

В работе получены необходимые и достаточные условия изоморфности абелевой группы A и группы эндоморфизмов $\text{End}(A)$. Рассмотрены классы периодических абелевых групп, делимых абелевых групп, нередуцированных абелевых групп и редуцированных алгебраически компактных абелевых групп. Для некоторых классов абелевых групп в настоящей работе решена задача изоморфности группы и ее группы эндоморфизмов при условии, что сама группа эндоморфизмов этим свойством обладает.

Библиография: 5 названий.

Важной задачей теории абелевых групп является изучение связей между абелевой группой и ее группой эндоморфизмов. Естественным образом возникает вопрос, при каких условиях абелева группа и ее группа эндоморфизмов изоморфны (см. [1; проблема 31], [2; проблемы 40, 45]). Ответ на этот вопрос получен Себельдиным в классах вполне разложимых абелевых групп [3], векторных групп [4]. В настоящей работе задача изоморфности абелевой группы A и ее группы эндоморфизмов $\text{End}(A)$ решена в классах периодических абелевых групп (теорема 1), делимых абелевых групп (теорема 2), нередуцированных абелевых групп (теорема 3), редуцированных алгебраически компактных абелевых групп (теорема 4). В каждом случае получены условия, необходимые и достаточные для изоморфизма $\text{End}(A) \cong A$. Для некоторых классов абелевых групп в настоящей работе решена задача изоморфности группы и ее группы эндоморфизмов при условии, что сама группа эндоморфизмов обладает этим свойством.

Все группы, рассматриваемые в работе абелевы. Для простоты изложения определим некоторые используемые в работе понятия и обозначения:

$\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел;

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup 0$, где $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел; $P \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$;

$T(A)$ – периодическая часть группы A ;

$r(A)$ – ранг группы A ;

$r(0, A)$ – ранг без кручения группы A ;

$S(A)$ – множество всех тех простых p , для которых периодическая p -компонента группы A ненулевая;

$P(A)$ – множество всех тех простых p , для которых p -адическая компонента редуцированной алгебраически компактной группы A ненулевая.

Пусть $D(A)$ – делимая часть группы A , тогда $A = D(A) \oplus R(A)$; назовем дополнительное прямое слагаемое $R(A)$, определенное с точностью до изоморфизма, *редуцированной частью* группы A .

Делимая часть $D(A)$, в свою очередь, также разлагается:

$$D(A) = Dt(A) \oplus Df(A), \quad \text{где } Dt(A) = T(D(A)),$$

а дополнительное прямое слагаемое $Df(A)$, определенное с точностью до изоморфизма, будем называть *частью без кручения* делимой группы $D(A)$. Далее везде, где будет удобно и не вызовет недоразумений, вместо $D(A)$, $Df(A)$ и $Dt(A)$, будем использовать соответственно обозначения D , Df и Dt .

Остальные обозначения соответствуют [1] или вводятся по ходу изложения.

Для периодических групп ответ на поставленный вопрос получить несложно (см. замечание к проблеме 31 книги [1]). А именно, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Периодическая группа изоморфна своей группе эндоморфизмов тогда и только тогда, когда она циклическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале A – p -группа и имеет место изоморфизм $\text{End}(A) \cong A$, тогда A – конечная группа [1; с. 215] и поэтому является прямой суммой конечного числа циклических групп [1; с. 95]. Таким образом,

$$A \cong \bigoplus_{k \in K} \mathbb{Z}(p^k),$$

где K – некоторое конечное семейство натуральных чисел (не обязательно различных). Покажем, что $|K| = 1$. На самом деле, с одной стороны

$$\text{End}(A) \cong \text{End}\left(\bigoplus_{k \in K} \mathbb{Z}(p^k)\right) \cong \bigoplus_{k', k'' \in K} \text{Hom}(\mathbb{Z}(p^{k'}), \mathbb{Z}(p^{k''})) \cong \bigoplus_{k^* \in K^*} \mathbb{Z}(p^{k^*}),$$

где $k^* = \min\{k', k''\}$, а с другой стороны,

$$\text{End}(A) \cong A \cong \bigoplus_{k \in K} \mathbb{Z}(p^k).$$

Откуда следует, что $|K| = |K^*|$. А это возможно, если только $|K| = 1$. Итак, $A \cong \mathbb{Z}(p^k)$, т.е. является конечной циклической группой.

Пусть теперь A – периодическая группа и $\text{End}(A) \cong A$. Известно, что периодическая группа может быть разложена, притом единственным способом, в прямую сумму примарных групп Ap , относящихся к различным простым числам [1; с. 55], поэтому $A = \bigoplus_{p \in S(A)} Ap$. Имеем [1; с. 214]

$$\text{End}(A) \cong \text{End}\left(\bigoplus_{p \in S(A)} Ap\right) \cong \prod_{p \in S(A)} \text{End}(Ap)$$

и, следовательно,

$$\text{End}(A) \cong \bigoplus_{p \in S(A)} Ap.$$

Следовательно, $S(A)$ – конечное множество и для любого p из $S(A)$ выполняется изоморфизм $\text{End}(Ap) \cong Ap$. Но это возможно лишь только в том случае, когда каждая p -компонента Ap группы A является циклической группой, т.е. A является циклической группой.

Обратно, если A – циклическая группа, то, очевидно, имеет место изоморфизм $\text{End}(A) \cong A$.

Случай делимых групп также несложен. A именно, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Делимая группа изоморфна своей группе эндоморфизмов в том и только том случае, когда она изоморфна аддитивной группе рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность* очевидна.

Необходимость. Пусть A – делимая группа и $\text{End}(A) \cong A$. Так как группа A делимая, то $\text{End}(A)$ – группа без кручения [1; с. 213], а поскольку $\text{End}(A) \cong A$, то и группа A – группа без кручения. Получаем, что A – делимая группа без кручения, поэтому она является прямой суммой групп, изоморфных группе рациональных чисел:

$$A \cong \bigoplus_{r(A)} \mathbb{Q}.$$

Имеем, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \text{End}(A) &\cong \text{End}\left(\bigoplus_{r(A)} \mathbb{Q}\right) = \text{Hom}\left(\bigoplus_{r(A)} \mathbb{Q}, \bigoplus_{r(A)} \mathbb{Q}\right) \\ &\cong \prod_{r(A)} \text{Hom}\left(\mathbb{Q}, \bigoplus_{r(A)} \mathbb{Q}\right) \cong \prod_{r(A)} \left[\bigoplus_{r(A)} \mathbb{Q}\right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, по условию

$$\text{End}(A) \cong A \cong \bigoplus_{r(A)} \mathbb{Q}.$$

Следовательно, $r(A) = 1$ и $A \cong \mathbb{Q}$.

ТЕОРЕМА 3. *Нередуцированная группа изоморфна своей группе эндоморфизмов тогда и только тогда, когда ее делимая часть изоморфна группе рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а редуцированная часть либо равна нулю, либо конечная циклическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = D(A) \oplus R(A)$ – нередуцированная группа, т.е. $D(A)$ отлична от нуля. В силу теоремы 2 достаточно рассмотреть случай, когда $R(A)$ отлична от нуля.

Достаточность. Если $D(A) \cong \mathbb{Q}$ и $R(A) \cong \mathbb{Z}(n)$, то

$$\text{End}(A) \cong \text{End}(\mathbb{Q}) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}(n)) \oplus \text{End}(\mathbb{Z}(n)) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}(n), \mathbb{Q}).$$

А так как $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}(n))$ и $\text{Hom}(\mathbb{Z}(n), \mathbb{Q})$ – нулевые группы, то получаем, что $\text{End}(A) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}(n)$, т.е. $\text{End}(A) \cong A$.

Необходимость. Пусть для группы $A = D(A) \oplus R(A)$ ($D(A) \neq 0$ и $R(A) \neq 0$) выполняется изоморфизм $\text{End}(A) \cong A$. Тогда

$$\text{End}(A) \cong \text{Hom}(Df(A), A) \oplus \text{Hom}(Dt(A), A) \oplus \text{Hom}(R(A), A).$$

Так как группа $Df(A)$ делимая без кручения, то

$$Df(A) \cong \bigoplus_{r(0, D(A))} \mathbb{Q}$$

и

$$\text{Hom}(Df(A), A) \cong \prod_{r(0, D(A))} \text{Hom}(\mathbb{Q}, A).$$

Заметим, что ранг без кручения $r(0, D(A))$ может быть только конечным, иначе равенство $|Df(\text{End}(A))| = |Df(A)|$ не выполняется. Имеем

$$\text{Hom}(Df(A), A) \cong \bigoplus_r \mathbb{Q} \oplus \text{Hom}(Df(A), Dt(A)),$$

где $r = [r(0, D(A))]^2$, а группа $\text{Hom}(Df(A), A)$ делимая без кручения [1; с. 213]. А поскольку $\text{End}(A) \cong A$, то

$$\bigoplus_r \mathbb{Q} \oplus \text{Hom}(Df(A), Dt(A)) \cong \bigoplus_{r(0, D(A))} \mathbb{Q},$$

откуда следует, что $r(0, D(A)) \leq 1$ и $\text{Hom}(Df(A), Dt(A)) = 0$.

Таким образом, возможны только два случая:

$$r(0, D(A)) = 1 \quad \text{или} \quad r(0, D(A)) = 0.$$

Случай 1. Пусть ранг без кручения $r(0, D(A))$ группы $D(A)$ равен 1, т.е. $Df(A) \cong \mathbb{Q}$. Тогда из изоморфизма

$$\text{Hom}(Df(A), Dt(A)) \cong \text{Hom}(\mathbb{Q}, Dt(A)) = 0,$$

следует, что $Dt(A) = 0$. В этом случае делимая часть $D(A)$ группы A изоморфна $\mathbb{Q}$, и тогда

$$A \cong \mathbb{Q} \oplus R(A) \quad \text{и} \quad \text{End}(A) \cong \mathbb{Q} \oplus \text{Hom}(R(A), A).$$

Рассмотрим группу $\text{Hom}(R(A), \mathbb{Q})$, которая, с одной стороны, является делимой группой [1; с. 213], а с другой стороны, – подгруппой группы $\text{Hom}(R(A), A)$. Однако $D(\text{End}(A)) \cong D(A) \cong \mathbb{Q}$, значит, $\text{Hom}(R(A), \mathbb{Q}) = 0$, и поэтому ранг без кручения $r(0, R(A))$ группы $R(A)$ равен нулю, т.е. $R(A)$ – периодическая группа. Следовательно,

$$\text{Hom}(R(A), A) \cong \text{Hom}(R(A), \mathbb{Q} \oplus R(A)) \cong \text{End}(R(A)) \cong R(\text{End}(A)) \cong R(A).$$

Теперь, применяя теорему 1 для периодической группы $R(A)$, делаем вывод, что она является циклической.

Итак, в случае, когда $Df(A) \neq 0$ и $R(A) \neq 0$, изоморфизм $A \cong \text{End}(A)$ влечет $A \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}(n)$.

Случай 2. Пусть теперь ранг без кручения $r(0, D(A))$ группы $D(A)$ равен нулю, т.е. $D(A)$ – ненулевая периодическая группа. Покажем, что в этом случае группа A не изоморфна своей группе эндоморфизмов $\text{End}(A)$ (напомним, что $R(A) \neq 0$). Далее, в доказательстве этой теоремы положим $D = D(A)$.

Так как группа D делимая периодическая, то

$$D \cong \bigoplus_{p \in S(D)} \left(\bigoplus_{r(p,D)} \mathbb{Z}(p^\infty) \right) = \bigoplus_{p \in S(D)} Dp.$$

Группа $\text{End}(D)$ – редуцированная алгебраически компактная группа [1; с. 226]. Следовательно, в силу изоморфизма

$$D \oplus R(A) = A \cong \text{End}(A) = \text{Hom}(R(A), D) \oplus \text{End}(D) \oplus \text{End}(R(A))$$

группа $\text{Hom}(R(A), D)$ отлична от нуля и содержит в качестве прямого слагаемого группу, изоморфную D . Пусть

$$\text{Hom}(R(A), D) \cong D \oplus H_1.$$

Тогда

$$R(A) \cong H_1 \oplus \text{End}(D) \oplus \text{End}(R(A)).$$

Ясно [1; с. 233], что для любого p из $S(D)$, $\text{Hom}(R(A), Dp) \neq 0$, где

$$Dp = \bigoplus_{r(p,D)} \mathbb{Z}(p^\infty)$$

– p -компонента группы D . Зафиксируем $p \in S(D)$, и пусть $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ – p -базисная подгруппа группы $R(A)$, где $B_0 = \bigoplus_{m(0)} \mathbb{Z}$, $B_n = \bigoplus_{m(n)} \mathbb{Z}(p^n)$, $m(0)$ и $m(n)$ – некоторые кардиналы, $n \in \mathbb{N}$. Согласно [1; с. 233] $m(0) \neq 0$ и

$$\text{Hom}(B_0, Dp) \cong \prod_{m(0)} Dp$$

– делимое прямое слагаемое группы $\text{Hom}(R(A), Dp)$ и, следовательно, группы A , точнее, группы Dp и, разумеется, с точностью до изоморфизма. Ясно [1; с. 233], что $m(0)$ – конечный кардинал (иначе мощность группы $\prod_{m(0)} Dp$ больше мощности группы Dp).

Предположим сначала, что p -ранг $r(p, D)$ группы D бесконечен, и пусть $\text{End}(A) \cong A$. В этом случае в группе $\text{End}(D)$, а следовательно, и в $R(A)$ можно выделить в качестве прямых слагаемых $m(0) + 1$ прямое слагаемое, изоморфное аддитивной группе $\mathbb{J}_p$ целых p -адических чисел. Однако p -базисная подгруппа такого прямого слагаемого, а следовательно, и группы $R(A)$ содержит свободное прямое слагаемое ранга большего, чем $m(0)$. Получаем противоречие со строением группы B_0 .

Пусть теперь p -ранг $r(p, D)$ группы D конечен. Тогда ясно, что $m(0) = 1$. Далее, поскольку D – периодическая делимая группа, то в ней можно выделить в качестве прямого слагаемого группу, изоморфную $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Но тогда, учитывая, что $\text{End}(\mathbb{Z}(p^\infty)) \cong \mathbb{J}_p$, получаем, что

$$\text{End}(D) \cong \mathbb{J}_p \oplus H_2.$$

А так как имеет место изоморфизм $\text{End}(A) \cong A$, то и в редуцированной части $R(A)$ группы A в качестве прямого слагаемого можно выделить подгруппу, изоморфную $\mathbb{J}_p$:

$$R(A) \cong \mathbb{J}_p \oplus R_1.$$

Но тогда, так как $\text{End}(\mathbb{J}_p) \cong \mathbb{J}_p$, получаем

$$\text{End}(R(A)) \cong \mathbb{J}_p \oplus H_3.$$

Теперь

$$A \cong \text{End}(A) \cong \mathbb{J}_p \oplus H_1 \oplus \text{Hom}(R(A), D) \oplus \mathbb{J}_p \oplus H_3.$$

Откуда, учитывая, что базисной подгруппой группы $\mathbb{J}_p \oplus \mathbb{J}_p$ является свободная группа ранга 2, снова получаем противоречие с равенством $m(0) = 1$.

Пусть теперь A – редуцированная алгебраически компактная группа. В этом случае, согласно [1; с. 196], группа имеет вид

$$A = \prod_{p \in P(A)} A_p,$$

где A_p – p -адические компоненты группы A , $P(A) \subseteq \mathbb{P}$.

ТЕОРЕМА 4. *Редуцированная алгебраически компактная группа $A = \prod_{p \in P(A)} A_p$ изоморфна своей группе эндоморфизмов $\text{End}(A)$ тогда и только тогда, когда для любого простого p из $P(A)$ $A_p \cong \mathbb{J}_p$ или $A_p \cong \mathbb{Z}(p^k)$, $k = k(p) \in \mathbb{N}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A = \prod_{p \in P(A)} A_p$$

– редуцированная алгебраически компактная группа. Согласно [1; с. 215] ее группа эндоморфизмов имеет вид

$$\text{End}(A) \cong \prod_{p \in P(A)} \text{End}(A_p),$$

где каждая группа $\text{End}(A_p)$ является p -адической алгебраически компактной группой [1; с. 236]. Таким образом, группы A и $\text{End}(A)$ изоморфны тогда и только тогда, когда для любого простого $p \in P(A)$ изоморфны группы A_p и $\text{End}(A_p)$. Покажем, что изоморфизм $A_p \cong \text{End}(A_p)$ имеет место в том и только том случае, когда выполнены условия теоремы.

Достаточность. Пусть редуцированная алгебраически компактная группа $A = \prod_{p \in P(A)} A_p$ удовлетворяет условиям теоремы. Покажем, что для любого простого p из $P(A)$ имеет место изоморфизм $A_p \cong \text{End}(A_p)$.

Действительно, если $A_p \cong \mathbb{J}_p$, то

$$\text{End}(A_p) \cong \text{End}(\mathbb{J}_p) \cong \mathbb{J}_p \cong A_p.$$

Если же $A_p \cong \mathbb{Z}(p^k)$, $k = k(p) \in \mathbb{N}$, то

$$\text{End}(A) \cong \text{End}(\mathbb{Z}(p^k)) \cong \mathbb{Z}(p^k) \cong A_p.$$

Необходимость. Пусть для любого простого p из $P(A)$ имеет место изоморфизм $A_p \cong \text{End}(A_p)$. Покажем, что в этом случае редуцированная алгебраически компактная группа $A = \prod_{p \in P(A)} A_p$ удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть $B = \bigoplus_{n \in N^*} B_n$ – p -базисная подгруппа группы Ap , где

$$B_0 = \bigoplus_{m(0)} \mathbb{Z}, \quad B_n = \bigoplus_{m(n)} \mathbb{Z}(p^n),$$

$m(0)$ и $m(n)$ – некоторые кардиналы, $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу [1; с. 237] имеет место изоморфизм

$$\text{End}(Ap) \cong \text{Hom}(B, Ap).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Ap &\cong \text{End}(Ap) \cong \text{Hom}\left(\bigoplus_{m(0)} \mathbb{Z}, Ap\right) \oplus \text{Hom}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n, Ap\right) \\ &\cong \prod_{m(0)} \text{Hom}(\mathbb{Z}, Ap) \oplus \prod_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}\left(\bigoplus_{m(n)} \mathbb{Z}(p^n), Ap\right) \\ &\cong \prod_{m(0)} Ap \oplus \prod_{n \in \mathbb{N}} \prod_{m(n)} \text{Hom}(\mathbb{Z}(p^n), Ap). \end{aligned}$$

Ясно, что $m(0)$ – конечный кардинал (иначе $|\prod_{m(0)} Ap| > |Ap|$).

Таким образом, группа Ap имеет вид

$$Ap \cong \bigoplus_{m(0)} \mathbb{J}_p \oplus B^* \cong \prod_{m(0)} Ap \oplus \prod_{n \in \mathbb{N}} \prod_{m(n)} \text{Hom}(\mathbb{Z}(p^n), Ap),$$

где B^* – редуцированная алгебраически компактная группа, p -базисная подгруппа которой не содержит свободных прямых слагаемых. Тогда

$$\begin{aligned} \text{End}(Ap) &\cong \bigoplus_{m(0)} \bigoplus_{m(0)} \mathbb{J}_p \oplus \text{End}(B^*) \oplus \text{Hom}\left(B^*, \bigoplus_{m(0)} \mathbb{J}_p\right) \oplus \text{Hom}\left(\bigoplus_{m(0)} \mathbb{J}_p, B^*\right) \\ &\cong Ap \cong \bigoplus_{m(0)} \mathbb{J}_p \oplus B^*. \end{aligned}$$

Следовательно, $m(0) \leq 1$.

Если $m(0) = 0$, то

$$Ap = B^* \cong \text{End}(B^*) = \text{End}(Ap).$$

Рассмотрим p -базисную подгруппу группы B^* :

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}'} \bigoplus_{m(n)} \mathbb{Z}(p^n),$$

где $\mathbb{N}'$ – подмножество множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, $m(n)$ – некоторые ненулевые кардиналы, $n \in \mathbb{N}'$. Тогда

$$Ap = B^* \cong \text{End}(B^*) = \text{Hom}(B^*, B^*) \cong \text{Hom}(B, B^*) \cong \text{End}(Ap).$$

Далее [1; с. 163],

$$\text{Hom}(B, B^*) \cong \prod_{n \in \mathbb{N}'} \prod_{m(n)} \text{Hom}(\mathbb{Z}(p^n), B^*) = \prod_{n \in \mathbb{N}'} \prod_{m(n)} \text{Hom}(\mathbb{Z}(p^n), B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus B^*).$$

Следовательно [5], группа $\text{End}(B^*)$ содержит прямое слагаемое вида

$$\prod_{n \in \mathbb{N}'} \prod_{m(n)} \text{Hom}(\mathbb{Z}(p^n), B_1 \oplus \cdots \oplus B_n) \cong \prod_{n \in \mathbb{N}'} \prod_{m(n)} (B_1 \oplus \cdots \oplus B_n)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}'$. Откуда получаем, что $m(n) = 1$ и $|N'| = 1$, т.е.

$$Ap = B^* \cong \mathbb{Z}(p^n).$$

Если $m(0) = 1$, то

$$Ap \cong \mathbb{J}_p \oplus B^* \cong \text{End}(Ap) \cong \text{Hom}(\mathbb{J}_p, B^*) \oplus \text{End}(\mathbb{J}_p) \oplus \text{End}(B^*) \oplus \text{Hom}(B^*, \mathbb{J}_p).$$

Следовательно, группа $\text{End}(B^*)$ изоморфна прямому слагаемому группы B^* [1; с. 200] и, следовательно, рассуждая как в предыдущем случае, получаем $B^* \cong \mathbb{Z}(p^n)$. Однако [1; с. 237], учитывая, что

$$\text{Hom}(\mathbb{J}_p, B^*) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, B^*) \cong B^*,$$

получим противоречие с изоморфизмом $Ap \cong \text{End}(Ap)$. Таким образом, B^* нулевая, и, так как $m(0) = 1$, то $Ap \cong \mathbb{J}_p$.

Ясно, что если группа A изоморфна своей группе эндоморфизмов $\text{End}(A)$, то и сама группа $\text{End}(A)$ обладает этим же свойством. Обратная импликация, как будет показано ниже, не всегда имеет место. Группу A будем называть *End-группой*, если имеет место следующая импликация:

$$\text{End}(\text{End}(A)) \cong \text{End}(A) \implies \text{End}(A) \cong A.$$

ТЕОРЕМА 5. *Периодическая группа A не является End-группой тогда и только тогда, когда либо существует p -компонента группы A , изоморфная группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$, либо группа A изоморфна группе $\bigoplus_{p \in S(A)} \mathbb{Z}(p^k)$, $k = k(p) \in \mathbb{N}$, где $S(A)$ – любое бесконечное подмножество множества $\mathbb{P}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – периодическая группа, для которой имеет место изоморфизм $\text{End}(\text{End}(A)) \cong \text{End}(A)$. Группа A периодическая, поэтому ее можно разложить в прямую сумму примарных групп, относящихся к различным простым числам, и тогда [1; с. 214]

$$\text{End}(A) = \text{End}\left(\bigoplus_{p \in S(A)} Ap\right) \cong \prod_{p \in S(A)} \text{End}(Ap).$$

С другой стороны, так как A периодическая, то $\text{End}(A)$ – редуцированная алгебраически компактная группа и поэтому согласно теореме 4

$$\text{End}(Ap) \cong \mathbb{J}_p$$

или

$$\text{End}(Ap) \cong \mathbb{Z}(p^k), \quad k = k(p) \in \mathbb{N}.$$

Поскольку Ap – периодическая группа, то в первом случае имеем $Ap \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ и соответственно во втором случае – $Ap \cong \mathbb{Z}(p^k)$.

Таким образом, для периодической группы $A = \bigoplus_{p \in S(A)} Ap$ изоморфизм

$$\text{End}(\text{End}(A)) \cong \text{End}(A)$$

имеет место тогда и только тогда, когда либо $Ap \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$, либо $Ap \cong \mathbb{Z}(p^k)$.

Теперь осталось применить теорему 1. Если какая-нибудь из p -компонент группы A изоморфна группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$, тогда группы $\text{End}(A)$ и A не изоморфны и, следовательно, A – не End -группа. Если же $A \cong \bigoplus_{p \in S(A)} \mathbb{Z}(p^k)$, то $\text{End}(A) \cong A$ тогда и только тогда, когда $S(A)$ – конечное множество.

Пусть теперь A – делимая группа. Так как имеет место теорема 5, то, не теряя общности, можем рассматривать только непериодические делимые группы.

ТЕОРЕМА 6. *Делимая непериодическая группа является End -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – делимая группа без кручения, не изоморфная своей группе эндоморфизмов $\text{End}(A)$, т.е. (теорема 2) $r(A) > 1$. Тогда группа $\text{End}(A)$ также делимая и без кручения [1; с. 213], причем $r(\text{End}(A)) > 1$. Применяя теорему 2 для группы $\text{End}(A)$, заключаем, что группы $\text{End}(\text{End}(A))$ и $\text{End}(A)$ не изоморфны.

Пусть A – смешанная группа, тогда по теореме 2 группы $\text{End}(A)$ и A не изоморфны. Покажем, что в этом случае изоморфизм $\text{End}(\text{End}(A)) \cong \text{End}(A)$ не имеет места. Поскольку группа A делимая, то

$$A = D(A) = Df(A) \oplus Dt(A) = Df \oplus Dt.$$

И тогда, учитывая, что $\text{Hom}(Dt, Df) = 0$ [1; с. 213], получаем

$$\text{End}(A) \cong \text{End}(Df) \oplus \text{Hom}(Df, Dt) \oplus \text{End}(Dt).$$

Слагаемые $\text{End}(Df)$ и $\text{Hom}(Df, Dt)$ – ненулевые делимые группы без кручения [1; с. 213]. Таким образом, в делимой части группы $\text{End}(A)$ можно выделить как прямое слагаемое группу без кручения ранга больше 1. Но тогда по теореме 3 группы $\text{End}(\text{End}(A))$ и $\text{End}(A)$ не изоморфны.

Пусть теперь A – нередуцированная группа. В силу теоремы 5 интерес представляют лишь непериодические группы.

ТЕОРЕМА 7. *Нередуцированная непериодическая группа является End -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = D(A) \oplus R(A)$ и $D(A) \neq 0$. Учитывая теорему 6, можно считать, что $R(A) \neq 0$. Тогда

$$\text{End}(A) \cong \text{End}(D(A)) \oplus \text{Hom}(R(A), D(A)) \oplus \text{End}(R(A)).$$

Случай 1. Пусть $Df(A) \neq 0$, а $Dt(A) = 0$, т.е. группа $D(A)$ без кручения, тогда

$$D(\text{End}(A)) \cong \text{End}(D(A)) \oplus \text{Hom}(R(A), D(A)).$$

По теореме 3 изоморфизм $\text{End}(\text{End}(A)) \cong \text{End}(A)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\text{End}(A) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}(n)$. Таким образом,

$$\text{End}(D(A)) \cong \mathbb{Q}$$

и

$$\text{Hom}(R(A), D(A)) = 0.$$

Следовательно, $D(A) \cong \mathbb{Q}$, $R(A) \cong \mathbb{Z}(n)$ и $\text{End}(A) \cong A$.

Случай 2. Пусть $D(A) = Df(A) \oplus Dt(A)$, где $Df = Df(A) \neq 0$ и $Dt = Dt(A) \neq 0$. Тогда имеем

$$\text{End}(A) \cong \text{End}(Df) \oplus \text{Hom}(Df, Dt) \oplus \text{End}(Dt) \oplus \text{Hom}(R(A), D(A)) \oplus \text{End}(R(A)).$$

Так как Df – делимая группа без кручения, то группы $\text{End}(Df)$ и $\text{Hom}(Df, Dt)$ также делимые и без кручения [1; с. 213]. Тогда по теореме 3 из изоморфизма $\text{End}(\text{End}(A)) \cong \text{End}(A)$ следует, что $\text{End}(Df) \cong \mathbb{Q}$ и $\text{Hom}(Df, Dt) = 0$. Откуда получаем, что $Dt = 0$ и группа $D(A)$ без кручения. Таким образом, случай 2 сводится к случаю 1.

Случай 3. Пусть $Df(A) = 0$, а $Dt(A) \neq 0$, т.е. группа $D(A)$ периодическая, а группа $R(A) \neq 0$, следовательно, непериодическая. Поэтому по теореме 3 группы A и $\text{End}(A)$ не изоморфны. Покажем, что и группы $\text{End}(\text{End}(A))$ и $\text{End}(A)$ в этом случае также не изоморфны.

Действительно, так как ранг без кручения группы $R(A)$ отличен от нуля, то в силу [1; с. 233] группа $\text{Hom}(R(A), D(A))$ и, следовательно, и группа $\text{End}(A)$, содержит делимую подгруппу. Далее, так как $D(A)$ – периодическая делимая группа, то она содержит как прямое слагаемое некоторую группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Но тогда, учитывая, что $\text{End}(\mathbb{Z}(p^\infty)) \cong \mathbb{J}_p$, получаем, что группа $\text{End}(A)$ – нередуцированная группа, содержащая в качестве прямого слагаемого группу $\mathbb{J}_p$, а поэтому (по теореме 3) не изоморфна своей группе эндоморфизмов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, 1, Мир, М., 1974.
- [2] L. Fuchs, *Abelian Groups*, Hungar. Acad. Sci., Budapest., 1966.
- [3] А. М. Себельдин, “Группы гомоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения”, *Изв. вузов. Матем.*, 7 (1973), 77–84.
- [4] А. М. Себельдин, “О группах гомоморфизмов абелевых групп без кручения”, *Группы и модули*, Изд-во Томск. ун-та, Томск, 1976, 70–77.
- [5] A. M. Sebel'din, “Isomorphisme naturel des groupes des homomorphismes des groupes abeliens”, *Ann. de l'IPGANC*, 8A (1982), 155–158.

Е. М. Колонова, А. М. Себельдин

Нижегородский государственный педагогический институт

E-mail: kem17@yandex.ru, sebel'dinam@rambler.ru

Поступило

08.10.2004

Исправленный вариант

23.03.2006