Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. Гогинава, О чезаровских средних двойных тригонометрических рядов Фурье, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 502–507

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm285>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 11:11:14

УДК 517.51

О ЧЕЗАРОВСКИХ СРЕДНИХ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

У. Гогинава

Жижиашвили изучил вопросы, связанные с аппроксимативными свойствами Чезаровских средних тригонометрических рядов Фурье для функций двух переменных в пространствах H^ω . Нами доказывается, что эту оценку нельзя улучшить при $p = 1$ или $p = \infty$.

Библиография: 5 названий.

Скажем, что функция $f(x, y)$ принадлежит L^p , $1 \leq p < +\infty$, если f является 2π -периодической по каждой переменной, измеримой на $[0, 2\pi)^2$ функцией, для которой конечен функционал

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p dx dy \right\}^{1/p},$$

причем, если $p = +\infty$, то пространство L^∞ будем считать совпадающим с пространством 2π -периодических непрерывных функций двух переменных C .

Для функции $f(x, y)$, принадлежащей L^p , выражения

$$\omega_1(\delta, f)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \|f(\cdot + h, \cdot) - f(\cdot, \cdot)\|_p$$

и

$$\omega_2(\delta, f)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \|f(\cdot, \cdot + h) - f(\cdot, \cdot)\|_p$$

называют частными L^p -модулями непрерывности функции f .

Пусть ω – модуль непрерывности (см. [1]). Если $p \in [1, +\infty]$, то будем предполагать, что

$$H_p^\omega = \{f : \omega_i(\delta, f) \leq A(f, p)\omega(\delta), \delta \in [0, \pi], i = 1, 2\},$$

где $A(f, p)$ – положительная константа.

Пусть $f \in L^1$. Ее рядом Фурье по тригонометрической системе называется ряд

$$\sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} C_{m, n} e^{imx} e^{iny}, \quad (1)$$

где

$$C_{m, n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v) e^{-imu} e^{-inv} du dv$$

суть коэффициенты Фурье функции f .

Пусть $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ – некоторое число. Выражения

$$\sigma_m^\alpha(f; x) = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{j=0}^m A_{m-j}^{\alpha-1} S_{j,j}(f, x)$$

называют (C, α) -средними рядов (1), где $S_{j,j}(f, x)$ – j -я квадратная частная сумма ряда (1), а

$$A_0^\alpha = 1, \quad A_k^\alpha = \frac{(\alpha+1) \cdots (\alpha+k)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Известно (см. Зигмунд [2, с. 131]), что

$$c_1(\alpha)k^\alpha \leq A_k^\alpha \leq c_2(\alpha)k^\alpha. \quad (2)$$

Жижиашвили ([3, с. 367–381]) изучил вопросы, связанные с аппроксимативными свойствами (C, α) -средних, $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, рядов (1) в пространствах L^p , $p \in [1, +\infty]$. В частности, он доказал, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА А. Пусть $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Предположим, что функция $f \in L^p$ при некотором $p \in [1, +\infty]$. Тогда

а) если $\alpha \in (0, +\infty)$, то

$$\|\sigma_m^\alpha(f) - f\|_p \leq A(\alpha, p) \frac{1}{m} \left[\int_{1/m}^\pi \frac{\omega_1(s_1, f)_p}{s_1^2} ds_1 + \int_{1/m}^\pi \frac{\omega_2(s_2, f)_p}{s_2^2} ds_2 \right], \quad (3)$$

б) если же $\alpha \in (0, 1)$, то

$$\|\sigma_m^{-\alpha}(f) - f\|_p \leq A(\alpha, p) m^\alpha \log(m+2) \left[\omega_1\left(\frac{1}{m}, f\right)_p + \omega_2\left(\frac{1}{m}, f\right)_p \right]. \quad (4)$$

Там же доказано, что неравенство (3) при $p = 1$ или $p = \infty$ точно для всего пространства L^p .

Мы утверждаем, что при выполнении условия

$$\frac{\omega(\delta)}{\delta} \uparrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0+, \quad (5)$$

неравенство (4) нельзя улучшить на всем классе H_p^ω при $p = 1$ или $p = \infty$. В частности, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию (5). Тогда при $p = \infty$ или $p = 1$ в классе H_p^ω существует функция f , зависящая от p , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_p}{\omega(1/n)n^\alpha \log n} > 0.$$

Из неравенства (4) вытекает (см. [3, с. 379]) аналог теоремы Зигмунда (см. [4]) для средних $\sigma_n^{-\alpha}$. В частности, имеет место следующая

ТЕОРЕМА Б. Пусть $f \in H_p^{\delta\alpha}$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$. Тогда для любого $\beta \in (0, \alpha)$ справедливо следующее соотношение:

$$\|\sigma_m^{-\beta}(f) - f\|_p \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 1 следует, что при $\beta = \alpha$ теорема Б теряет силу для $p = +\infty$ и $p = 1$, а именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ – некоторое число. Тогда при $p = \infty$ или $p = 1$ в классе $H_p^{\delta\alpha}$ существует функция f , зависящая от p , такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\|_p = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Вначале докажем теорему 1 для случая $p = \infty$. Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k : k \geq 1\}$ такова, что

$$\omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) \leq \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{n_k}\right), \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^k \omega\left(\frac{1}{n_j}\right) n_j \leq \omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right) n_{k+1}, \quad (7)$$

$$kn_k \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \leq n_{k+1} \omega\left(\frac{1}{n_{k+1}}\right), \quad (8)$$

$$3n_k < n_{k+1}. \quad (9)$$

Определим функцию $f_0(x, y)$ формулой

$$f_0(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x, y),$$

где

$$f_k(x, y) = \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \cos n_k x \sin n_k y, \quad \text{если } x \in [-\pi, \pi], \quad y \in [0, \pi],$$

и

$$f_k(x, -y) = f_k(x, y), \quad f_k(x + 2\pi, y) = f_k(x, y + 2\pi) = f_k(x, y).$$

Из (6) легко видеть, что $f_0 \in C$. Докажем, что $f_0 \in H_{\infty}^{\omega}$. Для любого $\delta > 0$ выберем числа n_s и n_{s+1} из последовательности $\{n_k : k \geq 1\}$ так, что $1/n_{s+1} \leq \delta < 1/n_s$. Тогда, так как $\omega(\delta_1)/\delta_1 \leq 2\omega(\delta_2)/\delta_2$, $0 < \delta_2 < \delta_1$, то из (6) и (7) получим

$$\begin{aligned} |f_0(x + \delta, y) - f_0(x, y)| &= O\left(\sum_{k=1}^s \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k \delta + \sum_{k=s+1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right)\right) \\ &= O\left(\omega\left(\frac{1}{n_s}\right) n_s \delta + \omega\left(\frac{1}{n_{s+1}}\right)\right) = O(\omega(\delta)). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $\omega_2(\delta, f) = O(\omega(\delta))$, т.е. $f_0 \in H_{\infty}^{\omega}$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} |\sigma_{n_k}^{-\alpha}(f_0; 0, 0) - f_0(0, 0)| &\geq |\sigma_{n_k}^{-\alpha}(f_k; 0, 0)| - \left| \sigma_{n_k}^{-\alpha} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j; 0, 0 \right) \right| \\ &\quad - \left| \sigma_{n_k}^{-\alpha} \left(\sum_{j=1}^{k-1} f_j; 0, 0 \right) \right| = I - II - III. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} D_{n_k}(v) \sin n_k v \, dv \right| &\geq \left| \int_{\pi/n_k}^{\pi} \frac{\sin^2 n_k v}{2 \sin(v/2)} \cos \frac{v}{2} \, dv \right| - O(1) \\ &\geq c \int_{\pi/n_k}^{\pi/2} \frac{1}{v} \, dv - O(1) \geq c \log n_k, \end{aligned}$$

то из (2) имеем

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\omega(1/n_k)}{A_{n_k}^{-\alpha}} \left| \sum_{j=0}^{n_k} A_{n_k-j}^{-\alpha-1} \int_0^{\pi} D_j(v) \sin n_k v \, dv \int_0^{\pi} D_j(u) \cos n_k u \, du \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\omega(1/n_k)}{A_{n_k}^{-\alpha}} \left| \int_0^{\pi} D_{n_k}(v) \sin n_k v \, dv \right| \geq c \omega \left(\frac{1}{n_k} \right) n_k^{\alpha} \log n_k. \end{aligned} \quad (11)$$

Легко видеть, что

$$II = 0. \quad (12)$$

Так как

$$\omega_s \left(f_j, \frac{1}{n_k} \right) = O \left(\omega \left(\frac{1}{n_j} \right) \frac{n_j}{n_k} \right) \quad \text{при } s = 1, 2,$$

то из (4) и (8) имеем

$$\begin{aligned} III &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \|\sigma_{n_k}^{-\alpha}(f_j) - f_j\|_C = O \left(n_k^{\alpha} \log n_k \sum_{j=1}^{k-1} \left(\omega_1 \left(f_j, \frac{1}{n_k} \right) + \omega_2 \left(f_j, \frac{1}{n_k} \right) \right) \right) \\ &= O \left(n_k^{\alpha-1} \log n_k \sum_{j=1}^{k-1} \omega \left(\frac{1}{n_j} \right) n_j \right) = O \left(n_k^{\alpha-1} \log n_k \omega \left(\frac{1}{n_{k-1}} \right) n_{k-1} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (10)–(13) следует справедливость теоремы 1 при $p = \infty$. Теперь докажем теорему при $p = 1$. Для этого воспользуемся следующими утверждениями.

ТЕОРЕМА В (Зигмунд [5]). *Если $T_n(x)$ – тригонометрический полином порядка n , то для любого $p \geq 1$*

$$\|T'_n\|_p \leq n \|T_n\|_p.$$

ЛЕММА А (Жижиашвили [3]). Если n – произвольное натуральное число, а k – произвольное неотрицательное целое число, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |V(n, k, x)| dx \leq 1, \quad \int_0^{2\pi} |V_2(n, x)| dx \geq c \ln n,$$

где

$$V(n, k, x) = \frac{1}{n+1} (\cos kx + 2 \cos(k+1)x + \dots + (n+1) \cos(k+n)x + n \cos(k+n+1)x + \dots + \cos(k+2n)x)$$

и

$$V_2(n, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cos(k+n)x.$$

Определим функцию $g_0(x, y)$ формулой

$$g_0(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) V(n_k, n_k, x) V(n_k, n_k, y).$$

Докажем, что $g \in H_1^\omega$. Для любого $\delta > 0$ подберем числа n_s и n_{s+1} из последовательности $\{n_k : k \geq 1\}$ так, что $1/n_{s+1} \leq \delta < 1/n_s$. Тогда, применяя теорему Лагранжа, теорему В, лемму А, (6) и (7), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_0(x + \delta, y) - g_0(x, y)| dx dy \\ & \leq \sum_{k=1}^s \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |V(n_k, n_k, x + \delta) - V(n_k, n_k, x)| |V(n_k, n_k, y)| dx dy \\ & \quad + \sum_{k=s+1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |V(n_k, n_k, x + \delta) - V(n_k, n_k, x)| |V(n_k, n_k, y)| dx dy \\ & \leq 2\pi\delta \sum_{k=1}^s \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \int_0^{2\pi} |V'(n_k, n_k, x + \theta\delta)| dx + 8\pi^2 \sum_{k=s+1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \\ & \leq 3(2\pi)^2\delta \sum_{k=1}^s \omega\left(\frac{1}{n_k}\right) n_k + 16\pi^2 \omega\left(\frac{1}{n_{s+1}}\right) \\ & \leq 6(2\pi)^2 \omega\left(\frac{1}{n_s}\right) n_s \delta + 16\pi^2 \omega(\delta) = O(\omega(\delta)), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\theta \in (0, 1)$. Аналогично доказывается, что $\omega_2(\delta, f) = O(\omega(\delta))$, т.е. $f \in H_1^\omega$.

Учитывая ортогональность тригонометрической системы, из леммы А, (2) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \|\sigma_{2n_k}^{-\alpha}(g_0) - g_0\|_1 & \geq \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [\sigma_{2n_k}^{-\alpha}(g_0; x, y) - g_0(x, y)] \cos 2n_k x dx \right| dy \\ & \geq \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \sigma_{2n_k}^{-\alpha}(g_0; x, y) \cos 2n_k x dx \right| dy - \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} g_0(x, y) \cos 2n_k x dx \right| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{A_{2n_k}^{-\alpha}} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} S_{2n_k, 2n_k}(g_0; x, y) \cos 2n_k x \, dx \right| dy \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} g_0(x, y) \cos 2n_k x \, dx \right| dy \\
&= \pi \frac{\omega(1/n_k)}{A_{2n_k}^{-\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n_k + 1} \left| \sum_{j=n_k}^{2n_k} (j - n_k + 1) \cos jy \right| dy \\
&\quad - \pi \omega \left(\frac{1}{n_k} \right) \int_0^{2\pi} |V(n_k, n_k, y)| \, dy \\
&\geq \pi \frac{\omega(1/n_k)}{A_{2n_k}^{-\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n_k + 1} \left| \sum_{j=1}^{n_k+1} j \cos(j + n_k - 1)y \right| dy - 2\pi^2 \omega \left(\frac{1}{n_k} \right) \\
&\geq \pi \frac{\omega(1/n_k)}{A_{2n_k}^{-\alpha}} \frac{n_k - 1}{n_k + 1} \int_0^{2\pi} |V_2(n_k - 1, y)| \, dy \\
&\quad - \pi \frac{\omega(1/n_k)}{A_{2n_k}^{-\alpha}} \frac{1}{n_k + 1} \int_0^{2\pi} |(n_k - 1) \cos(2n_k - 2) + n_k \cos(2n_k - 1)y \\
&\quad + (n_k + 1) \cos 2n_k y| \, dy - 2\pi^2 \omega \left(\frac{1}{n_k} \right) \\
&\geq c_3(\alpha) \omega \left(\frac{1}{n_k} \right) n_k^\alpha \log n_k - c_4(\alpha) \omega \left(\frac{1}{n_k} \right) n_k^\alpha - 2\pi^2 \omega \left(\frac{1}{n_k} \right).
\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [3] Жижиашвили Л. В. Некоторые вопросы теории тригонометрических рядов Фурье и их сопряженных. Тбилиси: Изд. ТГУ, 1993.
- [4] Zygmund A. Sur la sommabilité des series de Fourier des fonctions verifiant la condition de Lipschitz // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys. 1925. P. 1–9.
- [5] Zygmund A. A remark on conjugate series // PLMS. 1932. V. 34. P. 392–400.

Тбилисский государственный университет
им. И. Джавахишвили
E-mail: z.goginava@hotmail.com

Поступило
25.02.2002