Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Лауринчикас, Д. Шяучюнас, Замечания об универсальности периодической дзета-функции, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 561–568

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 04:10:55

УДК 511

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

А. Лауринчикас, Д. Шяучюнас

В статье рассматривается универсальность ряда Дирихле с периодическими коэффициентами. В случае мультипликативности коэффициентов получена универсальность этого ряда, а в общем случае получена универсальность в некотором множестве аналитических функций, связанном с вероятностным распределением.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть, как обычно, $\mathbb{P}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ означают соответственно множества всех простых, натуральных, действительных и комплексных чисел. Через $\mathfrak{A} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ обозначим периодическую с наименьшим периодом $k \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, т.е. $a_{m+k} = a_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Пусть $s = \sigma + it$ — комплексная переменная. Периодическая дзета-функция $\zeta(s; \mathfrak{A})$ при $\sigma > 1$ определяется рядом Дирихле

$$\zeta(s; \mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Легко видеть, что при $\sigma > 1$

$$\zeta(s; \mathfrak{A}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=1}^k a_l \zeta\left(s, \frac{l}{k}\right),$$

где $\zeta(s, l/k)$ — дзета-функция Гурвица. Следовательно, последнее равенство дает аналитическое продолжение функции $\zeta(s; \mathfrak{A})$ на всю комплексную плоскость, за исключением, быть может, точки $s = 1$, с вычетом

$$a = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k a_l.$$

Если $a = 0$, то $\zeta(s; \mathfrak{A})$ является целой функцией.

Работа выполнена при поддержке Фонда науки и студий Литвы.

© А. Лауринчикас, Д. Шяучюнас, 2006

Штойдинг в [1] начал рассматривать универсальность в смысле Воронина (см. [2], [3]) функции $\zeta(s; \mathfrak{A})$. Напоминаем, что открытое Ворониным свойство универсальности для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ утверждает, что всякая аналитическая функция приближается сдвигами функции $\zeta(s)$. Точная формулировка теоремы Воронина следующая. Пусть $0 < r < 1/4$. Пусть $f(s)$ – функция, аналитическая внутри круга $|s| \leq r$ и непрерывная вплоть до границы этого круга. Если $f(s) \neq 0$ при $|s| < r$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon)$ такое, что

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Через $\text{meas}\{A\}$ обозначим меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, и пусть при $T > 0$

$$\nu_T(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0; T] : \dots\},$$

где вместо многоточия будем писать условие, которому удовлетворяет τ . Тогда в [1] было получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. *Предположим, что k – нечетное простое число, a_m не является кратным характера по модулю k и $a_k = 0$. Пусть K – компактное подмножество полосы $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, обладающее связным дополнением, а функция $f(s)$ непрерывна на K и аналитична внутри K . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T\left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{A}) - f(s)| < \varepsilon\right) > 0.$$

Цель настоящей заметки – изучить универсальность функции $\zeta(s; \mathfrak{A})$ в общем случае. Напоминаем, что последовательность $\mathfrak{A}$ вполне мультипликативна, если $a_1 = 1$ и для всех $m, n \in \mathbb{N}$

$$a_{mn} = a_m a_n, \quad (1)$$

и мультипликативна, если равенство (1) имеет место для всех взаимно простых m и n . Через p будем обозначать простое число.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что последовательность $\mathfrak{A}$ вполне мультипликативна и*

$$\max_{p \leq k} \frac{|a_p|}{\sqrt{p}} \leq c_1 < 1.$$

Пусть K – то же самое множество, что и в теореме А, а функция $f(s)$ непрерывна, не имеет нулей в K и аналитична внутри K . Тогда имеет место утверждение теоремы А.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что последовательность $\mathfrak{A}$ мультипликативна и для всех простых p выполняется оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|a_{p^\alpha}|}{p^{\alpha/2}} \leq c_2 < 1.$$

Пусть K и $f(s)$ – те же самые, что и в теореме 1. Тогда имеет место утверждение теоремы А.

Через γ обозначим единичную окружность $\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ и определим

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

где $\gamma_p = \gamma$ для всех простых p . Тогда Ω является компактной топологической абелевой группой. Пусть $\mathcal{B}(S)$ – класс борелевских множеств пространства S . Тогда на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ может быть определена вероятностная мера Хаара m_H . Получаем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Через $\omega(p)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p и для $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \parallel m} \omega^\alpha(p),$$

где $p^\alpha \parallel m$ означает, что $p^\alpha \mid m$, но $p^{\alpha+1} \nmid m$. Таким образом, имеем, что $\omega(m)$ – вполне мультипликативная арифметическая функция. Пусть $H(D)$ – пространство аналитических в D функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Для $s \in D$ положим

$$\zeta(s, \omega; \mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{m^s}.$$

Поскольку $|a_m| < c$ с некоторой постоянной $c > 0$, стандартным путем (см., например, [4]) может быть доказано, что $\zeta(s, \omega; \mathfrak{A})$ является $H(D)$ -значным случайным элементом, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Через P_ζ обозначим распределение случайного элемента $\zeta(s, \omega; \mathfrak{A})$, т.е.

$$P_\zeta(A) = m_H(\omega \in \Omega : \zeta(s, \omega; \mathfrak{A}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Пусть S_{P_ζ} – носитель меры P_ζ ; S_{P_ζ} – это минимальное замкнутое множество пространства $H(D)$ такое, что $P_\zeta(S_{P_\zeta}) = 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что последовательность $\mathfrak{A}$ не является мультипликативной. Пусть K – компактное подмножество полосы D , а функция $f(s)$ принадлежит множеству S_{P_ζ} . Тогда имеет место утверждение теоремы А.*

2. Предельная теорема. Доказательства теорем 1–3 в отличие от теоремы А опираются на предельную теорему в смысле слабой сходимости вероятностных мер в пространстве $H(D)$ для функции $\zeta(s; \mathfrak{A})$. Напомним, что если P_n и P – вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, то P_n при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к P , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f \, dP_n = \int_S f \, dP$$

для всякой действительной, непрерывной, ограниченной функции f . Определим вероятностную меру

$$P_T(A) = \nu_T(\zeta(s + i\tau; \mathfrak{A}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

ТЕОРЕМА 4. Вероятностная мера P_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к P_ζ .

Мы дадим новое, более простое доказательство теоремы 4 без использования предельных теорем для полиномов Дирихле (см. ниже после леммы 2).

Пусть $\sigma_1 > 1/2$ – фиксированное число и для $m, n \in \mathbb{N}$

$$v(m, n) = \exp \left\{ - \left(\frac{m}{n} \right)^{\sigma_1} \right\}.$$

Поскольку последовательность $\mathfrak{A}$ ограничена, нетрудно видеть, что ряд

$$\zeta_n(s; \mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m v(m, n)}{m^s}$$

абсолютно сходится при $\sigma > 1/2$. Действительно, пусть

$$l_n(s) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma \left(\frac{s}{\sigma_1} \right) n^s, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\Gamma(s)$ означает гамма-функцию Эйлера, и

$$a_n(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{l_n(s)}{s m^s} ds.$$

В силу хорошо известных свойств гамма-функции

$$a_n(m) = O \left(\frac{1}{m^{\sigma_1}} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_1 + it)| dt \right) = O \left(\frac{1}{m^{\sigma_1}} \right).$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m a_n(m)}{m^s}$$

абсолютно сходится при $\sigma > 1/2$. Однако, применяя формулу Меллина

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(s) a^{-s} ds = e^{-a},$$

справедливую для всех положительных a и b , находим

$$a_n(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \Gamma \left(\frac{s}{\sigma_1} \right) \left(\frac{m}{n} \right)^{-s} d \left(\frac{s}{\sigma_1} \right) = \exp \left\{ - \left(\frac{m}{n} \right)^{\sigma_1} \right\} = v(m, n),$$

что доказывает абсолютную сходимость при $\sigma > 1/2$ ряда для $\zeta_n(s; \mathfrak{A})$.

Определим

$$Q_T(A) = \nu_T(\{p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}\} \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

ЛЕММА 1. Вероятностная мера Q_T при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере Хара m_H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дуальной группой тора Ω является

$$\bigoplus_p \mathbb{Z}_p,$$

где $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ для всякого $p \in \mathbb{P}$. Вектор $\mathbf{k} = (k_2, k_3, \dots) \in \bigoplus_p \mathbb{Z}_p$, где только конечное число чисел $k_p \in \mathbb{Z}$ отличны от нуля, действует на Ω при помощи $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots$, $\mathbf{x} = (x_2, x_3, \dots) \in \Omega$. Поэтому преобразование Фурье $g_T(\mathbf{k})$ меры Q_T имеет вид

$$g_T(\mathbf{k}) = \int_{\Omega} \prod_p x_p^{k_p} dQ_T = \frac{1}{T} \int_0^T \prod_p p^{-i\tau k_p} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left\{-i\tau \sum_p k_p \log p\right\} d\tau,$$

где только конечное число целых чисел k_p отличны от нуля. Поскольку система $\{\log p : p \in \mathbb{P}\}$ линейно независима над полем рациональных чисел, отсюда вытекает, что

$$g_T(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ \frac{1 - \exp\{-iT \sum_p k_p \log p\}}{iT \sum_p k_p \log p}, & \text{если } \mathbf{k} \neq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ 0, & \text{если } \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

и лемма доказана.

Пусть $\hat{\omega} \in \Omega$ и

$$\zeta_n(s, \hat{\omega}; \mathfrak{A}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \hat{\omega}(m) v(m, n)}{m^s},$$

причем ряд, как и ряд $\zeta_n(s; \mathfrak{A})$, абсолютно сходится при $\sigma > 1/2$. На $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ определим две вероятностные меры

$$P_{T,n}(A) = \nu_T(\zeta_n(s + i\tau; \mathfrak{A}) \in A), \quad \hat{P}_{T,n}(A) = \nu_T(\zeta_n(s + i\tau, \hat{\omega}; \mathfrak{A}) \in A).$$

ТЕОРЕМА 5. На $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ существует вероятностная мера P_n такая, что вероятностные меры $P_{T,n}$ и $\hat{P}_{T,n}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходятся к P_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $u_n: \Omega \rightarrow H(D)$ формулой

$$u_n(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega(m) v(m, n)}{m^s}.$$

Тогда функция u_n непрерывна; кроме того,

$$u_n(\{p^{-i\tau} : p \in \mathbb{P}\}) = \zeta_n(s + i\tau; \mathfrak{A}).$$

Следовательно, в силу леммы 1 и теоремы 5.1 из [5] получаем, что вероятностная мера $P_{T,n}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $m_H u_n^{-1}$.

Теперь пусть функция $\hat{u}_n: \Omega \rightarrow H(D)$ определена формулой

$$\hat{u}_n(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \hat{\omega}(m) \omega(m) v(m, n)}{m^s}.$$

Тогда аналогично случаю меры $P_{T,n}$ получаем, что вероятностная мера $\hat{P}_{T,n}$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к мере $m_H \hat{u}_n^{-1}$. Однако $\hat{u}_n(\omega) = u_n(u(\omega))$, где $u(\omega) = \hat{\omega}\omega$. Это и инвариантность меры Хаара m_H влекут за собой равенство

$$m_H \hat{u}_n^{-1} = m_H (u_n u)^{-1} = (m_H u^{-1}) u_n^{-1} = m_H u_n^{-1},$$

которое заканчивает доказательство теоремы.

ЛЕММА 2. Пусть K – компактное подмножество полосы D . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{A}) - \zeta_n(s + i\tau; \mathfrak{A})| d\tau = 0$$

и для почти всех $\omega \in \Omega$ в смысле меры m_H

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \omega; \mathfrak{A}) - \zeta_n(s + i\tau, \omega; \mathfrak{A})| d\tau = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при $\sigma > 1/2$ имеет место оценка [6]

$$\int_1^T |\zeta(\sigma + it; \mathfrak{A})|^2 dt = O(T), \quad T \rightarrow \infty,$$

доказательство леммы проводится стандартным путем, лишь в деталях отличающимся от случая дзета-функции Римана (см. [4; гл. 5]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Теорема является следствием теоремы 5, леммы 2 и теоремы 4.2 из [5]. При этом применяются рассуждения, аналогичные используемым в доказательстве теоремы 5.1.8 из [4].

3. Доказательство теорем 1–3. Начнем с простого замечания о среднем значении чисел $|a_p|^2$. Пусть $\varphi(k)$ – функция Эйлера, а

$$M(k) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,k)=1}}^k |a_l|^2.$$

ЛЕММА 3. При $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{p \leq x} |a_p|^2 = M(k) \frac{x}{\log x} (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу периодичности последовательности $\mathfrak{A}$ и теоремы о простых числах в арифметических прогрессиях находим, что при $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{p \leq x} |a_p|^2 = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,k)=1}}^k \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l \pmod{k}}} |a_p|^2 = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,k)=1}}^k |a_l|^2 \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l \pmod{k}}} 1 = M(k) \frac{x}{\log x} (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку последовательность $\mathfrak{A}$ вполне мультипликативна, случайный элемент $\zeta(s, \omega; \mathfrak{A})$ может быть записан в виде

$$\zeta(s, \omega; \mathfrak{A}) = \prod_p \left(1 - \frac{a_p \omega(p)}{p^s} \right)^{-1},$$

причем произведение для почти всех $\omega \in \Omega$ равномерно сходится на компактных подмножествах полосы D . Отсюда, используя условие теоремы, теорему 4 и лемму 3, аналогично работе [7] получаем, что носителем меры P_ζ является множество

$$\{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \text{ или } g(s) \equiv 0\}. \quad (2)$$

Поэтому дальнейшее доказательство полностью совпадает со случаем дзета-функции Римана (см. [4; теорема 6.5.2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В виду мультипликативности последовательности $\mathfrak{A}$, случайный элемент $\zeta(s, \omega; \mathfrak{A})$ принимает вид

$$\zeta(s, \omega; \mathfrak{A}) = \prod_p \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_p^\alpha \omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right),$$

причем произведение для почти всех $\omega \in \Omega$ равномерно сходится на компактных подмножествах полосы D . Поэтому условие теоремы, теорема 4, лемма 3 и метод работы [7] опять позволяет получить, что носителем меры P_ζ является множество (2). Отсюда стандартным путем вытекает универсальность функции $\zeta(s; \mathfrak{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Поскольку последовательность $\mathfrak{A}$ немультимпликативна, то случайный элемент $\zeta(s, \omega; \mathfrak{A})$ не записывается в виде произведения. Поэтому мы должны рассматривать случайные величины $\omega(m)$, $m \in \mathbb{N}$, которые не являются независимыми относительно меры m_H . Отсюда следует, что мы не можем воспользоваться тем вероятностным аппаратом, который действует в случае независимых случайных величин $\omega(p)$, $p \in \mathbb{P}$. Поэтому остается ограничиться только условной версией универсальности функции $\zeta(s; \mathfrak{A})$.

Определим множество

$$G = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Тогда множество G открыто, и по условию теоремы оно является окрестностью элемента $f \in S_{P_\zeta}$. Носитель S_{P_ζ} меры P_ζ состоит из точек $x \in H(D)$ таких, что для каждой окрестности O точки x выполняется неравенство $P_\zeta(O) > 0$. Таким образом, $P_\zeta(G) > 0$. Поскольку в силу теоремы 4 и теоремы 2.1 из [5]

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{A}) - f(s)| < \varepsilon \right) \geq P_\zeta(G),$$

то отсюда получаем утверждение теоремы.

ГИПОТЕЗА. Если последовательность $\mathfrak{A}$ не мультипликативна, то $S_{P_\zeta} = H(D)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Steuding, *Value-distribution of L-functions and allied zeta-functions—with an emphasis on aspects of universality*, Habilitationsschrift, Frankfurt, J. W. Goethe-Universität, 2003.
- [2] С. М. Воронин, “Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:1 (1975), 475–486.
- [3] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [4] A. Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [5] П. Билингсли, *Сходимость вероятностных мер*, М., 1977.
- [6] А. Лауринчикас, Д. Шяучюнас, “О периодической дзета-функции. II”, *Лит. матем. сб.*, **41**:4 (2001), 461–476.
- [7] A. Laurinćikas, R. Šleževičienė, “The universality of zeta-functions with multiplicative coefficients”, *Integral Transforms Special Functions*, **13** (2002), 243–257.

А. Лауринчикас

Вильнюсский университет

E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Поступило

31.01.2006

Д. Шяучюнас

Шяуляйский университет

E-mail: siauciunas@fm.su.lt