Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, А. Е. Троицкая, Тензорный корень из изоморфизма и слабые пределы преобразований, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 596–600

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 05:22:37

УДК 517.9

ТЕНЗОРНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ИЗОМОРФИЗМА И СЛАБЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В. В. Рыжиков, А. Е. Троицкая

Доказано, что преобразования S и T изоморфны, если изоморфны их декартовы квадраты, при условии, что для преобразования T некоторая последовательность степеней слабо сходится к полиному.

Библиография: 7 названий.

Пусть S и T – сохраняющие меру обратимые преобразования вероятностного пространства Лебега (X, μ) (как говорят, *автоморфизмы* пространства (X, μ)). Их декартовы квадраты $S \times S$ и $T \times T$ метрически изоморфны, если выполнено

$$J(S \times S)J^{-1} = T \times T,$$

где J – автоморфизм пространства $(X \times X, \mu \times \mu)$. Сюжет заметки связан с вопросом: *изоморфны ли преобразования S и T , если изоморфны их декартовы степени*? Вопрос поставлен Ж.-П. Туveno (J.-P. Thouvenot). Контрпримеры неизвестны. Сложность задачи объясняется трудностью описания факторов декартовых степеней автоморфизмов. В заметке рассмотрен случай, когда полугруппа слабых пределов степеней автоморфизма содержит полином. Это свойство нашло приложения в теории самоприсоединений и в спектральной теории (см., например, [1]–[4]). Ряд задач эргодической теории был решен методом категорий, когда доказывалась типичность изучаемого свойства динамической системы. Недавно возрос интерес к типичным свойствам, и этот интерес объясняется обнаружением, можно сказать, необычных типичных явлений в эргодической теории (см. недавнюю работу [5] и ссылки на статьи других авторов). Настоящая заметка косвенно примыкает к этой тематике, так как в ней рассматривается такое типичное свойство автоморфизма T как наличие полинома $\mathcal{P}(T)$ в полугруппе слабых пределов его степеней.

Будем обозначать теми же символами, что и автоморфизмы, унитарные операторы, им отвечающие. *Полиномом* называется ряд вида

$$\mathcal{P}(T) = a\Theta + \sum_i a_i T^i,$$

где $i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geq 0$, $a + \sum_i a_i = 1$, Θ – ортопроекция в $L_2(X, \mu)$ на пространство констант.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке программы "Ведущие научные школы", грант № НШ-457.2003.1.

СОГЛАШЕНИЕ. Ниже обозначение $\mathcal{P}(T)$ используется для полиномов, которые содержат хотя бы два ненулевых члена (не являются мономами).

ТЕОРЕМА. Пусть для слабо перемешивающего автоморфизма T и некоторой последовательности $n_k \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость $T^{n_k} \rightarrow \mathcal{P}(T)$. Если степени $S \times \cdots \times S$ (d сомножителей) и $T \times \cdots \times T$ (d сомножителей) изоморфны, то автоморфизмы S и T изоморфны.

Частный случай этой теоремы, когда $\mathcal{P}(T) = aI + (1-a)T$, был получен А. Е. Троицкой в курсовой работе 2004 г. Другой частный случай $\mathcal{P}(T) = a\Theta + (1-a)I$ рассмотрен в [6].

Предварительно докажем две леммы.

ЛЕММА 1. Если выполнены условия теоремы, то $S^{n_k} \rightarrow \mathcal{P}(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (при $d = 2$) имеет место равенство

$$J^{-1}(S \otimes S)J = (T \otimes T).$$

Получим

$$J^{-1}(S \otimes S)^{n_k}J = (T \otimes T)^{n_k} \rightarrow \mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{P}(T).$$

Считаем, что выполнено условие

$$S^{n_k} \rightarrow Q$$

для некоторого оператора Q (это обеспечивается выбором подпоследовательности из n_k – ее и рассмотрим). Переходя к слабому пределу, получим

$$Q \otimes Q = J\mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{P}(T)J^{-1}.$$

Обозначим $A \geq B$ (A, B – операторы), если для любой измеримой ограниченной неотрицательной функции f выполнено $Af \geq Bf$. Так как

$$\mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{P}(T) \geq a_i^2(T \otimes T)^i,$$

то выполнено

$$Q \otimes Q \geq a_i^2 J(T \otimes T)^i J^{-1} \geq a_i^2 (S \otimes S)^i,$$

следовательно, для всех i имеет место неравенство

$$Q \geq a_i S^i.$$

Так как выполнено

$$\mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{P}(T) \geq a^2 \Theta \otimes \Theta,$$

получим

$$Q \otimes Q \geq a^2 \Theta \otimes \Theta, \quad Q \geq a\Theta.$$

Таким образом, $Q \geq \mathcal{P}(S)$, что в силу равенства $Q\mathbf{1} = \mathcal{P}(S)\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ – функция, тождественно равная 1) приводит к равенству $Q = \mathcal{P}(S)$. Случай $d > 2$ рассматривается аналогично.

ЛЕММА 2. Пусть $\{P_v\}$ и $\{R_w\}$ – наборы автоморфизмов, коммутирующих с эргодическим автоморфизмом U . Если

$$\sum_v a_v P_v = \sum_w b_w R_w,$$

все P_v различны и все R_w различны, а веса a_v, b_w положительны, то для некоторой σ (перестановки индексов) выполнено

$$P_v = R_{\sigma(v)}, \quad a_v = b_{\sigma(v)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На графике автоморфизма P_v сосредоточена мера $\nu_v, \nu_v(Y) = \mu(\{x : (x, P_v x) \in Y\})$. Определим аналогично меру η_w , отвечающую автоморфизму R_w . Из равенства

$$\sum_v a_v P_v = \sum_w b_w R_w$$

вытекает равенство

$$\sum_v a_v \nu_v = \sum_w b_w \eta_w.$$

Меры ν_v, η_w инвариантны и, более того, эргодичны относительно $U \otimes U$. Различным индексам v отвечают различные меры (аналогично для индексов w) – это следствие того, что два автоморфизма P, P' , коммутирующих с эргодическим действием и совпадающих на множестве положительной меры, совпадают почти всюду. Действительно, равенство $Px = P'x$ влечет за собой $U^n Px = U^n P'x$, $PU^n x = P'U^n x$, т.е. P, P' совпадают на U -инвариантном множестве.

Каждая из сумм в равенстве

$$\sum_v a_v \nu_v = \sum_w b_w \eta_w$$

есть разложение на эргодические компоненты инвариантной меры. Из единственности такого разложения вытекает $\nu_v = \eta_{\sigma(v)}$, что равносильно утверждению леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Случай $d = 2$. Наша цель – показать, что изоморфизм J переводит координатную алгебру в координатную. Тем самым, будет установлен изоморфизм между S и T . Для этого в нашем случае достаточно установить, что образ пространства $\mathbf{1} \otimes L_2(X, \mu)$ под действием J совпадает с пространством $\mathbf{1} \otimes L_2(X, \mu)$ или $L_2(X, \mu) \otimes \mathbf{1}$.

Имеем

$$J(T \otimes T)^{n_k} J^{-1} = (S \otimes S)^{n_k}.$$

Переходя к слабому пределу, получим

$$J(\mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{P}(T))J^{-1} = \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{P}(S).$$

Перепишем равенство в следующем виде:

$$\sum_{i,j} a_i a_j J(T^i \otimes T^j)J^{-1} + V = \sum_{i',j'} a_{i'} a_{j'} S^{i'} \otimes S^{j'} + V',$$

где оператор V является линейной комбинацией марковских операторов вида $J(T^i \otimes \Theta)J^{-1}$ и $J(\Theta \otimes T^j)J^{-1}$, а оператор V' – линейной комбинацией марковских операторов вида $S^{i'} \otimes \Theta$ и $\Theta \otimes S^{j'}$. Марковскому оператору $V: L_2 \otimes L_2 \rightarrow L_2 \otimes L_2$ отвечает

мера ν на пространстве $(X \times X) \times (X \times X)$ (полиморфизм в терминологии Вершика [7]). Оператору V' отвечает мера ν' . Мера Δ_R , сосредоточенная на графике автоморфизма R пространства $(X \times X, \mu \times \mu)$, взаимно сингулярна с мерой ν (и мерой ν'). Действительно, при разложении меры ν в систему координатных условных мер получим, что эти условные меры непрерывны, в то время как условные меры для Δ_R суть одноточечные меры. Таким образом, получим, что $\nu = \nu'$, следовательно, $V = V'$, поэтому

$$\sum_{i,j} a_i a_j J(T^i \otimes T^j) J^{-1} = \sum_{i',j'} a_{i'} a_{j'} S^{i'} \otimes S^{j'}.$$

Пусть найдется пара i, j такая, что $i \neq j$, $a_i > 0$, $a_j > 0$. Применяя лемму 2, получим

$$J(T^i \otimes T^j) J^{-1} = S^{i'} \otimes S^{j'}, \quad J(I \otimes T^{j-i}) J^{-1} = S^{i'-i} \otimes S^{j'-i}.$$

Пространство $L_2 \otimes \mathbf{1}$ является неподвижным для оператора $I \otimes T^{j-i}$, поэтому пространство $J(L_2 \otimes \mathbf{1})$ – неподвижное для оператора $S^{i'-i} \otimes S^{j'-i}$. Очевидно, что роль $J(L_2 \otimes \mathbf{1})$ могут играть только пространство $L_2 \otimes \mathbf{1}$ (когда $i' = i$) или пространство $\mathbf{1} \otimes L_2$ (когда $j' = i$), причем одна из возможностей выполняется обязательно. Таким образом, изоморфизм J отображает пространство $L_2 \otimes \mathbf{1}$ в себя или в $\mathbf{1} \otimes L_2$. Но это означает, что координатный T -фактор изоморфно отображается в координатный S -фактор, т.е. T и S изоморфны.

Если нужной пары i, j нет, то в ряде $\mathcal{P}(T)$ только для одного индекса i выполнено $a_i > 0$ (кроме того, $a > 0$). Если вместо последовательности n_k рассмотреть $n_k - i$, получим

$$T^{n_k-i} \rightarrow a\Theta T^{-i} + a_0 I = a\Theta + a_0 I.$$

Мы оказались в ситуации, которая была рассмотрена в работе [6].

Отличие случая $d > 2$ от случая $d = 2$ состоит в следующем. Рассматривая уравнение

$$J(T^i \otimes T^j \otimes \dots \otimes T^k) J^{-1} = S^{i'} \otimes S^{j'} \otimes \dots \otimes S^{k'},$$

которое мы получаем при условии $i \neq j, \dots, k$, и преобразуя его к виду

$$J(I \otimes T^{j-i} \otimes \dots \otimes T^{k-i}) J^{-1} = S^{i'-i} \otimes S^{j'-i} \otimes \dots \otimes S^{k'-i},$$

сталкиваемся с ситуацией, когда несколько чисел в наборе $i' - i, j' - i, \dots, k' - i$ равны 0. Пусть для определенности $i' - i = 0$ и $j' - i = 0$, а другие разности отличны от нуля.

Пространство $L_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}$ состоит из неподвижных точек оператора $I \otimes T^{j-i} \otimes \dots \otimes T^{k-i}$. Пространство $L_2 \otimes L_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}$ состоит из неподвижных точек оператора $S^{i'-i} \otimes S^{j'-i} \otimes \dots \otimes S^{k'-i}$. Поэтому

$$J(L_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}) = L_2 \otimes L_2 \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1},$$

следовательно, автоморфизм T изоморфен $S \times S$. Эта и подобные ей ситуации невозможны в силу леммы, которая завершает доказательство теоремы.

ЛЕММА 3. Если $T^{n_k} \rightarrow \mathcal{P}(T)$, то автоморфизм не может быть декартовой степенью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = S \otimes \cdots \otimes S$ ($m > 1$ сомножителей). Так как $T^{n_k} \rightarrow \mathcal{P}(T)$ влечет за собой $S^{n_k} \rightarrow \mathcal{P}(S)$, получим

$$\mathcal{P}(S \otimes \cdots \otimes S) = \mathcal{P}(S) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(S). \quad (*)$$

Левая и правая части равенства – выпуклые суммы различных операторов, коммутирующих с $S \otimes \cdots \otimes S$. Слева вес при операторе $\Theta \otimes \cdots \otimes \Theta$ равен a , справа – a^m . Поэтому $a = 1$ или $a = 0$. Если $a = 0$, замечаем, что $a_i = a_i^m$ (вес оператора $S^i \otimes \cdots \otimes S^i$ в левой сумме равен его весу в правой сумме). Таким образом, равенство $(*)$ возможно только в том случае, когда $\mathcal{P}$ является мономом, что запрещено соглашением.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Аносов, *О спектральных кратностях в эргодической теории*, Современные проблемы математики, **3**, МИАН, М., 2003.
- [2] А. М. Степин, “Спектральные свойства типичных динамических систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 801–834.
- [3] G. R. Goodson, “A survey of recent results in the spectral theory of ergodic dynamical systems”, *J. Dynamical Control Systems*, **5**:2 (1999), 173–226.
- [4] A. A. Prikhod’ko, V. V. Ryzhikov, “Disjointness of convolutions for Chacon’s automorphism”, *Colloq. Math.*, **84/85** (2000), 67–74.
- [5] А. М. Степин, А. М. Еременко, “Неединственность включения в поток и обширность централизатора для типичного сохраняющего меру преобразования”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 95–108.
- [6] В. В. Рыжиков, “Типичность изоморфизма преобразований при изоморфизме их декартовых степеней”, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 630–632.
- [7] А. М. Вершик, “Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские процессы”, *Записки научных семинаров ЛОМИ*, **72** (1977), 26–62.

В. В. Рыжиков, А. Е. Троицкая
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: vryz@mech.math.msu.su

Поступило
 20.05.2005