Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Колесников, Интегрируемость оптимальных отображений, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 546–560

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2847>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:41:55

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. В. Колесников

В работе изучается интегрируемость оптимального отображения T , отображающего вероятностную меру μ в меру $g \cdot \mu$. Мы предполагаем, что T минимизирует функцию стоимости c и μ удовлетворяет некоторым специальным неравенствам, связанным с c (неравенству для инфимум-свертки или логарифмическому c -неравенству Соболева). Полученные результаты применяются для анализа мер вида $\exp(-|x|^\alpha)$.

Библиография: 25 названий.

1. Введение. В работе рассматривается вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^d$ и оптимальное отображение $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$$T(x) = x + F(x),$$

отображающее μ в другую вероятностную меру $g \cdot \mu$. Последнее означает, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(T) d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \psi g d\mu$$

для любой борелевской функции ψ . Оптимальность означает, что среди множества всех отображений $t: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, переводящих μ в $g \cdot \mu$, функционал

$$t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} c(t(x) - x) d\mu,$$

достигает минимума на T . Здесь c – некоторая неотрицательная функция, называемая *функцией стоимости*. Во многих ситуациях T можно найти, решая известную вариационную задачу Монжа–Канторовича: в пространстве вероятностных мер на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ с заданными проекциями μ и $g \cdot \mu$ на первый и второй множители соответственно требуется найти меру, минимизирующую следующий функционал:

$$m \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} c(x - y) m(dx dy).$$

Если m – искомая мера, то величина

$$W_c(\mu, g \cdot \mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} c(x - y) m(dx dy)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00748, и DFG, грант № 436 RUS 113/343/0(R). Автор признателен за поддержку Центру математических исследований Эннио Де Джорджи, Высшая Нормальная Школа, Пиза.

называется *стоимостью транспортировки*.

Известно, что для многих функций стоимости c решение m оказывается сосредоточенным на графике некоторого отображения: $m(\mathbb{R}^{2d} \setminus \{(x, T(x)), x \in \mathbb{R}^d\}) = 0$. Именно это отображение T и является искомым оптимальным отображением.

Особенно хорошо изучены свойства оптимальных отображений для $c = |x|^2$. В этом случае согласно результатам [1], [2] (для более подробного знакомства см. книги [3]–[5]) при незначительных ограничениях на меры $\mu, g \cdot \mu$ (достаточно считать, что μ абсолютно непрерывна) T существует и единственно с точностью до множества μ -меры нуль. Кроме того, T имеет вид $T = \nabla V$, где V – выпуклая функция.

В дальнейшем мы предполагаем, что μ удовлетворяет некоторым специальным неравенствам, связанным с c ; например, неравенству для инфимум-свертки или логарифмическому c -неравенству Соболева. Напомним, что мера μ на $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет *логарифмическому неравенству Соболева*, если для гладкой функции f

$$\text{Ent}_\mu f^2 \leq 2C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\mu, \quad (1.1)$$

где

$$\text{Ent}_\mu g := \int_{\mathbb{R}^d} g \log g d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^d} g d\mu \right) \log \int_{\mathbb{R}^d} g d\mu.$$

Основным примером меры, удовлетворяющей этому неравенству с $C = 1$, является стандартная гауссовская мера. Логарифмическое неравенство Соболева, впервые доказанное Гроссом для гауссовских мер в [6], имеет обширные приложения в анализе на винеровском пространстве (см. [7]). Много работ посвящены выяснению условий, при которых мера удовлетворяет (1.1). Хорошо известно следующее необходимое условие:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\varepsilon|x|^2} d\mu < \infty \quad (1.2)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Согласно результату [8] это условие является достаточным, если мера выпукла, т.е. имеет плотность $e^{-V} dx$, где V – выпуклая функция. Подробнее о логарифмическом неравенстве Соболева и его приложениях в теории вероятностей и анализе см. [9], [10].

Применяя (1.1) к $1 + \varepsilon f$, получаем в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ неравенство Пуанкаре

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \right)^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\mu. \quad (1.3)$$

Хорошо известно, что всякая мера, удовлетворяющая (1.1), удовлетворяет двум важным неравенствам. Это *неравенство инфимум-свертки*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp Q_C f d\mu \leq \exp \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu, \quad Q_C f(x) = \inf_y \left[f(y) + \frac{|x - y|^2}{2C} \right] \quad (1.4)$$

и *транспортное неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F|^2 d\mu \leq 2C \text{Ent}_\mu g, \quad (1.5)$$

где $T = \text{Id} + F$ – оптимальное отображение μ в $g \cdot \mu$, соответствующее функции стоимости $c = |x|^2$ (см. [11], [9]). Неравенство (1.5) было доказано Талаграном в [12]

для стандартной гауссовской меры и обобщено в [13] на случай меры, удовлетворяющей (1.1).

Неравенства типа (1.5) приобрели большую популярность в связи с изучением концентрации мер (см. [9]). Известно, что меры, удовлетворяющие (1.5), обладают свойством гауссовской концентрации. Напомним также известное *неравенство Пинскера–Кульбака–Чизара* (см. [7]) для расстояния по вариации $\|\cdot\|_{TV}$ для произвольных вероятностных мер μ, ν :

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \leq \sqrt{2 \operatorname{Ent}_{\mu} \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right)}.$$

Известно, что это неравенство является транспортным неравенством для дискретной метрики (см. [14]).

За последнее время появилось много обобщений транспортных неравенств. Для подробного знакомства см. работы [14]–[16] и библиографию в них. Среди прочих результатов были получены транспортные неравенства для мер, удовлетворяющих более слабым ограничениям, чем неравенства типа Соболева или изопериметрические неравенства (например, для мер, удовлетворяющих (1.2)). Общий вид таких неравенств

$$W_c(\mu, \nu) \leq \alpha \left(\operatorname{Ent}_{\mu} \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right) \right),$$

где α – некоторая неотрицательная возрастающая функция.

В этой работе изучаются неравенства типа

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(T(x) - x) d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} Q(g) d\mu,$$

где P, Q – некоторые неотрицательные функции. Заметим, что неравенство (1.5) является неравенством такого типа. Интересное наблюдение было сделано Ферником в [17], который рассмотрел гауссовскую меру γ на сепарабельном пространстве Фреше и вероятностную меру $g \cdot \gamma$. При этом предполагалось, что $g \in L^p(\gamma)$ для некоторого $p > 1$. В [17] было показано, что существует такое отображение $T = U + S$, где U сохраняет меру γ и S – отображение со значениями в пространстве Камерона–Мартина H меры γ , что функция $\exp(\omega |S|_H^2)$ интегрируема для достаточно малого ω (при этом T не обязательно оптимально). Этот результат был обобщен в [18]. В частности, была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что μ удовлетворяет логарифмическому неравенству Соболева (1.1). Рассмотрим оптимальное отображение $T(x) = x + F(x)$, отображающее μ в $g \cdot \mu$ и минимизирующее $c(x) = |x|^2$. Если $g \in L^p(\mu)$, где $p > 1$, то*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(\omega |F|^2) d\mu \leq \|g\|_{L^p(\mu)}$$

для достаточно малого $\omega = \omega(C, p)$.

Аналогичным образом $\int_{\mathbb{R}^d} |F|^{2p} d\gamma$ оценивается через $\int_{\mathbb{R}^d} g |\log g|^p d\gamma$, где $p \geq 1$. Кроме того, были получены некоторые точные оценки в гауссовском случае (для

различных видов отображений, в том числе неоптимальных) и некоторые оценки для мер, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре. Все оценки не зависят от размерности и в гауссовском случае верны также на бесконечномерных пространствах (с заменой стандартной нормы на норму пространства Камерона–Мартин).

В этой работе мы дадим обобщение теоремы 1 на случай неквадратичной функции стоимости. В качестве основного примера мы рассмотрим меру

$$\mu_\alpha = \frac{1}{Z_\alpha^d} \prod_{i=1}^d e^{-|x_i|^\alpha} dx_i, \quad (1.6)$$

где $Z_\alpha = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^\alpha} dx$ и $1 < \alpha \leq 2$. В доказательстве используются недавние результаты работы [19] о логарифмическом неравенстве Соболева для мер вида (1.6).

2. Основные результаты. Для подробного знакомства с теорией Монжа–Канторовича для неквадратичных функций стоимости см. [3]–[5]. Ниже мы напомним основные результаты. Рассмотрим функцию стоимости $c(x)$ на $\mathbb{R}^d$. Всюду далее мы предполагаем:

A1) c – неотрицательная, четная функция и $c(0) = 0$;

A2) c строго выпукла; это значит, что c выпукла и равенство

$$c(tx + (1-t)y) = tc(x) + (1-t)c(y)$$

влечет $x = y$, или $t = 0$, или $t = 1$;

A3) c суперлинейна, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c(x)}{|x|} = \infty;$$

A4) для любых $r > 0$ и $\theta \in (0, \pi)$ и любой достаточно далекой от начала координат точки $p \in \mathbb{R}^d$ существует такое направление $z \in \mathbb{R}^d$, что на усеченном конусе

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, |x - p| |z| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq \langle z, x - p \rangle \leq r |z| \right\},$$

c достигает максимума в p .

Условия **A2)**–**A4)** были введены в [20], откуда мы используем результаты существования и регулярности.

Важным примером функции, удовлетворяющей условиям выше, является функция

$$c(x) = \sum_{i=1}^d |x_i|^p,$$

где $1 < p \leq 2$. Однако для изучения транспортных неравенств более удобна функция стоимости $\tilde{c}$, квадратичная при малых x и совпадающая с c при больших x (см. пример ниже).

Для произвольной функции c определим сопряженную функцию

$$c^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} (\langle x, y \rangle - c(y)).$$

Пусть $\mu, g \cdot \mu$ – абсолютно непрерывные вероятностные меры, причем

$$W_c(\mu, g \cdot \mu) = \inf_m \int_{(\mathbb{R}^d)^2} c(x - y) dm < \infty,$$

и инфимум берется по всем мерам на $(\mathbb{R}^d)^2$ с проекциями μ и $g \cdot \mu$. Известно, что при условиях **A2)–A4)** существует такое оптимальное отображение $T = \text{Id} + F$, что T отображает μ в $g \cdot \mu$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} c(F) d\mu = W_c(\mu, g \cdot \mu).$$

Известно (см. [20] или теорему 2.44 в [5]), что T имеет вид

$$T(x) = x + \nabla c^*(\nabla \Phi) \quad \mu\text{-п.в.} \quad (2.1)$$

для некоторой c -выпуклой функции Φ . Последнее означает, что

$$-\Phi = Q_c \Psi$$

для некоторой Ψ , где

$$Q_c f(x) = \inf_y [f(y) + c(x - y)]$$

– инфимум-свертка. Обозначим $\Phi^c = -Q_c \Phi$. В силу дуальности Лежандра $\Psi = \Phi^c$. Согласно результату из [20] существует такое выпуклое множество K , что Φ локально липшицева на $\Omega = \text{Int}(K)$ и

$$\Omega \subseteq \text{Dom}(\Phi) \subseteq K,$$

следовательно, (2.1) корректно определено. Заметим, что в отличие от стандартного пути, мы не используем представление $T(x) = x - \nabla c^*(\nabla \tilde{\Phi})$, где $\tilde{\Phi}$ – *c-вогнутая* функция. Тем не менее, так как c предполагается четной, наше представление (2.1) равносильно стандартному.

Мы будем использовать хорошо известные соотношения

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Phi^c(y) &\geq -c(x - y), \\ \Phi + \Phi^c(T(x)) &= -c(T(x) - x) \quad \text{для } \mu\text{-п.в. } x. \end{aligned}$$

Будем говорить, что μ удовлетворяет *неравенству инфимум-свертки*, если для любой измеримой ограниченной функции f

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{Q_c f} d\mu \int_{\mathbb{R}^d} e^{-f} d\mu \leq 1. \quad (2.2)$$

Заметим, что из (2.2) и неравенства Йенсена следует

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{Q_c f} d\mu \leq \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \right). \quad (2.3)$$

Легко проверить (см. [18], где был рассмотрен случай квадратичной функции стоимости), что если (2.2) выполнено, то (2.3) выполнено для любой μ -интегрируемой f .

Хорошо известно (см. [11], [9]), что неравенство Талагранна

$$\int_{\mathbb{R}^d} c(F) d\mu \leq \text{Ent}_\mu g$$

для выпуклой функции стоимости c равносильно (2.3).

Будем говорить, что вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет *логарифмическому s -неравенству Соболева*, если для некоторого $\Lambda > 0$ и любой локально липшицевой функции f

$$\text{Ent}_\mu f^2 \leq \Lambda \int_{\mathbb{R}^d} c^* \left(\frac{\nabla f}{f} \right) f^2 d\mu. \quad (2.4)$$

Заметим, что для многих функций стоимости (2.4) влечет (2.3). В [19] было доказано, что произведение одномерных мер вида $e^{-|x|^\alpha} dx$ удовлетворяет (2.4) для функции стоимости, равной $A \sum_{i=1}^d |x_i|^\alpha$ при больших значениях x и квадратичной при малых x . Мы рассмотрим этот пример в следующем пункте.

Отметим, что существуют другие обобщения неравенства Соболева. Например, в [21] доказано, что для $\mu = e^{-|x|^\alpha} dx$ выполнено такое неравенство:

$$\text{Ent}_\mu |f|^\beta \leq c \int_{\mathbb{R}^d} \sum_i |\partial_{x_i} f|^\beta d\mu,$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

В следующей лемме мы обобщаем результат из [22]. Доказательство близко к оригинальному, тем не менее, мы приведем его для удобства читателя.

ЛЕММА 1. *Предположим, что вероятностная мера μ удовлетворяет следующему неравенству для любой локально липшицевой функции φ :*

$$\text{Ent}_\mu e^\varphi \leq \frac{1}{2} \int_X H(\nabla \varphi) e^\varphi d\mu, \quad (2.5)$$

где $H: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ обладает следующим свойством: для любого $x \in \mathbb{R}^d$ функция $\lambda \rightarrow H(\sqrt{\lambda}x)$ возрастающая и выпуклая на $[0, \infty)$ и $H(0) = 0$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} (e^\varphi - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu) d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\nabla \varphi)} d\mu.$$

В частности, если $t \rightarrow c^*(\sqrt{t}x)$ – выпуклая и неубывающая функция на $[0, \infty)$ и μ удовлетворяет (2.4), то для любой локально липшицевой φ

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[\varphi - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu \right] d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(2\Lambda c^* \left[\frac{|\nabla \varphi|}{2} \right] \right) d\mu. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$g = H(\nabla \varphi) - \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\nabla \varphi)} d\mu.$$

Заметим, что $\int_{\mathbb{R}^d} e^g d\mu = 1$. По хорошо известному свойству энтропии

$$\text{Ent}_\mu f = \sup_g \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} fg d\mu : g \text{ такова, что } \int_{\mathbb{R}^d} \exp(g) d\mu \leq 1 \right\}$$

получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^\varphi g d\mu \leq \text{Ent}_\mu e^\varphi.$$

Следовательно, (2.5) влечет

$$2 \operatorname{Ent}_{\mu} e^{\varphi} \leq \int_{\mathbb{R}^d} e^{\varphi} H(\nabla \varphi) d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{\varphi} d\mu \right) \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\nabla \varphi)} d\mu \right) + \operatorname{Ent}_{\mu} e^{\varphi}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Ent}_{\mu} e^{\varphi} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{\varphi} d\mu \right) \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\nabla \varphi)} d\mu \right).$$

Применим полученную формулу к $\lambda\varphi$:

$$\operatorname{Ent}_{\mu} e^{\lambda\varphi} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda\varphi} d\mu \right) \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\lambda\nabla\varphi)} d\mu \right). \quad (2.7)$$

Положим

$$K(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \log \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda\varphi} d\mu.$$

Вычислим производную

$$K'(\lambda) = \frac{\operatorname{Ent}_{\mu} e^{\lambda\varphi}}{\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda\varphi} d\mu} \leq \frac{\log \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\lambda\nabla\varphi)} d\mu \right)}{\lambda^2}.$$

Обозначим

$$F(t) = \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\sqrt{t}\nabla\varphi)} d\mu \right).$$

Очевидно, F неотрицательна и не убывает. Покажем, что F выпукла. Действительно, это следует из того факта, что сумма функций вида $\sum_{i=1}^d e^{W_i}$, где каждая W_i выпукла, имеет вид e^W для некоторой выпуклой функции W .

Принимая во внимание, что $F(0) = 0$, получаем, что $F(t)/t$ не убывает. Следовательно,

$$\lambda \rightarrow \frac{\log \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\lambda\nabla\varphi)} d\mu \right)}{\lambda^2}$$

не убывает. В итоге получаем

$$\log \int_{\mathbb{R}^d} e^{\varphi} d\mu = K(1) \leq K(0) + \int_0^1 K'(\lambda) d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu + \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{H(\nabla\varphi)} d\mu \right),$$

что и требовалось доказать. Неравенство (2.6) следует из доказанного неравенства и (2.4) путем замены $f^2 = e^g$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что c удовлетворяет условиям **A1)–A4)**. Предположим также, что*

- 1) μ удовлетворяет (2.3) и (2.6);
- 2) $t \rightarrow c^*(\sqrt{t}x)$ – выпуклая и возрастающая функция на $[0, \infty)$ для всех x ;
- 3) существует такое $N > 0$, что

$$\langle x, \nabla c(x) \rangle \leq Nc(x).$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\omega c(F)} d\mu d\mu \leq \|g\|_{L^p(\mu)},$$

$$\partial e \omega = \min(1/(2q), 1/(4\Lambda N)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства $V(tx) \leq tV(x)$, выполненного для любой выпуклой функции V с $V(0) = 0$ и $0 \leq t \leq 1$, имеем

$$c^*(\sqrt{t}x) \leq tc^*(x), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда из неравенства $V(x) \leq \langle x, \nabla V(x) \rangle$ и условия 3) вытекает

$$c^*(\tau x) \leq \tau^2 c^*(x) \leq \tau^2 \langle x, \nabla c^*(x) \rangle = \tau^2 \langle \nabla c(\nabla c^*(x)), \nabla c^*(x) \rangle \leq N\tau^2 c(\nabla c^*(x)). \quad (2.8)$$

Применим (2.6) к $\varepsilon\varphi$, где φ – гладкая ограниченная функция:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left[\varepsilon\varphi - \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon\varphi d\mu\right] d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(2\Lambda c^*\left[\varepsilon\frac{\nabla\varphi}{2}\right]\right) d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{\Lambda N \varepsilon^2}{2} c^*(\nabla\varphi)\right) d\mu.$$

Из разложения в ряд Тейлора следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu\right)^2 d\mu \leq \frac{\Lambda N}{2} \int_{\mathbb{R}^d} c^*(\nabla\varphi) d\mu.$$

В силу (2.8)

$$\int_{\mathbb{R}^d} c^*(\nabla\Phi) d\mu \leq N \int_{\mathbb{R}^d} c(\nabla c^*(\nabla\Phi)) d\mu = N \int_{\mathbb{R}^d} c(T(x) - x) d\mu.$$

Так как (2.3) влечет неравенство Талаграна для функции стоимости c и $\text{Ent}_\mu g < \infty$, мы получаем $\int_{\mathbb{R}^d} c(T(x) - x) d\mu < \infty$ и $\Phi \in L^2(\mu)$. Выберем Φ таким образом, что $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi d\mu = 0$.

Пусть $\tau \geq 2\omega > 0$. По неравенству Юнга $xy \leq x \log x - x + e^y$, где $x \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, получаем

$$\tau c(F) e^{\omega c(F)} = \tau(-\Phi - \Phi^c(T)) e^{\omega c(F)} \leq e^{-\tau\Phi} + e^{-\tau\Phi^c(T)} + 2\omega c(F) e^{\omega c(F)} - 2e^{\omega c(F)}.$$

Следовательно, для любого $A \subset \mathbb{R}^d$

$$(\tau - 2\omega) \int_A c(F) e^{\omega c(F)} d\mu + 2 \int_A e^{\omega c(F)} d\mu \leq \int_A e^{-\tau\Phi} d\mu + \int_A e^{-\tau\Phi^c(T)} d\mu.$$

Оценим правую часть следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\tau\Phi^c(T)} d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\tau\Phi^c} g d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} g^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-q\tau\Phi^c} d\mu \right)^{1/q}.$$

Предположим, что $\tau \leq 1/q$. Из (2.3) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-q\tau\Phi^c} d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\Phi^c} d\mu \right)^{1/(q\tau)} \leq e^{1/(\tau q) \int_{\mathbb{R}^d} \Phi d\mu} = 1,$$

следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\tau \Phi^c(T)} d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\tau \Phi^c} g d\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее положим $A := A_n = \{x: -\Phi(x) \leq n\}$. Очевидно, $\nabla[\max(\Phi, -n)] = \nabla\Phi\chi_{A_n}$ μ -п.в. Тогда по (2.8) и (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \int_{A_n} e^{-\tau \Phi} d\mu &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\tau \max(\Phi, -n)) d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(2\Lambda c^*\left(\frac{\tau}{2}\nabla\Phi\chi_{A_n}\right)\right) d\mu \exp\left(-\tau \int_{\mathbb{R}^d} \max(\Phi, -n) dx\right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{\Lambda N \tau^2}{2} c[\nabla c^*(\nabla\Phi\chi_{A_n})]\right) d\mu \exp\left(-\tau \int_{\mathbb{R}^d} \max(\Phi, -n) dx\right) \\ &= \left(\int_{A_n} e^{\frac{\Lambda N \tau^2}{2} c(F)} d\mu + 1 - \mu(A_n) \right) \exp\left(-\tau \int_{\mathbb{R}^d} \max(\Phi, -n) dx\right). \end{aligned}$$

Заметим, что для $x \in A_n$ выполнено

$$c(T(x) - x) = -\Phi(x) - \Phi^c(T(x)) \leq n - \Phi^c(T(x)).$$

Положим $\tau = \min(1/q, 1/(2\Lambda N))$. Таким образом, $\Lambda N \tau^2/2 \leq \tau/4 \leq 1/(4q)$ и

$$\chi_{A_n} e^{\Lambda N \tau^2 c(F)/2} \leq e^{\tau n/4} e^{-\tau \Phi^c(T)/4}.$$

Согласно полученной выше оценке функция $\chi_{A_n} e^{\Lambda N \tau^2 c(F)/2}$ интегрируема и

$$\begin{aligned} (\tau - 2\omega) \int_{A_n} c(F) e^{\omega c(F)} d\mu + 2 \int_{A_n} e^{\omega c(F)} d\mu &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} g^p d\mu \right)^{1/p} \\ &+ \left(\int_{A_n} e^{\Lambda N \tau^2 c(F)/2} d\mu + 1 - \mu(A_n) \right) \exp\left(\tau \int_{\mathbb{R}^d} \max(\Phi, -n) dx\right). \end{aligned}$$

Положив $\omega := \tau/2$, получаем $\Lambda N \tau^2/2 \leq \tau/2 \leq \omega$ и

$$\begin{aligned} 2 \int_{A_n} e^{\omega c(F)} d\mu &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} g^p d\mu \right)^{1/p} \\ &+ \left(\int_{A_n} e^{\omega c(F)} d\mu + 1 - \mu(A_n) \right) \exp\left(\tau \int_{\mathbb{R}^d} \max(\Phi, -n) dx\right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \max(\Phi, -n) dx = 0$, получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что c удовлетворяет условиям **A1)–A4)** и μ удовлетворяет неравенству инфимум-свертки (2.3) и неравенству Пуанкаре (1.3). Предположим, что*

- 1) $\int_{\mathbb{R}^d} g |\log g|^p d\mu < \infty$ для некоторого $p \geq 1$;
- 2) существуют такие $p' \geq 1$ и $N_{p'} > 0$, $M_{p'} > 0$, что $p' \geq p$ и $|\nabla c|^{2p'} \leq N_{p'} c^p + M_{p'}$.

Тогда существуют такие $A, B > 0$, зависящие от $p, C, N_{p'}, M_{p'}$, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} c^p(F) d\mu \leq A + B \int_{\mathbb{R}^d} g |\log g|^p d\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства та же самая, что и в теореме 2. Мы дадим ниже формальные оценки, из которых следует результат. Более подробное доказательство может быть проведено так же, как и в теореме 2.

Из соотношения $c(x - T(x)) = -\Phi - \Phi^c(T)$ следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} c^p(x - T(x)) d\mu = - \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x))(\Phi + \Phi^c(T)) d\mu.$$

Согласно 2) $|\nabla \Phi|^{2p'} \leq M_{p'} + N_{p'} c^p(F)$. Следовательно, $|\nabla \Phi|^{2p'/p} \in L^1(\mu)$, и по неравенству Пуанкаре $\Phi \in L^2(\mu)$. Выберем Φ таким образом, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi d\mu = \log \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) d\mu.$$

Тогда по неравенству Юнга

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^c(T(x)) c^{p-1}(x - T(x)) d\mu &= - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^c(x) c^{p-1}(x - T^{-1}(x)) g d\mu \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\Phi^c(x)} d\mu + \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T^{-1}(x)) g \log[c^{p-1}(x - T^{-1}(x)) g] d\mu \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T^{-1}(x)) g d\mu. \end{aligned}$$

Используя (2.3), мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\Phi^c} d\mu \leq e^{\int_{\mathbb{R}^d} \Phi d\mu} = \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) d\mu.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^c(T(x)) c^{p-1}(x - T(x)) d\mu &\leq \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) \log[c^{p-1}(x - T(x)) g(T)] d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) \log[c^{p-1}(x - T(x))] d\mu \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) \log g(T) d\mu. \end{aligned}$$

По неравенству Гёльдера и формуле замены переменных

$$\int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) \log g(T(x)) d\mu \leq \left[\int_{\mathbb{R}^d} c^p(x - T(x)) d\mu \right]^{1-1/p} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\log g|^p g d\mu \right]^{1/p}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x) c^{p-1}(x - T(x)) d\mu &= - \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) d\mu \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) d\mu \right) \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} \left(\Phi(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi dx \right) c^{p-1}(x - T(x)) d\mu \\
 &\leq - \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) d\mu \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(x - T(x)) d\mu \right) \\
 &\quad + \left[\int_{\mathbb{R}^d} c^p(x - T(x)) d\mu \right]^{1-1/p} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left| \Phi(x) - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi dx \right|^p d\mu \right]^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что любая мера, удовлетворяющая неравенству Пуанкаре, удовлетворяет также следующему неравенству для $p' \geq 1$ и подходящей константы $C_{2p'}$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \varphi - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu \right|^{2p'} d\mu \leq C_{2p'} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi|^{2p'} d\mu$$

(см., например, [21]). По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \Phi - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi dx \right|^p d\mu &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \Phi - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi dx \right|^{2p'} d\mu \right)^{p/(2p')} \\
 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} C_{2p'}^{p/2} |\nabla \Phi|^{2p'} d\mu \right)^{p/(2p')} = C_{2p'}^{p/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla c(F)|^{2p'} d\mu \right)^{p/(2p')} \\
 &\leq C_{2p'}^{p/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} N_{p'} c^p(F) d\mu + M_{p'} \right)^{p/(2p')}.
 \end{aligned}$$

В конечном итоге получаем, что при подходящем выборе констант $A' > 0$, $B' > 0$

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi c^{p-1}(F) d\mu &\leq A' \left[\int_{\mathbb{R}^d} c^p(F) d\mu \right]^{1-1/p+1/(2p')} \\
 &\quad + B' - \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(F) d\mu \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(F) d\mu \right)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^c(T) c^{p-1}(F) d\mu &\leq \int_{\mathbb{R}^d} c^{p-1}(F) \log[c^{p-1}(F)] d\mu \\
 &\quad + \left[\int_{\mathbb{R}^d} c^p(F) d\mu \right]^{1-1/p} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\log g|^p g d\mu \right]^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $\int_{\mathbb{R}^d} c^p(F) d\mu$ не превосходит суммы правых частей этих неравенств

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} c^p(F) dx &\leq A' \left[\int_{\mathbb{R}^d} c^p(F) d\mu \right]^{1-1/p+1/(2p')} + B' + \text{Ent}_\mu c^{p-1}(F) \\
 &\quad + \left[\int_{\mathbb{R}^d} c^p(F) d\mu \right]^{1-1/p} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\log g|^p g d\mu \right]^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Утверждение теоремы следует из полученной оценки.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. 1) В качестве примера функций стоимости, удовлетворяющих условиям теоремы 2 и теоремы 3, можно взять $c(x) = |x|^p$, где $1 < p \leq 2$.

2) Пусть $c = |x|^2$. Тогда теорема 1 следует из теоремы 2 и леммы 1.

3) Сделаем несколько замечаний об условиях теорем 2 и 3. Не очень ясно, какова связь между неравенствами (2.3) и (2.6). Второе из них, как мы видели, следует из (2.4). Во многих ситуациях то же верно для (2.3). Условие 2) теоремы 3 следует из условий 2), 3) теоремы 2. Действительно, из неравенства $c^*(tx) \leq t^2 c^*(x)$ получаем, что $c^*(x) \geq |x|^2 \inf_{|x|=1} c^*(x) = a|x|^2$ при $|x| \geq 1$. Тогда по (2.8), если $|\nabla c| \geq 1$, то $a^{2p} |\nabla c|^{2p} \leq (c^*(\nabla c))^p \leq N^p c^p(x)$. Следовательно, $|\nabla c|^{2p} \leq 1 + (N^p/a^p) c^p$.

3. Примеры. Пусть $\alpha \geq 1$. Зададим следующую вероятностную меру на $\mathbb{R}^d$:

$$\mu_\alpha = \frac{1}{Z_\alpha^d} \prod_{i=1}^d e^{-|x_i|^\alpha} dx_i,$$

где $Z_\alpha = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|^\alpha} dx$.

Спектральные свойства этих мер впервые изучались в [23]. В частности, в [23] было показано, что для μ_α выполнена следующая серия неравенств, которые можно рассматривать как интерполяцию между неравенством Пуанкаре и логарифмическим неравенством Соболева:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\mu_\alpha - \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\mu_\alpha \right)^{2/p} \leq C(2-p)^{2(1-1/\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\mu_\alpha.$$

Дальнейшее развитие этой тематики см. в [24], [25]. В нашей работе мы будем использовать результаты, полученные недавно в [19].

В [19] было показано, что μ_α удовлетворяет транспортному неравенству для функций стоимости следующего вида:

$$L_{A,\alpha}^d(x) = \sum_{i=1}^d L_{A,\alpha}(x_i),$$

где $2 \geq \alpha > 1$, $A > 0$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$ и

$$L_{A,\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{если } |x| \leq A, \\ A^{2-\alpha} \frac{|x|^\alpha}{\alpha} + A^2 \frac{\alpha-2}{2\alpha}, & \text{если } |x| \geq A. \end{cases}$$

Можно показать, что

$$(L_{A,\alpha}^d)^* = H_{A,\alpha}^d, \quad (H_{A,\alpha}^d)^* = L_{A,\alpha}^d,$$

где

$$H_{A,\alpha}^d(x) = \sum_{i=1}^d H_{A,\alpha}(x_i), \quad H_{A,\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{если } |x| \leq A, \\ A^{2-\beta} \frac{|x|^\beta}{\beta} + A^2 \frac{\beta-2}{2\beta}, & \text{если } |x| \geq A. \end{cases}$$

В дальнейшем мы опустим индекс d и будем писать $L_{A,\alpha}$, $H_{A,\alpha}$.

Сформулируем основной результат из [19].

ТЕОРЕМА 4. Следующие неравенства выполнены для μ_α .

1) (Логарифмическое s -неравенство Соболева) Существует такая константа $C_\alpha > 0$, что для любого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\text{Ent}_{\mu_\alpha} f^2 \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} H_{A,\alpha} \left(\frac{\nabla f}{f} \right) f^2 d\mu_\alpha. \quad (3.1)$$

2) (Транспортное неравенство) Для любой вероятностной меры $g \cdot \mu_\alpha$

$$T_{L_{\frac{AC_\alpha}{2},\alpha}}(\mu_\alpha, g \cdot \mu_\alpha) \leq \frac{C_\alpha}{4} \text{Ent}_{\mu_\alpha} g,$$

где

$$T_{L_{\frac{AC_\alpha}{2},\alpha}}(\mu_\alpha, g \cdot \mu_\alpha) = \inf_{\pi} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{2d}} L_{\frac{AC_\alpha}{2},\alpha}(x-y) d\pi(x,y) \right\},$$

а инфимум берется по множеству вероятностных мер π на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, причем проекции π на первый и второй сомножитель совпадают соответственно с $g \cdot \mu_\alpha$ и μ_α .

3) (Неравенство инфимум-свертки) Для любой ограниченной измеримой φ

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{Q\varphi} d\mu_\alpha \leq \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_\alpha \right), \quad (3.2)$$

где

$$Q\varphi = \inf_y \left\{ \varphi(y) + \frac{4}{C_\alpha} L_{\frac{TC_\alpha}{2},\alpha}(x-y) \right\}.$$

В действительности 2) и 3) следуют из 1). Если $\alpha = 2$, мы получаем классическое логарифмическое неравенство Соболева и транспортное неравенство для гауссовской меры. Заметим, что этот результат также доказан для случая $\alpha = 1$ и функции стоимости

$$L_{A,1}^d(x) = \sum_{i=1}^d L_{A,1}(x_i),$$

где

$$L_{A,1}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{если } |x| \leq A, \\ A|x| - \frac{A^2}{2}, & \text{если } |x| \geq A, \end{cases} \quad H_{A,1}(x) = L_{A,1}^*(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{если } |x| \leq A, \\ \infty, & \text{если } |x| \geq A. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $g \cdot \mu_\alpha$ – вероятностная мера и $T(x) = x + F(x)$ – оптимальное отображение, минимизирующее функцию стоимости $c = L_{\frac{AC_\alpha}{2},\alpha}$ и отображающее μ_α в $g \cdot \mu_\alpha$.

1) Если $g \in L^p(\mu_\alpha)$ для некоторого $p > 1$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\varepsilon c(F)} d\mu_\alpha \leq \|g\|_{L^p(\mu_\alpha)}$$

для некоторого $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, p) > 0$.

2) Если $g |\log g|^p \in L^1(\mu_\alpha)$ для некоторого $p > 1$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} c^p(F) d\mu \leq A(\alpha, p) + B(\alpha, p) \int_{\mathbb{R}^d} g |\log g|^p d\mu_\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства 1) применим теорему 2. Докажем, что все условия на c выполнены. Действительно, **A1)–A4)** и условие 3) теоремы 2 нетрудно проверить. Заметим, что для $d = 1$

$$H_{A,\alpha}(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad \text{где} \quad f_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad f_2(x) = A^{2-\beta} \frac{|x|^\beta}{\beta} + A^2 \frac{\beta-2}{\beta}.$$

Так как функции $t \rightarrow f_1(\sqrt{t}x)$, $t \rightarrow f_2(\sqrt{t}x)$ выпуклы, мы получаем, что $t \rightarrow c^*(\sqrt{t}x)$ – выпуклая и возрастающая функция. Условие 3) очевидным образом выполнено.

Хорошо известно, что μ_α удовлетворяет неравенству Пуанкаре (см. [19]). Покажем, что неравенство (2.6) вытекает из (3.1). По теореме 3 для любой гладкой функции f

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(f - \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_\alpha\right) d\mu_\alpha \leq \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(2C_\alpha H_{A,\alpha}\left(\frac{\nabla f}{2}\right)\right) d\mu_\alpha.$$

Заметим, что для $A \leq A'$ и подходящего $M(A, A') \geq 1$ получаем $H_{A,\alpha} \leq H_{A',\alpha} \leq M(A, A')H_{A,\alpha}$. Следовательно, (2.6) выполнено также для функции $H_{\frac{AC_\alpha}{M(A,A')},\alpha} = c^*$ и подходящего $\Lambda > 0$. Неравенство (2.3) для функции стоимости $4/(\tilde{C}_\alpha^2)L_{\frac{TC_\alpha}{2},\alpha}$ следует из теоремы (3.2). Следовательно, оно выполнено и для $L_{\frac{TC_\alpha}{2},\alpha}$ с точностью до константы $4/(C_\alpha)$. Читатель легко проверит, что теорема 2 выполнена также и в этом случае. Пункт 1) доказан.

Пункт 2) легко следует из теоремы 3, условия которой выполнены согласно замечанию 1.

Автор выражает благодарность рецензенту за важные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Brenier, “Polar factorization and monotone rearrangement of vector valued functions”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44** (1991), 375–417.
- [2] R. J. McCann, “Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps”, *Duke Math. J.*, **80** (1995), 309–323.
- [3] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Wasserstein Spaces of Probability Measures*, Lectures in Math., ETH, Zürich, 2005.
- [4] S. T. Rachev, L. Rüschendorf, *Mass Transportation Problems*, **I, II**, Springer, New York, 1998.
- [5] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [6] L. Gross, “Logarithmic Sobolev inequalities”, *Amer. J. Math.*, **97**:4 (1975), 1061–1083.
- [7] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, **1, 2**, РХД, Москва–Ижевск, 2003.
- [8] F. Y. Wang, “Logarithmic Sobolev inequalities on non-compact Riemannian manifolds”, *Probab. Theory Related Fields*, **109** (1997), 417–424.
- [9] M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [10] C. Ané, S. Blachère, D. Chafai, P. Fougère, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Schefker, *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panorama et Synthèses, **10**, Soc. Math. France, Paris, 2002.
- [11] S. G. Bobkov, I. Gentil, M. Ledoux, “Hypercontractivity of Hamilton–Jacobi equations”, *J. Math. Pures Appl.*, **80**:7 (2001), 669–696.

- [12] M. Talagrand, “Transportation cost for Gaussian and other product measures”, *Geom. Funct. Anal.*, **6** (1996), 587–600.
- [13] F. Otto, C. Villani, “Generalization of an inequality by Talagrand, and links with the logarithmic Sobolev inequality”, *J. Funct. Anal.*, **173** (2000), 361–400.
- [14] Y. Bolley, C. Villani, “Weighted Csiszár–Kullback–Pinsker inequalities and applications to transportation cost inequalities”, *Ann. Faculté des Sciences de Toulouse*, **14** (2005), 331–352.
- [15] H. Djellout, A. Guillin, L. Wu, “Transportation cost-information inequalities and applications to random dynamical systems and diffusions”, *Ann. Probab.*, **32**:3B (2004), 2702–2732.
- [16] P. Cattiaux, A. Guillin, “Talagrand’s like quadratic transportation cost inequalities”, *Preprint*, 2004.
- [17] X. Fernique, “Extension du théorème de Cameron–Martin aux translations aléatoires. II. Intégrabilité des densités”, *High Dimensional Probability, III (Sandjberg, 2002)*, Progr. Probab., **55**, Birkhäuser, Basel, 2003, 95–102.
- [18] В. И. Богачев, А. В. Колесников, “Интегрируемость абсолютно непрерывных преобразований мер и применения к оптимальной транспортировке масс”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **50**:3 (2005), 3–25.
- [19] I. Gentil, A. Guillin, L. Miclo, “Modified logarithmic Sobolev inequalities and transportation inequalities”, *Probab. Theory Related Fields*, **133**:3 (2005), 409–436.
- [20] W. Gangbo, R. J. McCann, “The geometry of optimal transportation”, *Acta Math.*, **177** (1996), 113–161.
- [21] S. G. Bobkov, B. Zegarlinski, “Entropy bounds and isoperimetry”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **176**:829 (2005).
- [22] S. G. Bobkov, F. Götze, “Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequality”, *J. Funct. Anal.*, **163** (1999), 1–28.
- [23] R. Latała, K. Oleskiewicz, “Between Sobolev and Poincaré”, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math., **1745**, Springer, Berlin, 2000, 147–168.
- [24] F. Barthe, P. Cattiaux, C. Roberto, “Interpolated inequalities between exponential and Gaussian, Orlicz hypercontractivity and isoperimetry”, *Revista Mat. Iberoamericana* (to appear); E-print [math.PR/0407219](#), 2004.
- [25] F. Y. Wang, “Probability distance inequalities on Riemannian manifolds and path spaces”, *J. Funct. Anal.*, **206** (2004), 167–190.

А. В. Колесников

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: sascha77@mail.ru

Поступило

10.10.2005

Исправленный вариант

03.06.2006