Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Монахов, Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 573–581

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2850>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:03:32

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ПОЛУНОРМАЛЬНОЙ ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППОЙ

В. С. Монахов

Устанавливаются признаки π -разрешимости конечной группы с полунормальной π -холловой подгруппой и доказывается нильпотентность третьего коммутанта группы с полунормальными нециклическими силовскими подгруппами.

Библиография: 10 названий.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Подгруппа H группы G называется *полунормальной* в G , если существует такая подгруппа K из G , что $HK = G$ и HK_1 – собственная подгруппа группы G для каждой подгруппы K_1 из K , отличной от K . В этой ситуации подгруппу K назовем *супердобавлением* к подгруппе H в группе G .

Очевидно, что каждая подгруппа простого индекса является полунормальной. Из леммы Кегеля [1] следует, что в простой группе полунормальная подгруппа всегда имеет простой индекс. Поэтому из [2] легко выводится полный список всех простых групп с полунормальной собственной подгруппой.

В непростых группах полунормальная подгруппа может иметь непростой индекс. Кроме того, всякая квазинормальная подгруппа (т.е. перестановочная со всеми подгруппами группы) является полунормальной. В симметрической группе S_4 и в полной линейной группе $GL(2, 3)$ силовские 2-подгруппы полунормальны, но не квазинормальны. Отдельные свойства полунормальных подгрупп рассматривались в [3], [4]. В частности, в [3] замечена сверхразрешимость группы с полунормальными силовскими подгруппами.

В настоящей заметке изучаются группы с полунормальной холловой подгруппой. Доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в группе G существует полунормальная π -холлова подгруппа H . Тогда группа G π -разрешима в каждом из следующих случаев:

- 1) H 2-нильпотентна;
- 2) H разрешима и $3 \notin \pi$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – π -разрешимая группа с полунормальной π -холловой подгруппой H . Тогда

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, гранты № Ф04МС-060 и № Ф05-341.

- 1) $H' \subseteq O_\pi(G)$;
- 2) $l_\pi(G) \leq 2$, $l_{\pi'}(G) \leq 2$;
- 3) $l_\pi^n(G) \leq 1 + n(H)$, $l_\pi^a(G) \leq 1 + d(H)$;
- 4) если $G_{\pi'}$ q -сверхразрешима для некоторого $q \in \pi'$, то группа G q -сверхразрешима.

ТЕОРЕМА 3. Если в группе G каждая нециклическая силовская подгруппа полунормальна, то группа G разрешима и ее третий коммутант нильпотентен.

Напомним, что 2-нильпотентной называют группу с нормальной $2'$ -холловой подгруппой. Через $l_\pi(G)$, $l_\pi^n(G)$, $l_\pi^a(G)$ обозначается π -длина, нильпотентная π -длина и производная π -длина π -разрешимой группы G соответственно; определения см. ниже. Как всегда, H' – коммутант группы H , а $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная π -подгруппа группы G ; q -сверхразрешимой группой называют группу, обладающую нормальным рядом, факторы которого либо q' -группы, либо группы порядка q . Если A и B – подгруппы группы G , то $A^B = \langle A^b \mid b \in B \rangle$, в частности, A^G – наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащая A .

Нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1. 1. Если H – полунормальная подгруппа группы G и $H \leq X \leq G$, то H полунормальна в X .

2. Если H – полунормальная и N – нормальная подгруппы группы G , то HN/N – полунормальная подгруппа в G/N .

3. Если H – полунормальная подгруппа группы G и K – ее супердобавление, то H перестановочна с подгруппой L^g для всех $L \leq K$ и всех $g \in G$. В частности, подгруппа K^g будет супердобавлением к подгруппе H для каждого $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два свойства легко выводятся из определения полунормальной подгруппы. Проверим третье свойство. Пусть $g = ab$, $a \in K$, $b \in H$. Тогда $L^a \leq K$ и

$$HL^g = HL^a = (HL^a)^b = (L^a H)^b = L^{ab} H = L^g H.$$

Так как $G = HK^g$, то K^g – супердобавление к H в G .

ЛЕММА 2. Если в группе G существует полунормальная π -холлова подгруппа H , то супердобавление к H в G является π' -холловой подгруппой группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – супердобавление к подгруппе H . Тогда $D = K \cap H$ является π -подгруппой. По свойству 3 из леммы 1 подгруппа H перестановочна с D^g для всех $g \in G$, поэтому $D^G \subseteq H$ и $D = K \cap H = K \cap D^G$ нормальна в K . Так как $|G:H| = |K:D|$, то D – π -холлова нормальная подгруппа в K . По теореме 1.18.2 [5] существует в K дополнение K_1 к подгруппе D , которое будет π' -холловой подгруппой группы G . Ясно, что $G = HK_1$ и $K = K_1$ по определению супердобавления.

ЛЕММА 3. Если P и Q – полунормальные силовские p - и q -подгруппы группы G , $p \neq q$, то PQ – полунормальная $\{p, q\}$ -холлова подгруппа в группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – супердобавление к подгруппе P . По лемме 2 подгруппа K будет p' -холловой в группе G . Пусть Q_1 – силовская q -подгруппа из K . Так как Q_1 – силовская в G , то $Q_1^x = Q \leq K^x$ для некоторого $x \in G$. По свойству 3

из леммы 1 подгруппа P перестановочна с Q , т.е. PQ является $\{p, q\}$ -холловой подгруппой группы G и K^x будет супердобавлением к P . Поскольку Q полунормальная в K^x , то супердобавление K_1 к Q в K^x будет q' -холловой подгруппой в K^x , а значит, $\{p, q\}'$ -холловой подгруппой группы G . Если K_2 – произвольная подгруппа в K_1 , то подгруппы P и Q перестановочны с K_2 и $G = (PQ)K_1$, т.е. K_1 – супердобавление к PQ в G и PQ полунормальна в G .

ЛЕММА 4. Пусть в группе G существует полунормальная π -холлова подгруппа. Если $p > q$ для каждого $p \in \pi$ и каждого $q \in \pi'$, то G π -замкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Пусть H – π -холлова подгруппа группы G и K – супердобавление к H в G . По лемме 2 подгруппа K является π' -холловой в группе G . Предположим, что M_i – максимальная подгруппа в K . Тогда HM_i – подгруппа в группе G и H – π -холлова подгруппа в HM_i . По индукции подгруппа H нормальна в HM_i . Если M_1 и M_2 – две различные максимальные подгруппы в K , то H нормальна в $\langle HM_1, HM_2 \rangle = HK = G$ и лемма доказана. Если в K только одна максимальная подгруппа, то K – примарная циклическая подгруппа. Пусть K – q -подгруппа. По условию $p > q$ для каждого $p \in \pi(G)$, $p \neq q$, т.е. q – наименьший простой делитель порядка группы G . Теперь H нормальна в G по теореме 4.2.8 [5].

ЛЕММА 5. Если H – полунормальная подгруппа группы G и K – ее супердобавление, то подгруппа $H^L \cap L^H$ субнормальна в G для каждой подгруппы L из K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству 3 из леммы подгруппа H перестановочна с L^g для всех $L \leq K$ и всех $g \in G$. Теперь по теореме 7.2.5 [6] пересечение $H^L \cap L^H$ – субнормальная подгруппа группы G . Лемма доказана.

Группа G называется π -отделимой, если каждый главный фактор G является либо π -группой, либо π' -группой; π -отделимая группа, у которой каждый π -главный фактор разрешим, называется π -разрешимой. В силу теоремы Томпсона–Фейта о разрешимости групп нечетного порядка каждая π -отделимая группа π -разрешима при $2 \in \pi$ и π' -разрешима при $2 \in \pi'$. Используемые в дальнейшем свойства π -отделимых и π -разрешимых групп можно найти в [5], [7; гл. 6, 9]. Дополнительно будут использоваться следующие понятия.

π -длина неединичной π -отделимой группы G определяется как наименьшее число π -факторов во всех тех нормальных рядах группы G , в которых каждый фактор является либо π' -группой, либо π -группой; π -длина π -отделимой группы G обозначается через $l_\pi(G)$. Поскольку каждая π -отделимая группа является π' -отделимой, то можно говорить о π' -длине $l_{\pi'}(G)$ π -отделимой группы G .

Любая π -разрешимая группа обладает нормальным рядом, каждый фактор которого является либо π' -группой, либо абелевой π -группой. Нильпотентная π -длина $l_\pi^n(G)$ неединичной π -разрешимой группы G определяется как наименьшее число нильпотентных π -факторов во всех тех нормальных рядах группы G , в которых каждый фактор является либо π' -группой, либо нильпотентной π -группой. Понятно, что при $\pi = \{p\}$ получаем обычное определение p -длины p -разрешимой группы (см. [5; п. 6.6]). Ясно также, что в этом случае $l_\pi(G) = l_\pi^n(G) = l_p(G)$.

Производная π -длина $l_\pi^a(G)$ неединичной π -разрешимой группы G определяется как наименьшее число абелевых π -факторов во всех тех нормальных рядах группы G , в которых каждый фактор является либо π' -группой, либо абелевой π -группой.

Для единичной группы E полагаем $l_\pi(E) = l_\pi^n(E) = l_\pi^a(E) = 0$.

В случае, когда $\pi = \pi(G)$, π -разрешимая группа G становится разрешимой, нильпотентная π -длина $l_\pi^n(G)$ совпадает с нильпотентной длиной $n(G)$, а производная π -длина $l_\pi^a(G)$ – с производной длиной $d(G)$ группы G . При $\pi \subseteq \pi(G)$ и $\pi \neq \pi(G)$ понятия нильпотентной π -длины и производной π -длины также представляют самостоятельный интерес.

ЛЕММА 6 [7; лемма 9.1.3]. *Если G – π -отделимая группа и $O_{\pi'}(G) = E$, то $C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G)$.*

ЛЕММА 7. *Если π -холлова подгруппа π -разрешимой группы G абелева, то $l_\pi^a(G) = l_\pi^n(G) = l_\pi(G) \leq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $O_{\pi'}(G) = E$. По лемме 6 $C_G(O_\pi(G)) \subseteq O_\pi(G)$. Так как $O_\pi(G) \subseteq G_\pi$ и G_π абелева, то $G_\pi \subseteq C_G(O_\pi(G))$ и $l_\pi^a(G) \leq 1$. Если $O_{\pi'}(G) \neq E$, то $l_\pi^a(G)/O_{\pi'}(G) \leq 1$, а значит, и $l_\pi^a(G) \leq 1$. Поскольку $l_\pi(G) \leq l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G)$, то лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Если G – π -отделимая группа, то $O_\pi(G/\Phi(G)) = O_\pi(G)\Phi(G)/\Phi(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K/\Phi(G) = O_\pi(G/\Phi(G))$ и H – π -холлова подгруппа из K . Тогда $K = H\Phi(G)$ и по лемме Фраттини

$$G = KN_G(H) = H\Phi(G)N_G(H) = N_G(H),$$

т.е. $H \subseteq O_\pi(G)$. Теперь

$$O_\pi(G/\Phi(G)) \subseteq O_\pi(G)\Phi(G)/\Phi(G).$$

Обратное включение также выполняется, поэтому имеем равенство.

ЛЕММА 9 [8; следствие 7.7.1]. *Если X – субнормальная π -разрешимая подгруппа группы G , то X^G π -разрешима.*

ЛЕММА 10. *Если π' -холлова подгруппа π -разрешимой группы G является q -разрешимой, то и группа G q -разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Факторгруппа G/N удовлетворяет условию леммы, поэтому G q -разрешима. Значит, порядок N должен делиться на простое число q и N будет π' -подгруппой. Теперь N содержится в π' -холловой подгруппе, а поскольку она q -разрешима и N является прямым произведением простых изоморфных подгрупп, то N становится q -подгруппой, а группа G q -разрешимой.

ЛЕММА 11 [9; теорема 2]. *Группа, являющаяся произведением 2-нильпотентной подгруппы и циклической подгруппы, не проста. Если циклический фактор имеет нечетный порядок, то группа разрешима.*

ЛЕММА 12 [10]. *Группа, являющаяся произведением разрешимых $3'$ -подгрупп, разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Применим индукцию к порядку группы G . В силу свойств 1 и 2 из леммы 1 условия теоремы наследуются всеми факторгруппами группы G и всеми подгруппами, содержащими подгруппу H . Поэтому можно считать, что в группе G нет нетривиальных π -разрешимых нормальных подгрупп и в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа; обозначим ее через N . По лемме 2 в G существует π' -холлова подгруппа K , которая является супердобавлением к подгруппе H в группе G , т.е. HK_1 – собственная подгруппа в G для любой собственной подгруппы K_1 из K . По свойству 1 из леммы 1 подгруппа H полунормальна в HK_1 и $H^{HK_1} = H^{K_1} \subseteq HK_1 \neq G$, поэтому HK_1 – π -разрешимая подгруппа по индукции. По свойству 3 из леммы 1 подгруппа H перестановочна с подгруппой K_1^x для каждого $x \in G$. По лемме 5 пересечение $D = H^{K_1} \cap K_1^H$ является субнормальной подгруппой группы G . Подгруппа D π -разрешима, поскольку $D \subseteq H^{K_1}$. По лемме 9 подгруппа D^G является π -разрешимой и нормальной в G , поэтому $E = D = H^{K_1} \cap K_1^H$ и

$$[H, K_1] \subseteq [H^{K_1}, K_1^H] \subseteq H^{K_1} \cap K_1^H = E.$$

Значит, подгруппа H централизует каждую собственную подгруппу из K . Если K содержит две различные максимальные подгруппы, то H централизует подгруппу K , поэтому H нормальна в G . Следовательно, в группе K только одна максимальная подгруппа, поэтому K – циклическая p -группа для некоторого простого p .

Если $|K| > p$, то максимальная подгруппа из K будет неединичной нормальной подгруппой группы G , противоречие. Значит, $|K| = p$. Ясно, что $p > 3$. Теперь группа G разрешима по лемме 11 или по лемме 12.

ПРИМЕР 1. В знакопеременной группе A_5 подгруппа A_4 является $\{2, 3\}$ -холловой полунормальной подгруппой. Значит, группа с 2-замкнутой, а тем более просто с разрешимой π -холловой подгруппой может быть не π -разрешимой.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в группе G существует полунормальная π -холлова подгруппа нечетного порядка, то G π -разрешима.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в группе G существует полунормальная 2-нильпотентная холлова подгруппа нечетного индекса, то G разрешима.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если в группе G силовская p -подгруппа полунормальна, то G p -разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем утверждение 1). Применим индукцию к порядку группы G . Предположим, что $N = O_\pi(G) \neq E$. Тогда G/N – π -разрешимая группа с полунормальной π -холловой подгруппой H/N . По индукции $(H/N)' \subseteq O_\pi(G/N) = E$. Поскольку $(H/N)' = H'N/N$, то $H'N = N$ и $H' \subseteq N$.

Теперь будем считать, что $O_\pi(G) = E$, и покажем, что подгруппа H абелева. Предположим, что подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G неединична. Тогда по индукции

$$(H\Phi(G)/\Phi(G))' \subseteq O_\pi(G/\Phi(G)).$$

По лемме 8 $O_\pi(G/\Phi(G)) = E$ и $H\Phi(G)/\Phi(G)$ абелева. Но теперь

$$H' \subseteq (H\Phi(G))' \subseteq \Phi(G),$$

а так как $\Phi(G) - \pi'$ -группа, то $H' = E$ и H абелева. Следовательно, можно считать, что $\Phi(G) = E$.

Предположим, что $B = O_{\pi'}(G)H$ – собственная подгруппа группы G . Тогда $H' \subseteq O_{\pi}(B)$ по индукции. Но

$$O_{\pi}(B) \subseteq C_G(O_{\pi'}(G)) \subseteq O_{\pi'}(G)$$

по лемме 6. Значит, $O_{\pi}(B) = E$ и H абелева. Итак, группа $G = O_{\pi'}(G)H$.

Пусть M_i – максимальная подгруппа в $O_{\pi'}(G)$. Так как H полунормальна в G , то HM_i – собственная подгруппа в группе G . Кроме того,

$$M_i H \cap O_{\pi'}(G) = M_i(H \cap O_{\pi'}(G)) = M_i$$

и M_i нормальна в $M_i H$. По индукции,

$$H' \subseteq O_{\pi}(HM_i) \subseteq C_{HM_i}(M_i).$$

Если в группе $O_{\pi'}(G)$ имеются две различные максимальные подгруппы M_1 и M_2 , то

$$H' \subseteq C_G(M_1) \cap C_G(M_2) \subseteq C_G(\langle M_1, M_2 \rangle) \subseteq C_G(O_{\pi'}(G)) \subseteq O_{\pi'}(G).$$

Значит, $H' = E$ и H абелева. Если в группе $O_{\pi'}(G)$ только одна максимальная подгруппа, то $O_{\pi'}(G)$ является циклической примарной подгруппой. Но группа автоморфизмов циклической группы абелева. Поэтому $G/C_G(O_{\pi'}(G))$ абелева. Отсюда следует, что H абелева. Первое утверждение теоремы 2 доказано.

Докажем пункты 2) и 3). Так как π -холлова подгруппа в группе $G/O_{\pi}(G)$ абелева, то

$$l_{\pi}(G/O_{\pi}(G)) = l_{\pi}^n(G/O_{\pi}(G)) = l_{\pi}^a(G/O_{\pi}(G)) = 1$$

по лемме 7. Но $n(O_{\pi}(G)) \leq n(H)$, $d(O_{\pi}(G)) \leq d(H)$, поэтому

$$l_{\pi}(G) \leq 2, \quad l_{\pi}^n(G) \leq 1 + n(H), \quad l_{\pi}^a(G) \leq 1 + d(H).$$

Для получения оценки $l_{\pi'}(G) \leq 2$ применим индукцию к порядку группы G . По индукции можно считать, что $O_{\pi}(G) = E$, поэтому π -холлова подгруппа в G абелева и $l_{\pi}(G) \leq 1$ по лемме 7. Но теперь $l_{\pi'}(G) \leq 2$.

Докажем 4). Воспользуемся индукцией по порядку группы G . По лемме 2 в G существует π' -холлова подгруппа K и H перестановочна со всеми подгруппами из K . Условия наследуются всеми факторгруппами. Если $\Phi(G) \neq E$, то по индукции факторгруппа $G/\Phi(G)$ q -сверхразрешима, теперь G q -сверхразрешима по следствию 4.2.2 [8]. Ясно, что $O_{q'}(G) = O_{\pi}(G) = E$ и в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа N , причем N является π' -подгруппой. Поэтому $N \subseteq K$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа в K , содержащаяся в N . Поскольку подгруппа K q -сверхразрешима, то L является либо q' -подгруппой, либо L имеет порядок q . Подгруппа L субнормальна в G и $\pi(L^G) = \pi(L)$ по следствию 7.7.2 [8]. Так как $O_{q'}(G) = E$, то $|L| = q$. Из полунормальности подгруппы H следует, что произведение HL является подгруппой группы G и $HL \cap N = L(H \cap N) = L$ – нормальная подгруппа в HL , а значит, и в G . Поэтому $L = N$ и факторгруппа $G/C_G(N)$ циклическая как группа автоморфизмов группы N простого порядка q .

По теореме 3.4.5 [5] при $\Phi(G) = E$ подгруппа Фиттинга $F(G)$ является прямым произведением абелевых минимальных нормальных подгрупп группы G , поэтому

$$F(G) = F(O_{\pi'}(G)) = N = O_q(G).$$

По лемме 10 группа G q -разрешима, а по лемме 6 $N = C_G(N)$ и группа G становится метациклической, а значит, и сверхразрешимой. Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Полная линейная группа $GL(2, 3)$ имеет ряд коммутантов

$$GL(2, 3) > SL(2, 3) > Q > I > E,$$

где $Q = (GL(2, 3))''$ – группа кватернионов порядка 8, $I = Z(GL(2, 3)) = GL(2, 3)'''$ – центр группы $GL(2, 3)$, $|I| = 2$. Поэтому

$$l_2(GL(2, 3)) = l_2^n(GL(2, 3)) = 2, \quad l_2^a(GL(2, 3)) = 3.$$

В $GL(2, 3)$ силовская 2-подгруппа имеет простой индекс, поэтому она полунормальна. Значит, оценки длин в пунктах 2), 3) теоремы 2 являются точными.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть p – простое число, P – силовская p -подгруппа группы G и $\pi = \pi(G) \setminus \{p\}$. Если подгруппа P полунормальна в G , то справедливы следующие утверждения:

- 1) группа G p -разрешима и $P' \leq O_p(G)$;
- 2) $l_p(G) \leq 2$, $l_\pi(G) \leq 2$ и $l_p^a(G) \leq 1 + d(P)$;
- 3) если p' -холлова подгруппа группы G q -сверхразрешима для некоторого $q \in \pi$, то группа G q -сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 5. Бипримарная $\{p, q\}$ -группа G с полунормальной силовской p -подгруппой является q -сверхразрешимой группой, и $n(G) \leq 3$. Кроме того, G p -замкнута при $p > q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. q -сверхразрешимость группы G вытекает из третьего утверждения следствия 4. Если $q < p$, то группа G p -замкнута по лемме 4.

ПРИМЕР 3. Симметрическая группа S_4 имеет нильпотентную длину 3, и в ней силовская 2-подгруппа полунормальна. Поэтому оценка нильпотентной длины группы в следствии 5 точная.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть G – группа и $r \in \pi(G)$. Если в группе G силовские p -подгруппы полунормальны для всех $p \in \pi(G) \setminus \{r\}$, то группа G разрешима и r -сверхразрешима. В частности, если в группе G все силовские подгруппы полунормальны, то G сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi = \pi(G) \setminus \{r\}$. По теореме 2 группа G p -разрешима для всех $p \in \pi$, поэтому группа G π -разрешима, а так как $|\pi(G) \setminus \pi| = |\{r\}| = 1$, то группа G разрешима и r -сверхразрешима. Если в группе G все силовские подгруппы полунормальны, то G p -сверхразрешима для каждого $p \in \pi(G)$, поэтому группа G сверхразрешима.

Отметим, что в [3] также доказана сверхразрешимость группы с полунормальными силовскими подгруппами. Но в [3] использовалась классификация простых групп. Наше доказательство классификацию простых групп не использует.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть G – группа и $r, s \in \pi(G)$. Если в группе G силовские p -подгруппы полунормальны для всех $p \in \pi(G) \setminus \{r, s\}$, то группа G разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi = \pi(G) \setminus \{r, s\}$. По теореме 2 группа G p -разрешима для всех $p \in \pi$, поэтому группа G π -разрешима. Теперь группа G обладает нормальным рядом, факторы которого либо разрешимые π -группы, либо $\{r, s\}$ -группы. Так как бипримарные группы разрешимы, то группа G разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\pi(G) = \pi \cup \tau$, причем для каждого $p \in \pi$ силовская p -подгруппа полунормальна, а для каждого $q \in \tau$ силовская q -подгруппа циклическая. Если $\pi = \emptyset$ или $\tau = \emptyset$, то G сверхразрешима либо по теореме 4.2.11 [5], либо по следствию 6. В этом случае по теореме 6.9.1 [5] коммутант группы G нильпотентен и теорема 3 доказана. Поэтому будем считать, что $\pi \neq \emptyset \neq \tau$.

По теореме 2 группа G p -разрешима для всех $p \in \pi$, поэтому группа G π -разрешима. Теперь группа G обладает нормальным рядом, факторы которого либо разрешимые π -группы, либо τ -группы. Так как в τ -группе все силовские подгруппы циклические, то по теореме 4.2.11 [5] все τ -факторы этого ряда метациклические. Следовательно, группа G разрешима. Теперь группа $G = AB$, где A – π -холлова подгруппа, а B – τ -холлова подгруппа. По лемме 3 A – полунормальная π -холлова подгруппа группы G и $A' \subseteq O_\pi(G)$ по теореме 2.

Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G . Ясно, что в G/N силовские подгруппы либо полунормальны, либо циклические. По индукции подгруппа

$$(G/N)''' = G'''N/N \simeq G'''/G''' \cap N$$

нильпотентна, где G''' – третий коммутант группы G . Если в G существуют две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 , то $N_1 \cap N_2 = E$ и G изоморфна подгруппе из прямого произведения $(G/N_1) \times (G/N_2)$. Так как коммутант прямого произведения совпадает с прямым произведением коммутантов сомножителей, то подгруппа G''' будет содержаться в произведении третьих коммутантов групп G/N_1 и G/N_2 , а значит, будет нильпотентной. Если $\Phi(G) \neq E$, то $G'''/G''' \cap \Phi(G)$ нильпотентна, а по следствию 4.2.1 [8] подгруппа G''' нильпотентна. Таким образом, следует считать, что $\Phi(G) = E$ и в G единственная минимальная нормальная подгруппа. Но в этом случае подгруппа Фиттинга $F(G)$ является минимальной нормальной подгруппой, $F(G) = C_G(F(G))$ и $F(G) = O_r(G)$ для некоторого простого r ; см. [5; теоремы 3.4.2, 3.4.5].

Если $r \in \tau$, то $F(G) \subseteq B$ и $F(G)$ циклическая. Теперь $|F(G)| = r$ и факторгруппа $G/F(G)$ – циклическая группа порядка, делящего $r - 1$. Поэтому второй коммутант G'' нильпотентен.

Пусть $r \in \pi$, тогда $F(G) \subseteq A$. Так как A сверхразрешима по следствию 6, то A дисперсивна и ее коммутант A' нильпотентен, см. [5; теорема 6.9.1]. Равенство $F(G) = C_G(F(G))$ вынуждает подгруппу A' быть r -подгруппой, а r – наибольшим простым числом в π . Поскольку $A' \subseteq O_\pi(G) \subseteq A$, то $O_\pi(G)$ дисперсивна, поэтому $A' \subseteq O_r(O_\pi(G)) \subseteq F(G)$. Теперь $A/F(G)$ – абелева π -холлова подгруппа группы $G/F(G)$.

По теореме 4.2.11 [5] подгруппа $B = B'B_1$, где B' и B_1 – циклические холловы подгруппы. Подгруппа A перестановочна с подгруппами B' и B_1 , поскольку A

полуноормальна. Теперь факторгруппа

$$G/F(G) = (A/F(G))(B'F(G)/F(G))(B_1F(G)/F(G))$$

является произведением абелевых попарно перестановочных подгрупп взаимно простых порядков. По теореме 6.14.16 [5] производная длина факторгруппы $G/F(G)$ не превышает 3. Это означает, что третий коммутант группы G нильпотентен. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Kegel, “Produkte nilpotenter Gruppen”, *Arch. Math.*, **12** (1961), 90–93.
- [2] R. M. Guralnick, “Subgroups of prime power index in a simple group”, *J. Algebra*, **81:2** (1983), 304–311.
- [3] В. В. Подгорная, “Полуноормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп”, *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук*, 2000, № 4, 22–25.
- [4] Su Xiongying, “On semi-normal subgroups of finite group”, *J. Math. (Wuhan)*, **8(1)** (1988), 7–9.
- [5] B. Huppert, *Endliche Gruppen*, **I**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.
- [6] J. C. Lennox, S. E. Stonehewer, *Subnormal Subgroups of Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [7] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups*, **II**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982.
- [8] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, М., 1978.
- [9] В. С. Монахов, “Произведение разрешимой и циклической групп”, *VI Всесоюзный симпозиум по теории групп*, Сб. научных трудов, Наукова думка, Киев, 1980, 188–195.
- [10] С. А. Сыскин, “Об одном вопросе Р. Бэра”, *Сиб. матем. ж.*, **20:3** (1979), 679–681.

В. С. Монахов

Гомельский университет им. Ф. Скорины, Беларусь

E-mail: monakhov@gsu.unibel.by

Поступило

08.12.2005