Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Номировский, О единственной разрешимости псевдогиперболических уравнений с сингулярными правыми частями, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 582–595

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 11:28:57

УДК 517.956.6

О ЕДИНСТВЕННОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Д. А. Номировский

В статье рассматриваются вопросы разрешимости задачи Коши для псевдогиперболического уравнения (дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка). Для случая, когда правая часть является обобщенной функцией некоторых конечных порядков, установлена теорема о единственной разрешимости для достаточно общего псевдогиперболического оператора. Метод доказательства основан на получении для прямого и сопряженного операторов “шкалы” априорных неравенств.

Библиография: 20 названий.

Псевдогиперболическими называют дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$u_{tt} + A(u_t) + B(u) = F(t, x),$$

где $u(t, x)$ – искомая функция, $(t, x) \in (0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, A, B – операторы второго порядка по пространственным переменным. Постановки задач, приводящие к таким уравнениям математической физики, и исследования классических начально-краевых задач для таких систем в цилиндрической области $(0, T) \times \Omega$ представлены в литературе достаточно хорошо [1]–[5]. Краевые задачи с косою производной для псевдогиперболического оператора рассматривались в [6], нелокальные задачи – в [7]. В случае, когда правая часть F является обобщенной функцией некоторого конечного порядка, псевдогиперболические уравнения изучались в [7]–[10]. Задачи оптимального управления такими системами рассматривались в [10]–[13]. Отметим, что наличие в правой части уравнения обобщенных функций часто носит принципиальный характер, поскольку именно в рамках этой теории адекватно описываются важные для приложений ситуации импульсных, точечных, подвижных и т.п. воздействий на систему [14].

Однако все известные результаты относительно псевдогиперболических уравнений с обобщенными функциями в правой части содержат ряд существенных ограничений на операторы A, B (равномерная эллиптичность, жесткие условия на младшие члены или вообще отсутствие этих слагаемых, условия на гладкость коэффициентов). Кроме того, в указанных работах теоремы о разрешимости устанавливают только одно соотношение между гладкостями правой части и решения уравнения,

что позволяет применять такие теоремы эффективно только в случае, когда дифференциальные свойства конкретной правой части совпадают с требованиями гладкости в пространстве правых частей. Например, если доказано, что для произвольного $F \in L_2$ существует единственное решение с некоторыми свойствами гладкости, то применять такой результат для правых частей, обладающих дифференциальными свойствами, существенно лучшими, чем у функций пространства L_2 , будет неэффективно, поскольку общая теорема обеспечивает, как правило, заниженную гладкость решения.

В данной работе снято большинство ограничений (существенным остается только равномерная эллиптичность оператора A). Для псевдогиперболического оператора построена “шкала” априорных неравенств по переменной t , что позволяет доказать различные теоремы единственной разрешимости системы в зависимости от порядка сингулярности правой части F .

1. Основные обозначения и пространства. В области $Q = (0, T) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная односвязная область с регулярной границей $\partial\Omega$, рассмотрим псевдогиперболическое уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + B(u) = f, \quad (1)$$

где $u(t, x)$ – функция состояния, удовлетворяющая краевым условиям

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = f_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_1, \quad (2)$$

A – оператор второго порядка, не зависящий от переменной t ,

$$A(u) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u.$$

Оператор B задается аналогичным дифференциальным выражением. Предполагается, что $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$. Кроме того, оператор A является равномерно эллиптическим в области $\bar{\Omega}$, т.е. для произвольных действительных λ_i при каждом $x \in \bar{\Omega}$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad (3)$$

где α – положительная постоянная, не зависящая от $x \in \bar{\Omega}$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Обозначим через L множество функций $u(t, x) \in C^\infty(\bar{Q})$, удовлетворяющих условиям

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \dots = 0.$$

Пусть $W_0^{k,1}$, $H_0^{k,1}$, $V_0^{k,1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, – пополнения множества L по нормам

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_0^{k,1}}^2 &= \sum_{i=1}^n \int_Q (u_{x_i}^{(k)})^2 dQ, & \|u\|_{H_0^{k,1}}^2 &= \int_Q (u^{(k)})^2 + \sum_{i=1}^n \left(\left(\int_0^t u_{x_i} d\tau \right)^{(k)} \right)^2 dQ, \\ \|u\|_{V_0^{k,1}}^2 &= \|u\|_{H_0^{k,1}}^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\left(\int_0^t u_{x_i} d\tau \right)^{(k)} \right)^2 \Big|_{t=T} d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

соответственно. Верхний индекс в $u^{(k)}$ здесь и далее обозначает k -ю производную функции $u(t, x)$ по переменной t .

Положим $W_T^{k,1}$, $H_T^{k,1}$, $V_T^{k,1}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, – пополнения множества функций $v(t, x) \in C^\infty(\bar{Q})$, удовлетворяющих сопряженным условиям

$$v|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=T} = \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=T} = \dots = 0 \quad (5)$$

по нормам (4) и

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_T^{k,1}}^2 &= \int_Q (v^{(k)})^2 + \sum_{i=1}^n \left(\left(\int_T^t v_{x_i} d\tau \right)^{(k)} \right)^2 dQ, \\ \|v\|_{V_T^{k,1}}^2 &= \|v\|_{H_T^{k,1}}^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\left(\int_T^t v_{x_i} d\tau \right)^{(k)} \right)^2 \Big|_{t=0} d\Omega \end{aligned}$$

соответственно.

ЛЕММА 1. *Для произвольного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место плотные непрерывные вложения*

- 1) $H_0^{k+1,1} \subset W_0^{k,1} \subset V_0^{k,1} \subset H_0^{k,1} \subset L_2(Q)$;
- 2) $H_T^{k+1,1} \subset W_T^{k,1} \subset V_T^{k,1} \subset H_T^{k,1} \subset L_2(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму для первой цепочки вложений при $k = 1$, в остальных случаях рассуждения аналогичны. Для функций множества L имеет место неравенство $\|u\|_{H_0^{1,1}} \leq \|u\|_{V_0^{1,1}}$, что обеспечит непрерывность вложения $V_0^{1,1} \subset H_0^{1,1}$. Для доказательства инъективности оператора вложения $V_0^{1,1} \subset H_0^{1,1}$ достаточно проверить

УСЛОВИЕ π) [15]. Если $u_n \in L$ и $u_n \rightarrow u$ в $V_0^{1,1}$, $u_n \rightarrow 0$ в $H_0^{1,1}$, то $u = 0$.

В силу сходимости $u_n(t, x)$ в пространстве $H_0^{1,1}$ имеем, что последовательности $(u_n)_t$, $(u_n)_{x_i}$ сходятся к нулю в $L_2(Q)$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|u_n(T, x)|^2 = \left| \int_0^T \frac{\partial u_n}{\partial t}(\tau, x) d\tau \right|^2 \leq T \int_0^T \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(\tau, x) \right)^2 d\tau. \quad (6)$$

Интегрируя по области Ω , получаем оценку, обеспечивающую сходимость к нулю последовательности $u_n(T, x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Из сходимости $u_n(t, x)$ в пространстве $V_0^{1,1}$ следует фундаментальность последовательности $(u_n)_{x_i}(T, x)$ в $L_2(\Omega)$. Пусть $(u_n)_{x_i}(T, x) \rightarrow \phi_i(x) \in L_2(\Omega)$. Интегрируя по частям, имеем

$$(u_n|_{t=T}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)} = -((u_n)_{x_i}|_{t=T}, v)_{L_2(\Omega)}$$

для всех $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ (гладких в $\bar{\Omega}$ функций, зануляющихся на $\partial\Omega$). Переходя к пределу в последнем равенстве при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $(\phi_i, v)_{L_2(\Omega)} = 0$. В силу плотности рассматриваемого множества функций $v(x)$ в $L_2(\Omega)$ заключаем, что $\phi_i = 0$. Откуда $\|u_n\|_{V_0^{1,1}} \rightarrow 0$, т.е. $u = 0$ и оператор вложения $V_0^{1,1} \subset H_0^{1,1}$ инъективный.

Для доказательства вложений $H_0^{2,1} \subset W_0^{1,1} \subset V_0^{1,1}$, $H_0^{1,1} \subset L_2(Q)$ аналогично (6) получим оценку

$$\|u_{x_i}(T, x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{T} \|u_{tx_i}\|_{L_2(Q)} \quad \text{для всех } u \in L.$$

Отсюда легко доказать неравенство $\|u\|_{V_0^{1,1}} \leq c\|u\|_{W_0^{1,1}}$, где $u \in L$, c – здесь и далее некоторая положительная постоянная, не зависящая от функции $u(t, x)$. Аналогично для всех $u \in L$ устанавливается и неравенство $\|u\|_{L_2(Q)} \leq c\|u\|_{H_0^{1,1}}$. Неравенство $\|u\|_{W_0^{1,1}} \leq \|u\|_{H_0^{2,1}}$ очевидно.

Условие π) для $H_0^{2,1} \subset W_0^{1,1} \subset V_0^{1,1}$, $H_0^{1,1} \subset L_2(Q)$ проверяется аналогично предыдущему. Плотность вложений очевидна, поскольку все пространства содержат множество L .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Установленные плотные непрерывные вложения дают возможность рассмотреть отрицательные относительно $L_2(Q)$ нормы [16], [17]. Обозначим через $W_0^{-k,-1}$, $W_T^{-k,-1}$, $H_0^{-k,-1}$, $H_T^{-k,-1}$, $V_0^{-k,-1}$, $V_T^{-k,-1}$ соответствующие сопряженные пространства. На парах позитивных и негативных пространств заданы билинейные формы, полученные расширением по непрерывности скалярного произведения в $L_2(Q)$. Например, билинейную форму на $W_0^{-k,-1} \times W_0^{k,1}$ будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_0^k}$.

2. Обобщенная постановка. Применяя формулу интегрирования по частям и переходя к поверхностным интегралам, несложно убедиться, что для произвольных гладких в $\bar{Q}$ функций $u(t, x)$, $v(t, x)$, удовлетворяющих условию 1) и соответственно условиям (2), (5), имеет место равенство

$$\begin{aligned} & - (u_t, v_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{tx_i}, v_{x_j})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (a_i u_{tx_i}, v)_{L_2(Q)} \\ & + (au_t, v)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} + (bu, v)_{L_2(Q)} \\ & = (f, v)_{L_2(Q)} + (f_1, v|_{t=0})_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $W_0^1(\Omega)$ – пополнение множества гладких в $\bar{\Omega}$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $f|_{x \in \partial\Omega} = 0$, по норме

$$\|f\|_{W_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_{x_i}^2 d\Omega.$$

Предположим, что $f_0 \in W_0^1(\Omega)$, и пусть $u^0 = u - f_0$. Тогда $u^0 \in W_0^{1,1}$ и равенство (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & - (u_t^0, v_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{tx_i}^0, v_{x_j})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (a_i u_{tx_i}^0, v)_{L_2(Q)} + (au_t^0, v)_{L_2(Q)} \\ & + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}u_{x_i}^0, v_{x_j})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i}^0, v)_{L_2(Q)} + (bu^0, v)_{L_2(Q)} \\ & = (f, v)_{L_2(Q)} + (f_1, v|_{t=0})_{L_2(\Omega)} - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(f_0)_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(Q)} \\ & - \sum_{i=1}^n (b_i(f_0)_{x_i}, v)_{L_2(Q)} - (bf_0, v)_{L_2(Q)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем считать, что коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , b_i , a , b непрерывны, а a_i – непрерывно дифференцируемые в $\bar{\Omega}$ функции. Пусть c^* – положительная постоянная, мажорирующая в области $\bar{\Omega}$ все коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , a_i , b_i , a , b и первые производные функций a_i .

Левая часть (8) имеет смысл для произвольных $u^0 \in W_0^{1,1}$, $v \in H_T^{1,1}$. Это позволяет рассматривать левую часть равенства (8) как определение оператора $\overline{\mathcal{L}}: W_0^{1,1} \rightarrow H_T^{-1,-1}$, определенного для всех функций $u^0 \in W_0^{1,1}$. Несложно убедиться, что $\overline{\mathcal{L}}$ – линейный оператор. Та же левая часть (8) определяет сопряженный линейный оператор $\overline{\mathcal{L}}^*: H_T^{1,1} \rightarrow W_0^{-1,-1}$.

Если скалярное произведение $(f, v)_{L_2(Q)}$ понимать как билинейную форму $\langle f, v \rangle_{H_T^1}$, то правая часть (8) имеет смысл для произвольных функций $f \in H_T^{-1,-1}$, $f_0 \in W_0^1(\Omega)$, $f_1 \in L_2(\Omega)$ и задает линейный непрерывный функционал $F \in H_T^{-1,-1}$. Поэтому можно говорить об уравнении $\overline{\mathcal{L}}u = F$. Отметим, что оператор $\overline{\mathcal{L}}$ определен на функциях u , удовлетворяющих нулевым начальным условиям, а f_0 , f_1 вошли в правую часть уравнения. Поэтому всюду далее будем считать, что $f_0 = f_1 = 0$, так как, изменив аналогично (8) правую часть, уравнение с ненулевыми начальными условиями можно легко свести к задаче с однородными условиями.

3. Априорные неравенства. Установим для псевдогиперболического оператора $\overline{\mathcal{L}}$ оценки в негативных нормах [10], [12], [14], [18].

ТЕОРЕМА 1. Для произвольной функции $u \in W_0^{1,1}$ имеют место неравенства

$$\|u\|_{V_0^{1,1}} \leq c_1 \|\overline{\mathcal{L}}u\|_{V_T^{-1,-1}} \leq c_2 \|\overline{\mathcal{L}}u\|_{H_T^{-1,-1}} \leq c_3 \|u\|_{W_0^{1,1}}, \quad (9)$$

где c_i – положительные постоянные, не зависящие от $u(t, x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если к (8) применить неравенство Коши–Буняковского в интегральной форме и неравенство Фридрихса, то получим доказательство правого из неравенств (9). Средняя часть следует из леммы 1.

Для доказательства левой части (9) рассмотрим значение функционала $\overline{\mathcal{L}}u \in H_T^{-1,-1} \subset V_T^{-1,-1}$ на элементе v_t , где $v(t, x)$ – решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$e^{Mt}(v - v_t + \beta v_{tt}) = -u_t(t, x), \quad v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0. \quad (10)$$

Значения положительных постоянных $M > 1 > \beta$ укажем позже. Отметим, что легко установить принадлежность функции v_t пространству $V_T^{1,1}$.

Преобразуем и оценим $\langle \overline{\mathcal{L}}u, v_t \rangle_{H_T^1} = \langle \overline{\mathcal{L}}u, v_t \rangle_{V_T^1}$. Для этого подставим u_t (из равенства (10)) в определение оператора $\overline{\mathcal{L}}$ (равенство (8)) и рассмотрим каждое из слагаемых отдельно.

Рассмотрим $-(u_t, v_{tt})_{L_2(Q)} = J_1 + J_2 + J_3$. Применяя формулу

$$avv_t = \frac{1}{2}(av^2)_t - \frac{1}{2}a_tv^2,$$

формулу интегрирования по частям, переходя к поверхностным интегралам и учитывая условия $v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0$, получаем

$$J_1 = \int_Q e^{Mt}vv_{tt} dQ = \int_Q (e^{Mt}vv_t)_t dQ - \int_Q Me^{Mt}vv_t dQ - \int_Q e^{Mt}v_t^2 dQ$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega} v v_t|_{t=0} d\Omega - \frac{M}{2} \int_Q (e^{Mt} v^2)_t dQ + \frac{M^2}{2} \int_Q e^{Mt} v^2 dQ - \int_Q e^{Mt} v_t^2 dQ \\
&\geq - \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 + v_t^2|_{t=0} d\Omega + \frac{M}{2} \int_{\Omega} v^2|_{t=0} d\Omega + \frac{M^2}{2} \int_Q e^{Mt} v^2 dQ - \int_Q e^{Mt} v_t^2 dQ.
\end{aligned}$$

Аналогично рассмотрим второе и третье слагаемые:

$$\begin{aligned}
J_2 &= - \int_Q e^{Mt} v_t v_{tt} dQ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} v_t^2|_{t=0} d\Omega + \frac{M}{2} \int_Q e^{Mt} v_t^2 dQ, \\
J_3 &= \beta \int_Q e^{Mt} v_{tt}^2 dQ.
\end{aligned}$$

Рассмотрим $(au_t, v_t)_{L_2(Q)} = J_4 + J_5 + J_6$. Применяя неравенство Коши для двух чисел $ab \geq -(a^2 + b^2)/2$, получим

$$J_4 + J_5 = - \int_Q a e^{Mt} (v - v_t) v_t dQ \geq - \frac{c^*}{2} \int_Q e^{Mt} (v^2 + 3v_t^2) dQ.$$

Для оценки следующего слагаемого применим неравенство $ab \geq -\varepsilon a^2/4 - b^2/\varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Имеем

$$J_6 = - \int_Q a e^{Mt} \beta v_{tt} v_t dQ \geq -\beta c^* \int_Q e^{Mt} \left(\frac{v_{tt}^2}{40c^*} + 10c^* v_t^2 \right) dQ.$$

Рассмотрим $(bu, v_t)_{L_2(Q)}$. Принимая во внимание условия $u|_{t=0} = v|_{t=T} = 0$ и используя формулу интегрирования по частям, получаем $(bu, v_t)_{L_2(Q)} = -(bu_t, v)_{L_2(Q)}$. Далее имеем

$$\begin{aligned}
J_7 + J_8 &= \int_Q b e^{Mt} (v - v_t) v dQ \geq - \frac{c^*}{2} \int_Q e^{Mt} (3v^2 + v_t^2) dQ, \\
J_9 &= \int_Q b e^{Mt} \beta v_{tt} v dQ \geq -\beta c^* \int_Q e^{Mt} \left(\frac{v_{tt}^2}{40c^*} + 10c^* v^2 \right) dQ.
\end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению слагаемого $\sum (a_{ij} u_{tx_i}, v_{tx_j})_{L_2(Q)}$. Принимая во внимание симметричность матрицы $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, применим равенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i (v_j)_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} v_i v_j)_t - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_t v_i v_j$$

и условие (3) равномерной эллиптичности оператора A . Получаем

$$\begin{aligned}
J_{10} &= - \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} v_{x_i} v_{tx_j} dQ \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j}|_{t=0} d\Omega + \frac{M}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} v_{x_i} v_{x_j} dQ
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i}^2|_{t=0} d\Omega + \frac{\alpha M}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2 dQ.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} J_{11} + J_{12} &= - \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} (-v_{tx_i} + \beta v_{ttx_i}) v_{tx_j} dQ \\ &\geq \frac{\alpha\beta}{4} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{tx_i}^2|_{t=0} d\Omega + \frac{\alpha\beta M}{4} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{tx_i}^2 dQ \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} \beta v_{ttx_i} v_{tx_j} dQ. \end{aligned}$$

Учитывая равенство $\beta v_{tt} = v_t - v - e^{-Mt} u_t$, преобразуем последнее слагаемое:

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} \beta v_{ttx_i} v_{tx_j} dQ \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} (v_{tx_i} - v_{x_i} - e^{-Mt} u_{tx_i}) v_{tx_j} dQ \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{Mt} (v_{tx_i} - v_{x_i}) v_{tx_j} dQ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} u_{tx_i} v_{tx_j} dQ. \end{aligned}$$

Оценим снизу первую сумму и проинтегрируем по частям вторую:

$$\begin{aligned} J &\geq -\frac{nc^*}{4} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} (v_{x_i}^2 + 3v_{tx_i}^2) dQ - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} u_{x_i} v_{ttx_j} dQ \\ &= -\frac{nc^*}{4} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} (v_{x_i}^2 + 3v_{tx_i}^2) dQ - \frac{1}{2\beta} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} u_{x_i} (v_{tx_j} - v_{x_j}) dQ \\ &\quad + \frac{1}{2\beta} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} u_{x_i} e^{-Mt} u_{tx_j} dQ. \end{aligned}$$

Два последних слагаемых оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\beta} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} u_{x_i} (v_{tx_j} - v_{x_j}) dQ &\geq \frac{-c^*}{2\beta} \sum_{i,j=1}^n \int_Q |u_{x_i}| (|v_{tx_j}| + |v_{x_j}|) dQ \\ &\geq \frac{-nc^*}{4\beta} \sum_{i=1}^n \int_Q 2e^{-Mt} u_{x_i}^2 + e^{Mt} v_{tx_i}^2 + e^{Mt} v_{x_i}^2 dQ, \\ \frac{1}{2\beta} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} u_{x_i} e^{-Mt} u_{tx_j} dQ &= \frac{1}{4\beta} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} e^{-MT} u_{x_i} u_{x_j}|_{t=T} d\Omega + \frac{M}{4\beta} \sum_{i,j=1}^n \int_Q a_{ij} e^{-Mt} u_{x_i} u_{x_j} dQ \\ &\geq \frac{\alpha e^{-MT}}{4\beta} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2|_{t=T} d\Omega + \frac{\alpha M}{4\beta} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{-Mt} u_{x_i}^2 dQ. \end{aligned}$$

Возвращаясь к $J_{11} + J_{12}$, заключаем, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} J_{11} + J_{12} &\geq \frac{\alpha\beta}{4} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{tx_i}^2|_{t=0} d\Omega + \frac{\alpha e^{-MT}}{4\beta} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2|_{t=T} d\Omega \\ &\quad + \left(\frac{\alpha M}{4\beta} - \frac{nc^*}{2\beta} \right) \sum_{i=1}^n \int_Q e^{-Mt} u_{x_i}^2 dQ \\ &\quad + \left(\frac{\alpha\beta M}{4} - \frac{3nc^*}{4} - \frac{nc^*}{4\beta} \right) \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{tx_i}^2 dQ \\ &\quad - \left(\frac{nc^*}{4\beta} + \frac{nc^*}{4} \right) \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{x_i}^2 dQ. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемое $\sum (b_{ij}u_{x_i}, v_{tx_j})_{L_2(Q)} = -\sum (b_{ij}u_{tx_i}, v_{x_j})_{L_2(Q)}$ и оценим его. Имеем

$$J_{13} + J_{14} = \sum_{i,j=1}^n \int_Q b_{ij} e^{Mt} (v_{x_i} - v_{tx_i}) v_{x_j} dQ \geq -\frac{nc^*}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} (3v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2) dQ.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} J_{15} &= \sum_{i,j=1}^n \int_Q b_{ij} e^{Mt} \beta v_{ttx_i} v_{x_j} dQ \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} b_{ij} \beta v_{tx_i} v_{x_j}|_{t=0} d\Omega - \sum_{i,j=1}^n \int_Q b_{ij} e^{Mt} \beta v_{tx_i} v_{tx_j} dQ \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \int_Q b_{ij} e^{Mt} \beta M v_{tx_i} v_{x_j} dQ \\ &\geq -\beta nc^* \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha v_{tx_i}^2}{40nc^*} + \frac{10nc^* v_{x_i}^2}{\alpha} \right) |_{t=0} d\Omega - \beta nc^* \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{tx_i}^2 dQ \\ &\quad - \beta nc^* M \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \left(\frac{\alpha}{40nc^*} v_{tx_i}^2 + \frac{10nc^*}{\alpha} v_{x_i}^2 \right) dQ. \end{aligned}$$

Опять применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\sum (a_i u_{tx_i}, v_t)_{L_2(Q)} = - \sum (u_t, (a_i v_t)_{x_i})_{L_2(Q)}.$$

Используя равенство $(a_i v_t)_{x_i} = (a_i)_{x_i} v_t + a_i v_{tx_i}$, оценим это слагаемое:

$$\begin{aligned} J_{16} + J_{17} &= \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} (v - v_t) (a_i v_t)_{x_i} dQ \\ &\geq -\frac{c^*}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} (v^2 + 3v_t^2) dQ - \frac{c^*}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} (v^2 + v_t^2 + 2v_{tx_i}^2) dQ \\ &= -nc^* \int_Q e^{Mt} (v^2 + 2v_t^2) dQ - c^* \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} v_{tx_i}^2 dQ. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$J_{18} = \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \beta v_{tt}(a_i v_t)_{x_i} dQ \\ \geq -\beta n c^* \int_Q e^{Mt} \left(\frac{v_{tt}^2}{40 n c^*} + 10 n c^* v_t^2 \right) dQ - \beta c^* \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \left(\frac{v_{tt}^2}{40 n c^*} + 10 n c^* v_{tx_i}^2 \right) dQ.$$

Поскольку $\sum (b_i u_{x_i}, v_t)_{L_2(Q)} = -\sum (b_i u_{tx_i}, v)_{L_2(Q)}$, то аналогично предыдущему получаем

$$J_{19} + J_{20} = \sum_{i=1}^n \int_Q b_i e^{Mt} (v_{x_i} - v_{tx_i}) v dQ \geq -\frac{c^*}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} (v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2 + 2v^2) dQ.$$

Рассмотрим последнее слагаемое:

$$J_{21} = \sum_{i=1}^n \int_Q b_i e^{Mt} \beta v_{tt x_i} v dQ \\ = -\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \beta v_{tx_i} v|_{t=0} d\Omega - \sum_{i=1}^n \int_Q b_i e^{Mt} \beta v_{tx_i} v_t dQ - \sum_{i=1}^n \int_Q b_i M e^{Mt} \beta v_{tx_i} v dQ \\ \geq -\beta c^* \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\alpha}{40 c^*} v_{tx_i}^2 + \frac{10 c^*}{\alpha} v^2 \right) \Big|_{t=0} d\Omega \\ - \beta c^* M \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} \left(\frac{\alpha v_{tx_i}^2}{40 c^*} + \frac{10 c^* v^2}{\alpha} \right) dQ - \frac{\beta c^*}{2} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{Mt} (v_{tx_i}^2 + v_t^2) dQ.$$

Таким образом, доказано, что

$$\langle \overline{\mathcal{L}} u, v \rangle_{V_T^1} = \langle \overline{\mathcal{L}} u, v \rangle_{H_T^1} \\ \geq \int_{\Omega} \left(\frac{M-1}{2} - \frac{10\beta n(c^*)^2}{\alpha} \right) v^2 \Big|_{t=0} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{10\beta n^2(c^*)^2}{\alpha} \right) \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + \frac{\alpha\beta}{5} \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right) \Big|_{t=0} d\Omega \\ + \frac{\alpha e^{-MT}}{4\beta} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2|_{t=T} d\Omega + \left(\frac{\alpha M}{4\beta} - \frac{nc^*}{2\beta} \right) \sum_{i=1}^n \int_Q e^{-Mt} u_{x_i}^2 dQ \\ + \int_Q e^{Mt} \left[\frac{9\beta}{10} v_{tt}^2 + \left(\frac{M^2}{2} - \frac{10\beta n(c^*)^2 M}{\alpha} - 10\beta(c^*)^2 - 2c^*(n+1) \right) v^2 \right. \\ + \left(\frac{M}{2} - 1 - 10\beta(c^*)^2(n^2+1) - 2c^*(n+1) - \frac{\beta n c^*}{2} \right) v_t^2 \\ + \left(\frac{\alpha\beta M}{5} - \frac{c^*(5n+6)}{4} - \frac{nc^*}{4\beta} - 10\beta n(c^*)^2 - \frac{\beta c^*(2n+1)}{2} \right) \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \\ \left. + \left(\frac{\alpha M}{2} - \frac{c^*(7n+2)}{4} - \frac{nc^*}{4\beta} - \frac{10\beta n^2(c^*)^2 M}{\alpha} \right) \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 \right] dQ.$$

Пусть

$$0 < \beta < \frac{\alpha^2}{40n^2(c^*)^2}.$$

Тогда существует такая достаточно большая постоянная $M > 0$, что

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathcal{L}}u, v_t \rangle_{V_T^1} &\geq c^{-1} \int_Q e^{Mt} \left(v_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2 \right) dQ + c^{-1} \sum_{i=1}^n \int_Q e^{-Mt} u_{x_i}^2 dQ \\ &+ c^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{tx_i}^2|_{t=0} d\Omega + c^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2|_{t=T} d\Omega. \end{aligned}$$

В силу неравенства Фридрихса существует положительная постоянная c такая, что

$$\|u_t\|_{L_2(Q)}^2 = \int_Q e^{2Mt} (v - v_t + \beta v_{tt})^2 dQ \leq c \|v_{tt}\|_{L_2(Q)}^2.$$

Таким образом,

$$\langle \overline{\mathcal{L}}u, v_t \rangle_{V_T^1} \geq c_1^{-1} \|v_t\|_{V_T^{1,1}}^2 + c_1^{-1} \|u\|_{V_0^{1,1}}^2.$$

Применяя к левой части неравенство Шварца, а к правой – неравенство Коши, получаем

$$\|\overline{\mathcal{L}}u\|_{V_T^{-1,-1}} \|v_t\|_{V_T^{1,1}} \geq \langle \overline{\mathcal{L}}u, v_t \rangle_{V_T^1} \geq 2c_1^{-1} \|v_t\|_{V_T^{1,1}} \|u\|_{V_0^{1,1}},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценивая слагаемые J_{16} , J_{17} , J_{18} аналогично J_{19} , J_{20} , J_{21} , можно отказаться от требования дифференцируемости коэффициентов $a_i(x)$, однако в этом случае на значение $a_i(x)$ потребуются наложить некоторые дополнительные ограничения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема остается справедливой и в случае, когда коэффициенты уравнения a_{ij} , b_{ij} , a_i , b_i , a , b , а также производные $(a_i)_{x_i}$ принадлежат пространству $L_\infty(\Omega)$.

Интегрируя по частям, левую сторону равенства (8) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} - (u_t, v_t)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i}, v_{tx_j})_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^n (a_i u_{x_i}, v_t)_{L_2(Q)} - (au, v_t)_{L_2(Q)} \\ + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} + (bu, v)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Это выражение задает пару операторов: расширение $\overline{\mathcal{L}}$ по непрерывности до оператора $H_0^{1,1} \rightarrow W_T^{-1,-1}$, а также сопряженный оператор, являющийся сужением $\mathcal{L}^*$ и действующий в пространствах $W_T^{1,1} \rightarrow H_0^{-1,-1}$.

Оценки теоремы 1 дают возможность установить двойственное априорное неравенство для такого сужения оператора $\overline{\mathcal{L}}^*$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех $v \in W_T^{1,1}$ имеют место неравенства

$$\|v\|_{V_T^{1,1}} \leq c_1 \|\overline{\mathcal{L}}^* v\|_{V_0^{-1,-1}} \leq c_2 \|\overline{\mathcal{L}}^* v\|_{H_0^{-1,-1}} \leq c_3 \|v\|_{W_T^{1,1}}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правое неравенство следует из определения оператора и неравенств Коши–Буняковского и Фридрихса. Для доказательства левой части нужно значение оператора $\overline{\mathcal{L}}^* \eta \in V_0^{-1,-1}$ рассмотреть на элементе

$$u = - \int_0^t e^{M\tau} (v - v_t + \beta v_{tt}) d\tau \in V_0^{1,1}, \quad \text{где } v = \int_T^t \eta d\tau,$$

применить интегрирование по частям и повторить рассуждения теоремы 1.

Интегро-дифференциальный оператор (10) позволяет установить и другие априорные неравенства для псевдогиперболического оператора, получающиеся из (9), (11) “сдвигом” на дифференциальный оператор d^k/dt^k . Покажем, как получить соответствующие утверждения.

Интегрируя по частям левую часть равенства (8), можно прийти к следующему выражению:

$$\begin{aligned} (u, v_{tt})_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i}, v_{tx_j})_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^n (a_i u_{x_i}, v_t)_{L_2(Q)} - (au, v_t)_{L_2(Q)} \\ + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} + (bu, v)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Это выражение расширяет оператор $\overline{\mathcal{L}}: W_0^{1,1} \rightarrow H_T^{-1,-1}$ до оператора (сохраним за ним прежнее обозначение $\overline{\mathcal{L}}$), действующего в пространствах $\overline{\mathcal{L}}: W_0^{0,1} \rightarrow H_T^{-2,-1}$. Оператор, сопряженный к такому $\overline{\mathcal{L}}$, действует в $H_T^{2,1} \rightarrow W_0^{0,-1}$ и является сужением оператора $\overline{\mathcal{L}}^*$.

ТЕОРЕМА 2. Для всех $u \in W_0^{0,1}$ имеют место неравенства

$$\|u\|_{V_0^{0,1}} \leq c_1 \|\overline{\mathcal{L}}u\|_{V_T^{-2,-1}} \leq c_2 \|\overline{\mathcal{L}}u\|_{H_T^{-2,-1}} \leq c_3 \|u\|_{W_0^{0,1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правая часть доказывается аналогично теореме 1. Для доказательства левой части можно рассмотреть значение функционала $\overline{\mathcal{L}}u$ на элементе $v(t, x) \in V_T^{2,1}$, где $v(t, x)$ – решение задачи Коши

$$e^{Mt}(v - v_t + \beta v_{tt}) = u, \quad v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0,$$

и повторить оценки теоремы 1.

Аналогично следствию 1 можно доказать двойственные априорные неравенства. А именно,

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех $v \in W_T^{2,1}$ имеют место

$$\|v\|_{V_T^{2,1}} \leq c_1 \|\overline{\mathcal{L}}^* v\|_{V_0^{0,-1}} \leq c_2 \|\overline{\mathcal{L}}^* v\|_{H_0^{0,-1}} \leq c_3 \|v\|_{W_T^{2,1}}.$$

Интегро-дифференциальный оператор (10) позволяет “сдвинуть” неравенства (9) на d/dt и в противоположном направлении. Для этого рассмотрим оператор псевдогиперболического типа, задающийся билинейной формой

$$\begin{aligned} (u_{tt}, v)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} u_{ttx_i}, \int_T^t v_{x_j} d\tau \right)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (a_i u_{tx_i}, v)_{L_2(Q)} + (au_t, v)_{L_2(Q)} \\ - \sum_{i,j=1}^n \left(b_{ij} u_{tx_i}, \int_T^t v_{x_j} d\tau \right)_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} + (bu, v)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Это выражение задает сужение оператора $\overline{\mathcal{L}}$ в пространства $W_0^{2,1} \rightarrow H_T^{0,-1}$, а также расширение $\overline{\mathcal{L}}^*$ до $H_T^{0,1} \rightarrow W_0^{-2,-1}$.

ТЕОРЕМА 3. *Для всех $u \in W_0^{2,1}$, $v \in W_T^{0,1}$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} \|u\|_{V_0^{2,1}} &\leq c_1 \|\overline{\mathcal{L}}u\|_{V_T^{0,-1}} \leq c_2 \|\overline{\mathcal{L}}u\|_{H_T^{0,-1}} \leq c_3 \|u\|_{W_0^{2,1}}, \\ \|v\|_{V_T^{0,1}} &\leq c_1 \|\overline{\mathcal{L}}^*v\|_{V_0^{-2,-1}} \leq c_2 \|\overline{\mathcal{L}}^*v\|_{H_0^{-2,-1}} \leq c_3 \|v\|_{W_T^{0,1}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существенным является доказательство левых частей неравенств. В первом случае необходимо рассмотреть значение функционала $\overline{\mathcal{L}}u \in H_T^{0,-1}$ на элементе $v_{tt} \in V_T^{0,1}$, где $v(t, x)$ – решение задачи Коши

$$e^{Mt}(v - v_t + \beta v_{tt}) = u_{tt}, \quad v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0,$$

и повторить оценки теоремы 1. Двойственное неравенство устанавливается аналогично следствию 1.

Если пространства $W^{k,1}$, $H^{k,1}$, $V^{k,1}$ естественным образом определить для целых отрицательных k (трактуя производную отрицательного порядка как соответствующий интеграл) и рассмотреть соответствующее расширение операторов $\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{L}}^*$, то на языке обобщенных функций аналогично предыдущему можно доказать общую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Для всех $u \in W_0^{k,1}$, $v \in W_T^{k,1}$, $k \in \mathbb{Z}$, имеют место неравенства*

$$\|u\|_{V_0^{k,1}} \leq c_1 \|\overline{\mathcal{L}}u\|_{V_T^{k-2,-1}} \leq c_2 \|\overline{\mathcal{L}}u\|_{H_T^{k-2,-1}} \leq c_3 \|u\|_{W_0^{k,1}}, \quad (12)$$

$$\|v\|_{V_T^{k,1}} \leq c_1 \|\overline{\mathcal{L}}^*v\|_{V_0^{k-2,-1}} \leq c_2 \|\overline{\mathcal{L}}^*v\|_{H_0^{k-2,-1}} \leq c_3 \|v\|_{W_T^{k,1}}. \quad (13)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Операторы $\overline{\mathcal{L}}: W_0^{k,1} \rightarrow V_T^{k-2,-1}$, $\overline{\mathcal{L}}^*: W_T^{k,1} \rightarrow V_0^{k-2,-1}$ инъективные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо учесть неравенства (12), (13) и наличие вложений $W_0^{k,1} \subset V_0^{k,1}$, $W_T^{k,1} \subset V_T^{k,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Наличие “шкалы” априорных оценок для оператора $\overline{\mathcal{L}}$ позволяет устанавливать неравенства для сопряженного оператора просто из соображений двойственности, что существенно проще, чем подход реализованный в [6], [8], [10], [14].

4. Теорема о единственной разрешимости псевдогиперболического уравнения.

ТЕОРЕМА 5. *Для произвольного $F \in V_T^{-k,-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, существует единственное решение $u \in V_0^{2-k,1}$ уравнения $\overline{\mathcal{L}}u = F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (13) для любого $v \in W_T^{k,1}$ имеют место неравенства

$$\langle F, v \rangle_{W_T^k} = \langle F, v \rangle_{V_T^k} \leq \|F\|_{V_T^{-k,-1}} \|v\|_{V_T^{k,1}} \leq c_1 \|F\|_{V_T^{-k,-1}} \|\overline{\mathcal{L}}^*v\|_{V_0^{k-2,-1}}.$$

Поскольку оператор $\overline{\mathcal{L}}^*: W_T^{k,1} \rightarrow V_0^{k-2,-1}$ линейный и инъективный (следствие 3), то $\langle F, v \rangle_{V_T^k}$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал от $\overline{\mathcal{L}}^*v$

в пространстве $V_0^{k-2,-1}$, определенный на $\overline{\mathcal{L}}^*(W_T^{k,1})$. По теореме Хана–Банаха этот функционал допускает расширение по непрерывности на все пространство $V_0^{k-2,-1}$, а по теореме о представлении линейного непрерывного функционала в негативном гильбертовом пространстве существует такой элемент $u \in V_0^{2-k,1}$, что

$$\langle F, v \rangle_{W_T^k} = \langle F, v \rangle_{V_T^k} = \langle u, \overline{\mathcal{L}}^* v \rangle_{V_0^{2-k}} \quad \forall v \in W_T^{k,1}.$$

Так как $\overline{\mathcal{L}}^* v \in H_0^{k-2,-1}$ для всех $v \in W_T^{k,1}$, то

$$\langle F, v \rangle_{W_T^k} = \langle F, v \rangle_{V_T^k} = \langle u, \overline{\mathcal{L}}^* v \rangle_{V_0^{2-k}} = \langle u, \overline{\mathcal{L}}^* v \rangle_{H_0^{2-k}} = \langle \overline{\mathcal{L}} u, v \rangle_{W_T^k},$$

где $\overline{\mathcal{L}}: H_0^{2-k,1} \rightarrow W_T^{-k,-1}$.

В силу произвольности $v \in W_T^{k,1}$ имеет место равенство $\overline{\mathcal{L}} u = F$. Единственность решения этого уравнения следует из инъективности оператора $\overline{\mathcal{L}}: W_0^{1-k,1} \rightarrow H_T^{-k-1,-1}$ (следствие 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Доказательство теоремы идейно близко к доказательству известных результатов о связи между разрешимостью прямого и сопряженного уравнений [19].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим, что задача повышения гладкости решения уравнения $\overline{\mathcal{L}} u = F$ в момент времени $t = T$ (сравните нормы $V_0^{k,1}$ и $H_0^{k,1}$) имеет важное значение в задачах оптимизации систем, например, при исследовании проблем управляемости [12], [20].

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Может показаться странным, что в случае $F \in V_T^{-k,-1}$, $k < 0$, решение $u(t, x)$ автоматически попадает в пространство $V_0^{2-k,1}$, т.е. удовлетворяет условиям

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dots = \frac{\partial^{1-k} u}{\partial t^{1-k}} \Big|_{t=0} = 0.$$

Это объясняется тем, что функция $F \in V_T^{-k,-1}$ также обязана зануляться в точке $t = 0$ до $-k - 1$ порядка включительно. В этом смысле при $k < 0$ приведенная теорема хуже классических результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. С. Войт, “Распространение начальных уплотнений в вязком газе”, *Ученые записки МГУ. Мех.*, **172:5** (1954), 125–142.
- [2] И. И. Сувейка, “Смешанные задачи для уравнения распространения возмущений в вязких средах”, *Дифференц. уравнения*, **19:2** (1983), 337–347.
- [3] А. Н. Гузь, *Динамика сжимаемой вязкой жидкости*, А.С.К., Киев, 1998.
- [4] В. М. Булавацкий, И. И. Юрик, “Математическое моделирование процесса теплопереноса в релаксирующей среде”, *Доповіді НАН України*, 1996, № 7, 42–45.
- [5] С. М. Пономарев, “К вопросу о поведении вязкой сжимаемой жидкости под действием заданного граничного режима”, *Дифференц. уравнения*, **22:4** (1986), 719–722.
- [6] А. И. Кожанов, “Задача с косою производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений”, *Сиб. матем. ж.*, **37:6** (1996), 1335–1346.
- [7] В. А. Маловичко, “О краевых задачах для вырождающихся псевдопараболических и псевдогиперболических систем”, *Дифференц. уравнения*, **27:12** (1991), 2120–2124.

- [8] Л. И. Палієнко, *Моделювання та узагальнена оптимізація у псевдогіперболічних системах*, Дисс. . . . к.ф.-м.н., КНУ, Киев, 1999.
- [9] И. И. Ляшко, С. И. Ляшко, Д. А. Ключин, А. Ю. Спивак, “Численное решение псевдогиперболических уравнений”, *Доповіді НАН України*, 1998, № 5, 29–34.
- [10] С. И. Ляшко, *Обобщенное управление линейными системами*, Наукова думка, Киев, 1998.
- [11] Д. А. Номировский, “Управление в псевдогиперболических системах”, *Вычисл. и прикл. матем.*, 1996, № 80, 68–77.
- [12] И. И. Ляшко, С. И. Ляшко, Д. А. Номировский, “Управляемость гиперболических и псевдогиперболических систем в классе сингулярных воздействий”, *Доповіді НАН України*, 2000, № 11, 131–134.
- [13] С. И. Ляшко, В. В. Семенов, “Об управляемости линейных распределенных систем в классах обобщенных воздействий”, *Кибернетика и системный анализ*, 2001, № 1, 18–41.
- [14] S. I. Lyashko, *Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters*, Kluwer, Boston, 2002.
- [15] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [16] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [17] *Функциональный анализ*, СМБ, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.
- [18] И. И. Ляшко, В. П. Диденко, О. Е. Цитрицкий, *Фильтрация шумов*, Наукова думка, Киев, 1979.
- [19] С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1971.
- [20] С. И. Ляшко, Д. А. Номировский, “Обобщенное решение и оптимальное управление в системах, описывающих динамику вязкой стратифицированной жидкости”, *Дифференц. уравнения*, **39:1** (2003), 84–91.

Д. А. Номировский

Киевский национальный университет им. Т. Шевченко

E-mail: kashpir@mail.ru

Поступило

18.02.2004

Исправленный вариант

13.12.2005