Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Салахудинов, Оценка L^p -норм функции напряжения плоских конечносвязных областей, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 601–612

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 10:11:42

ОЦЕНКА L^p -НОРМ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ ПЛОСКИХ КОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Р. Г. Салахудинов

Пусть $u(x, G)$ – классическая функция напряжения плоской конечносвязной области G . В работе изучаются изопериметрические свойства L^p -норм функции $u(x, G)$. Получено обобщение неравенства Л. Е. Пейна для односвязных областей на случай конечносвязных; доказано строгое убывание L^p -норм функций $u(x, G)$ и $u^{-1}(x, G)$ по параметру p и получена точная оценка скорости убывания L^p -норм функций через соответствующие L^p -нормы функции напряжения для кольца; доказано новое интегральное неравенство для L^p -норм функции $u(x, G)$, являющиеся аналогом неравенства Ф. Г. Авхадиева и автора для L^p -нормы конформных радиусов.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть G – $(n + 1)$ -связная область на плоскости, причем внутренние компоненты границы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ограничивают области ненулевой площади. Через Γ_0 обозначим внешнюю компоненту ∂G . *Функцией напряжения* $u(x, G)$ области G называют решение следующей краевой задачи:

$$\Delta u = -1 \quad \text{в } G, \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad u = c_i \quad \text{на } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где константы c_i определяются из условий

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds = a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь a_i – площадь области, ограниченной кривой Γ_i , $x \in G$.

Функция напряжения и различные функционалы области, построенные при помощи функции напряжения, – классические объекты математической физики. Наиболее важными физическими функционалами являются *жесткость кручения*

$$P(G) := 4 \iint_G u(x, G) dA + 4 \sum_{i=1}^n c_i a_i$$

и максимум функции напряжения

$$u(G) := \sup_{x \in G} u(x, G).$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00168.

Изучению их свойств и оценкам через другие функционалы области посвящено большое число публикаций (см., например, монографии [1], [2] и обзор [3]).

В случае, когда G – односвязная область, наиболее известным и важным изопериметрическим неравенством является неравенство Сен-Венана–Полиа

$$P(G) \leq \frac{A^2(G)}{2\pi}, \quad (1)$$

где $A(G)$ – площадь G , а единственная экстремальная область – круг. Обобщение неравенства (1) на случай конечносвязных областей – это неравенство Полиа–Вайнштейна [4], где единственной экстремалью уже является кольцо. В нашей статье будут доказаны неравенства для $P(G)$, которые остаются справедливыми в более широком классе областей – областей с неограниченной площадью.

Оценка снизу для жесткости кручения односвязной области была получена Л. Е. Пейном и выражается неравенством

$$P(G) \geq 2\pi u^2(G), \quad (2)$$

где снова круг является единственной экстремальной областью. В данной работе будет доказано обобщение неравенства Пейна (2) на случай конечносвязных областей, где, как и в неравенстве Полиа–Вайнштейна, кольцо является единственной экстремалью.

Для функции напряжения конечносвязной области мы также доказываем аналог изопериметрического неравенства Авхадиева и автора [5] для односвязной области G

$$\iint_G R^{\gamma-2}(x, G) dA \leq \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\pi(\gamma-1)} \iint_G R^{\alpha-2}(x, G) dA \iint_G R^{\beta-2}(x, G) dA,$$

где $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $\gamma = \alpha + \beta$ и $R(x, G)$ – конформный радиус G в точке $x \in G$. Равенство в этом неравенстве с двумя параметрами достигается только для круга при любых значениях α и β . Наше утверждение еще раз подчеркивает (см. ниже теорему 2) связь между интегралами от функции напряжения и конформного радиуса. Отметим, что впервые такая связь была установлена Авхадиевым [6]: для любой односвязной области G

$$\delta(G) := \frac{P(G)}{\iint_G R^2(x, G) dA} \in [1, 4].$$

Автором было установлено в [7], что $\delta(G) \geq 3/2$, причем константа $3/2$ является точной и достигается только для круга.

В работах Кехлер–Джобин [8], [9] (см. также статью–обзор [10]) была доказана замечательная гипотеза Дж. Херша об изопериметрической монотонности. Как частные случаи эта гипотеза содержит ряд классических изопериметрических неравенств для односвязных областей, в том числе и неравенство (1). Для конечносвязных областей аналогичные утверждения автору неизвестны. Таким образом, обнаружение новых функционалов области со свойством изопериметрической монотонности является одним из новых направлений в теории изопериметрических неравенств. Ниже будет установлен аналог гипотезы Херша для функционала, зависящего от функции напряжения конечносвязной области.

В работах [11] и [12] были доказаны изопериметрические интегральные неравенства для первой собственной функции оператора Лапласа области. Пусть $u_1(x)$ – первая собственная функция оператора Лапласа в области G ($u_1(x)$ обращается в нуль на всей границе ∂G , а сама область предполагается не обязательно односвязной). Обозначим через $\|\cdot\|_p$ норму в пространстве Лебега $L^p(G)$. В работе [12] было доказано следующее изопериметрическое неравенство:

$$\frac{\|u_1\|_p}{\|u_1\|_{p'}} \geq \frac{\|u_1^*\|_p}{\|u_1^*\|_{p'}}, \quad (3)$$

где $0 < p \leq 1 \leq p' \leq \infty$, $p < p'$, а $u_1^*(x)$ – первая собственная функция для круга, имеющего то же самое первое собственное значение, что и область G . Неравенство (3) выражает монотонное убывание L^p -нормы первой собственной функции при дополнительном ограничении на параметры, связанного с L^1 -нормой функции $u_1(x)$. Далее будет доказано, что неравенство, аналогичное (3), справедливо для функций $u(x, G)$ и $u^{-1}(x, G)$. Получена также точная оценка скорости убывания их L^p -норм через соответствующие L^p -нормы функции напряжения для кольца.

2. Основные результаты и следствия. Продолжим функцию напряжения $u(x, G)$ постоянными c_i внутри Γ_i . Будет удобно снова обозначить продолженную функцию через $u(x, G)$. Таким образом функция будет определена в $|\text{int}(\Gamma_0)|$ – внутренности Γ_0 , а $\|\cdot\|_p$ теперь будет обозначать норму в пространстве Лебега $L^p(|\text{int}(\Gamma_0)|)$. Заметим, что при $p = 1$ норма функции $u(x, G)$ в точности до константы совпадает жесткостью кручения области G , а случай $p = \infty$ соответствует функционалу $u(G)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – $(n+1)$ -связная область и $u(G) < \infty$. Тогда

$$\iint_{|\text{int}(\Gamma_0)|} u^\alpha(x, G) dA \geq \frac{4\pi}{\alpha+1} [u(G)]^{\alpha+1} + \sum_{i=1}^n c_i^\alpha a_i \quad (4)$$

для всех $\alpha > -1$. При $n = 0$ неравенство обращается в равенство, только когда G – круг. Равенство для областей связности больше единицы достигается тогда и только тогда, когда G – кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы 1 при $n = 0$ и $\alpha = 1$ совпадает с классическим изопериметрическим неравенством Пейна (2).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – $(n+1)$ -связная область ($n \geq 1$) и $P(G) < \infty$. Тогда

$$P(G) \geq 8\pi u^2(G) + 4 \sum_{i=1}^n c_i a_i.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда G – кольцо.

Следствие 1 является обобщением неравенства (2) на случай конечносвязных областей. Заметим, что в правую часть неравенства входят неизвестные константы c_i (константы a_i можно считать заданными). Число неизвестных можно сократить до одной, если положить для определенности, что c_1 является минимальной среди c_i , тогда можно предложить следующее обобщение неравенства Пейна:

$$P(G) \geq 8\pi u^2(G) + 4c_1 \sum_{i=1}^n a_i,$$

где единственной экстремальной областью остается кольцо.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\|u(x, G)\|_{\beta-1} < \infty$ для некоторого $\beta \geq 0$. Тогда*

$$\iint_{|\text{int}(\Gamma_0)|} u^{\alpha+\beta-1}(x, G) dA < \frac{\alpha\beta}{4\pi(\alpha+\beta)} \iint_{|\text{int}(\Gamma_0)|} u^{\beta-1}(x, G) dA \times \iint_{|\text{int}(\Gamma_0)|} u^{\alpha-1}(x, G) dA, \quad (5)$$

где $\alpha \geq \beta \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Строгое неравенство в (5) обращается в равенство только для одной односвязной области, а именно круга, при этом равенство имеет место для всех значений параметров α и β .

Следующие две теоремы устанавливают свойство изопериметрической монотонности для интегральных функционалов, связанных с функцией напряжения. Рассмотрим функционал

$$P_\alpha(G) := \left(\frac{\alpha}{4\pi} \iint_{|\text{int}(\Gamma_0)|} u^{\alpha-1}(x, G) dA \right)^{1/\alpha}, \quad (6)$$

где α – положительный параметр.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $P_{\alpha_0}(G) < \infty$ для некоторого $\alpha_0 > 0$. Тогда $P_\alpha(G)$ – строго убывающая функция от α для $\alpha \geq \alpha_0$. Кроме того, если G не является концентрическим кольцом, то $P_0(G) = \infty$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие $P_\infty(G) = u(G) < \infty$ является необходимым для применения теоремы 3. Таким образом, случаю $p = \infty$ соответствует самый широкий класс областей с ограниченным L^p -нормой функции напряжения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Как следствие из теоремы 3 вытекает серия изопериметрических интегральных неравенств. Действительно, для $\alpha_1 > \alpha_2$ из теоремы следует неравенство

$$P_{\alpha_1}(G) < P_{\alpha_2}(G).$$

В этом неравенстве, как и в теореме 3, экстремальная область – круг не принадлежит рассматриваемому классу областей.

ТЕОРЕМА 4. а) Пусть $\|u(x, G)\|_p < \infty$. Тогда

$$\frac{\|u(x, G)\|_{p'}}{\|u(x, G)\|_{p''}} < \frac{\|u(x, R_1)\|_{p'}}{\|u(x, R_1)\|_{p''}}, \quad (7)$$

где $p' \geq p \geq p'' \geq 0$, $p' > p''$, R_1 – круговое кольцо такое, что площадь внутреннего круга равна $\sum_{i=1}^n a_i$, а радиус внешнего круга однозначно определяется из условия $\|u(x, R_1)\|_p = \|u(x, G)\|_p$.

б) Пусть $\|u^{-1}(x, G)\|_p < \infty$. Тогда

$$\frac{\|u^{-1}(x, G)\|_{p'}}{\|u^{-1}(x, G)\|_{p''}} < \frac{\|u^{-1}(x, R_2)\|_{p'}}{\|u^{-1}(x, R_2)\|_{p''}}, \quad (8)$$

где $0 \leq p' \leq p \leq p'' < 1$, $p' < p''$, R_2 – круговое кольцо такое, что площадь внутреннего круга равна $\sum_{i=1}^n a_i$, а радиус внешнего круга однозначно определяется из условия $\|u^{-1}(x, R_2)\|_p = \|u^{-1}(x, G)\|_p$.

3. Доказательства основных утверждений. В доказательствах будет более удобно использовать следующее обозначение, выражающее зависимость лебеговой нормы функции от параметра и области,

$$P(\alpha, G) := \iint_{|\text{int}(\Gamma_0)|} u^\alpha(x, G) dA = (\|u(x, G)\|_\alpha)^\alpha,$$

где $\alpha > -1$.

Ниже будут использованы оценки на линиях уровня функции $u^\alpha(x, G)$, поэтому введем необходимые обозначения. Обозначим

$$G_\lambda(\alpha) := \{x \in G \mid u^\alpha(x, G) > \lambda\}, \quad (9)$$

где $\lambda \in [0, u^\alpha(G)]$, и через $\partial G_\lambda(1)$ обозначим границу $G_\lambda(1)$. Области $G_\lambda(\alpha)$ при $\alpha > 0$ будут односвязными в отличие от G . В дальнейшем мы часто будем использовать следующие интегральные равенства (см., например, [2]):

$$P(\alpha, G) = \int_0^{A(|\text{int} \Gamma_0|)} \lambda^\alpha(A) dA + \sum_{i=1}^n c_i^\alpha a_i = \int_0^{u^\alpha(G)} A(G_\lambda(\alpha)) d\lambda. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Воспользуемся известными свойствами для линий уровня. Так как $u(x, G)$ является вещественно-аналитической функцией, то для почти всех λ имеет место равенство (см. [2])

$$\frac{dA(G_\lambda(1))}{d\lambda} = - \int_{\partial G_\lambda(1)} \frac{ds}{|\text{grad } u|},$$

где $A(G_\lambda(1))$ – площадь области $G_\lambda(1)$. Применяя определение интеграла Лебега и интегрирование по частям, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)P(\alpha, G) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n c_i^\alpha a_i &= (\alpha + 1) \int_0^{A(|\text{int} \Gamma_0|)} \lambda^\alpha(A) dA \\ &= -(\alpha + 1) \int_0^{u(G)} \lambda^\alpha \frac{dA(G_\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \int_0^{u(G)} \int_{\partial G_\lambda(1)} \frac{ds}{|\text{grad } u|} d\lambda^{\alpha+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $A(|\text{int} \Gamma_0|) \in (0, \infty]$. Из формулы Грина и определения функции напряжения следует равенство

$$\int_{\partial G_\lambda(1)} |\text{grad } u| ds = A(G_\lambda(1)).$$

Применим теперь неравенство Коши–Буняковского и классическое изопериметрическое неравенство. Получим

$$\int_{\partial G_\lambda(1)} \frac{ds}{|\text{grad } u|} \geq \frac{\left(\int_{\partial G_\lambda(1)} ds \right)^2}{\int_{\partial G_\lambda(1)} |\text{grad } u| ds} = \frac{L^2(\partial G_\lambda(1))}{A(G_\lambda(1))} \geq 4\pi.$$

Теперь утверждение проверяется подстановкой последнего неравенства в (11). Утверждение о случае равенства следует из классического изопериметрического неравенства, так как все линии уровня функции напряжения являются окружностями только для круга и кольца.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если G не совпадает с кольцом, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} P_{\alpha}(G) = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулировка следствия совпадает с частью утверждения теоремы 3 и следует из определения (6) и теоремы 1.

Для доказательства оставшихся трех теорем приведем вначале несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть область G – концентрическое кольцо. Тогда $P_{\alpha}(G)$ является строго убывающей функцией от α и $P_0(G) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко проверяется непосредственными вычислениями. Действительно, функция напряжения для концентрического кольца хорошо известна (см., например, [2]): $u(x, G) = (r_0^2 - |x|^2)/4$, где $r_1 \leq |x| \leq r_0$, а r_0 и r_1 – радиусы внешней и внутренней окружностей, ограничивающих G . Тогда легко непосредственно вычислить

$$P_{\alpha}(G) = \frac{r_0^2 - r_1^2}{4} \left(1 + \frac{\alpha r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \right)^{1/\alpha}.$$

Отсюда легко следует утверждение леммы, в частности,

$$P_0(G) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} P_{\alpha}(G) = \frac{r_0^2 - r_1^2}{4} \exp \left(\frac{r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \right).$$

Обозначим через $[G]_S$ симметризацию области G , которая ставит в соответствие области G кольцо равной площади, причем площадь внутреннего круга равна $\sum_{i=1}^n a_i$. Так же будем обозначать симметризацию функции напряжения. Из контекста будет ясно, что именно симметризуется область или функция.

ЛЕММА 2. Пусть G – конечносвязная область связности больше единицы такая, что $A(G) < \infty$. Тогда

- 1) $P(\alpha, G) \leq P(\alpha, [G]_S)$ для $\alpha > 0$;
- 2) $P(\alpha, G) \geq P(\alpha, [G]_S)$ для $-1 < \alpha < 0$.

Равенство имеет место только в том случае, когда G – кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из свойства равноизмеримости функций при симметризации, т.е. из свойства

$$P(\alpha, G) = \iint_{[G]_S} ([u(\cdot, G)]_S(x))^{\alpha} dA,$$

и неравенства

$$[u(\cdot, G)]_S(x) \leq u(x, [G]_S),$$

доказанного Пейном (см. [2]). Более того, было доказано, что случай равенства имеет место только для кольца.

Следующее утверждение устанавливает одно простое свойство линий уровня функции $u^{\alpha}(x, G)$, которое понадобится в дальнейшем.

ЛЕММА 3. Пусть G – неограниченная односвязная область такая, что $P(\alpha, G) < \infty$. Тогда $A(G_\lambda(\alpha)) < \infty$ для $0 < \lambda \leq u^\alpha(G)$, и

$$\lambda A(G_\lambda(\alpha)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть найдется число $\lambda_0 (> 0)$ такое, что $A(G_{\lambda_0}(\alpha)) = \infty$. Очевидно, что $G_\lambda(\alpha) \subset G_{\lambda_1}(\alpha)$ для $\lambda > \lambda_1$. Следовательно, $A(G_\lambda(\alpha)) = \infty$ для $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Тогда из (10) следует неравенство

$$P(\alpha, G) \geq \int_0^{\lambda_0} A(G_t(\alpha)) dt = \infty,$$

что противоречит ограниченности $P(\alpha, G)$.

Далее, заметим, что $P(\alpha, G) \geq P(\alpha, G_\lambda(\alpha)) + \lambda A(G_\lambda(\alpha))$; следовательно

$$0 \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda A(G_\lambda(\alpha)) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} [P(\alpha, G) - P(\alpha, G_\lambda(\alpha))] = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Геометрически утверждение леммы означает, в частности, что области со свойством $P(\alpha, G) < \infty$, $\alpha > 0$, не могут содержать в качестве подобласти бесконечную полуполосу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Для доказательства пункта а) теоремы изучим сначала свойства $P(\alpha, G)$ при $\alpha \geq 0$.

Функционал $P(\alpha, G)$ монотонно возрастает при расширении области. Следовательно, для фиксированного α области G можно однозначно сопоставить кольцо $R(\alpha)$, площадь внутреннего круга которого равна $\sum_{i=1}^n a_i$, а радиус внешнего круга однозначно определится из условия $P(\alpha, R(\alpha)) := P(\alpha, G)$. Для доказательства будет достаточно установить следующие два неравенства:

$$P(\gamma, G) < P(\gamma, R(\alpha)) \quad \text{для } \gamma > \alpha; \quad (12)$$

$$P(\gamma, G) > P(\gamma, R(\alpha)) \quad \text{для } 0 \leq \gamma < \alpha. \quad (13)$$

Заметим, что случай $\alpha = 0$ – это частный случай леммы 2. Более того, случай $\gamma = 0$ есть другая интерпретация леммы 2. Действительно, $P(\alpha, R(\alpha)) = P(\alpha, G) \leq P(\alpha, [G]_S)$ и, очевидно, что при фиксированном α функционал $P(\alpha, G)$ монотонно возрастает при расширении области. Тогда из леммы 2 следует, что

$$P(0, R(\alpha)) = A(|\text{int } \Upsilon_0|) \leq A([G]_S) = A(|\text{int } \Gamma_0|) = P(0, G),$$

где Υ_0 – внешняя граница $R(\alpha)$.

Таким образом, будем доказывать неравенства (12) и (13) лишь для случая $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$. Далее в доказательстве параметр α считается фиксированным, для краткости будем писать $G_\lambda := G_\lambda(\alpha)$ и $R := R(\alpha)$.

Для доказательства интегральных неравенств мы применим симметризацию, введенную Кехлер-Джобин в работах [8], [12].

Рассмотрим функцию напряжения конечносвязной области $G_\lambda \setminus \{|\text{int } \Gamma_0| \setminus G\}$. Обозначим ее для краткости $u(x, G_\lambda)$. Из определения функции напряжения следует равенство

$$u(x, G_\lambda) = u(x, G) - \lambda^{1/\alpha}, \quad x \in G_\lambda \setminus \{|\text{int } \Gamma_0| \setminus G\}.$$

Положим

$$p(\lambda) := \iint_{G_\lambda} u^\alpha(x, G_\lambda) dA.$$

Соответствующее значение для кольца R обозначим через $p^*(\lambda^*)$. Тогда из (10) получим

$$p(\lambda) = \iint_{G_\lambda} [u(x, G) - \lambda^{1/\alpha}]^\alpha dA = \int_\lambda^{u(G)} A(G_t) dt.$$

Дифференцируя это равенство по λ , получим

$$-\frac{dp(\lambda)}{d\lambda} = A(G_\lambda).$$

Аналогично равенство имеет место и для R_{λ^*} .

Установим соответствие между областями G_λ и R_{λ^*} требованием $p(\lambda) = p^*(\lambda^*)$. В частности, для $\lambda = \lambda^* = 0$ имеем $p(0) = P(\alpha, G) = P(\alpha, R) = p^*(0)$, что согласуется с определением кольца R .

По лемме 3 линии уровня G_λ ограничены. Применяя лемму 2 к области $G_\lambda \setminus \{|\text{int } \Gamma_0| \setminus G\}$, получим неравенство $A(R_{\lambda^*}) \leq A(G_\lambda)$, т.е.

$$-\frac{dp(\lambda)}{d\lambda} \geq -\frac{dp^*(\lambda^*)}{d\lambda^*}.$$

Пусть $\lambda(p)$ – обратная функция к функции $p(\lambda)$. Учитывая, что $p = p^*$ в силу установленного соответствия, из последнего неравенства получаем

$$-\frac{d\lambda^*(p)}{dp} \geq -\frac{d\lambda(p)}{dp}.$$

Так как $\lambda^*(P(\alpha, R)) = 0 = \lambda(P(\alpha, G))$, то, интегрируя от $p_0(> 0)$ до $P(\alpha, G)$, получим

$$\lambda^*(p) \geq \lambda(p). \quad (14)$$

Как частный случай при $p = 0$ получаем изопериметрическое неравенство $u(R) \geq u(G)$.

Из определения (9) следует равенство $G_\lambda(\gamma) = G_{\lambda^{\alpha/\gamma}}$. Используя определение (9), равенства (10) и $-dp(\lambda) = A(G_\lambda) d\lambda$, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} P(\gamma, G) &= \int_0^{u^\gamma(G)} A(G_t(\gamma)) dt = \int_0^{u^\gamma(G)} A(G_{t^{\alpha/\gamma}}) dt \\ &= \frac{\gamma}{\alpha} \int_0^{u^\alpha(G)} t^{\gamma/\alpha-1} A(G_t) dt = -\frac{\gamma}{\alpha} \int_0^{u^\alpha(G)} \lambda^{\gamma/\alpha-1} dp(\lambda) \\ &= \frac{\gamma}{\alpha} \int_0^{P(\alpha, G)} \lambda^{\gamma/\alpha-1}(p) dp. \end{aligned}$$

Из полученного представления $P(\gamma, G)$ и неравенства (14) следуют неравенства (12) и (13), причем во втором случае дополнительно предполагаем, что $P(\gamma, G) < \infty$, так как в зависимости от области функция напряжения может быть интегрируема не для всех значений $\gamma \in [0, \alpha)$. Неравенства (12) и (13) будут строгими в силу леммы 1. Это завершает доказательство пункта а) теоремы 4.

Для доказательства пункта б) теоремы 4 будет достаточно установить неравенства

$$P(\gamma, G) < P(\gamma, R(\alpha)) \quad \text{для } 0 \geq \gamma > \alpha, \quad (15)$$

$$P(\gamma, G) > P(\gamma, R(\alpha)) \quad \text{для } 0 \geq \alpha > \gamma > -1, \quad (16)$$

где $-1 < \alpha < 0$ и $R(\alpha)$ – кольцо, определенное как и при доказательстве пункта а) выше.

По аналогии с пунктом а) заметим, что случай $\gamma = 0$ является следствием леммы 2. Поэтому будем в дальнейшем считать $\gamma < 0$.

Для $\alpha < 0$ определим дополнительно к $G_\lambda(\alpha)$ множества

$$G^\lambda(\alpha) := \{x \in G \mid u^\alpha(x, G) < \lambda\}, \quad (17)$$

где $\lambda \in [u^\alpha(G), \infty)$. Очевидно, имеет место равенство

$$A(G_\lambda(\alpha)) + A(G^\lambda(\alpha)) = A(|\text{int } \Gamma_0|). \quad (18)$$

Так как параметр α отрицателен, в отличие от интегрального равенства (10) будет иметь место равенство

$$\iint_{|\text{int } \Gamma_0|} u^\alpha(x, G) dA = A(|\text{int } \Gamma_0|)u^\alpha(G) + \int_{u^\alpha(G)}^\infty A(G_\lambda(\alpha)) d\lambda. \quad (19)$$

Дальнейшее доказательство неравенств (15) и 16 будет удобно разбить на три шага.

Первый шаг. Рассмотрим функцию напряжения конечносвязной области $G^\lambda \setminus \{|\text{int } \Gamma_0| \setminus G\}$ и обозначим ее кратко через $u(x, G^\lambda)$. Изучим свойства следующего функционала:

$$p(\lambda) = \iint_{G^\lambda} u^\alpha(x, G^\lambda) dA.$$

Соответствующее значение этого функционала для R обозначим $p^*(\lambda^*)$. Функция напряжения области G^λ удовлетворяет равенству $u(x, G) = u(x, G^\lambda) + \lambda^{1/\alpha}$ для $x \in G^\lambda \setminus \{|\text{int } \Gamma_0| \setminus G\}$, поэтому получаем

$$p(\lambda) = \iint_{G^\lambda} [u(x, G) - \lambda^{1/\alpha}]^\alpha dA = \int_{u^\alpha(G)}^\lambda A(G^t) dt.$$

Дифференцируя это равенство по λ , получим

$$\frac{dp(\lambda)}{d\lambda} = A(G^\lambda). \quad (20)$$

Для того, чтобы применить лемму 2, определим соответствие между областями G^λ и R^{λ^*} . Пусть λ соответствует λ^* тогда и только тогда, когда $p(\lambda) = p^*(\lambda^*)$, в частности,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p(\lambda) = \lim_{\lambda^* \rightarrow \infty} p^*(\lambda^*) = \infty,$$

так как $P(\alpha, G) < \infty$ по предположению.

Применяя лемму 2 к области $G^\lambda \setminus \{|\text{int } \Gamma_0| \setminus G\}$ и равенство (20), получим неравенство

$$\frac{dp(\lambda)}{d\lambda} \leq \frac{dp^*(\lambda^*)}{d\lambda^*}. \quad (21)$$

Домножим обе части равенства на $p^2(\lambda) = (p^*(\lambda^*))^2$. Переходя к обратным функциям и учитывая, что $p = p^*$, получим неравенства

$$\frac{d\lambda^*(p)}{(\lambda^*(p))^2 dp} \leq \frac{d\lambda(p)}{\lambda^2(p) dp} \quad \text{и} \quad -\frac{d[1/\lambda^*(p)]}{dp} \leq -\frac{d[1/\lambda(p)]}{dp}.$$

Интегрируя последнее от $p_0(> 0)$ до ∞ с учетом равенств $\lambda(\infty) = \lambda^*(\infty) = \infty$, получаем

$$\lambda^*(p) \geq \lambda(p). \quad (22)$$

Из определения (17) следует равенство $G^\lambda(\gamma) = G^{\lambda^{\alpha/\gamma}}$. Используя определение интеграла Лебега, интегрирование по частям и равенство (20), получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \iint_{G^\lambda(\gamma)} u^\gamma(x, G^\lambda(\gamma)) dA &= \iint_{u^\gamma(G)} A(G^t(\gamma)) dt = \int_{u^\gamma(G)}^\lambda A(G^{t^{\alpha/\gamma}}) dt \\ &= \frac{\gamma}{\alpha} \int_{u^\alpha(G)}^{\lambda^{\alpha/\gamma}} t^{\gamma/\alpha-1} A(G^t) dt = \frac{\gamma}{\alpha} \int_{u^\alpha(G)}^{\lambda^{\alpha/\gamma}} t^{\gamma/\alpha-1} dp(t) \\ &= \frac{\gamma}{\alpha} \int_0^{p(\lambda^{\alpha/\gamma})} \lambda^{\gamma/\alpha-1}(p) dp. \end{aligned}$$

Из полученного представления, равенства $p = p^*$ и неравенства (22), для $\gamma > \alpha$ следует неравенство

$$\iint_{R^\lambda(\gamma)} u^\gamma(x, R^\lambda(\gamma)) dA \leq \iint_{G^\lambda(\gamma)} u^\gamma(x, G^\lambda(\gamma)) dA. \quad (23)$$

Второй шаг. Установим некоторые изопериметрические неравенства, включающие $u(G)$, $A(|\text{int } \Gamma_0|)$ и $u(R)$, $A(|\text{int } \Upsilon_0|)$, где Υ_0 – внешняя граница $R(\alpha)$.

Из (22), в частности, получим $\lambda^*(0) = (u(R))^\alpha \geq \lambda(0) = (u(G))^\alpha$, т.е. изопериметрическое неравенство $u(R) \leq u(G)$. Учитывая, что $\gamma, \alpha < 0$, из (22) также следует неравенство

$$(\lambda^*(p))^{\gamma/\alpha} - (u(R))^\gamma \geq \lambda^{\gamma/\alpha}(p) - (u(G))^\gamma. \quad (24)$$

Отметим, что значение $\lambda^{\gamma/\alpha}$ соответствует линии уровня функции $u^\gamma(x, G)$.

Применяя лемму 2 к области G для отрицательных значений параметра α , получим неравенство $A(|\text{int } \Upsilon_0|) \geq A(|\text{int } \Gamma_0|)$, а отсюда следует изопериметрическое неравенство

$$A(|\text{int } \Upsilon_0|)(u(R))^\gamma \geq A(|\text{int } \Gamma_0|)(u(G))^\gamma. \quad (25)$$

Заметим также, что из леммы 2 следует, что равенство достигается тогда и только тогда, когда G – кольцо. Кроме того, из (24) вытекает неравенство

$$[(\lambda^*(p))^{\gamma/\alpha} - (u(R))^\gamma] A(|\text{int } \Upsilon_0|) \geq [\lambda^{\gamma/\alpha}(p) - (u(G))^\gamma] A(|\text{int } \Gamma_0|). \quad (26)$$

Третий шаг. Приведем окончательные выкладки. Применяя (18), (19), (23) и (26), получаем

$$\begin{aligned}
 \iint_G u^\gamma(x, G) dA - A(|\text{int } \Gamma_0|)(u(G))^\gamma &= \int_{u^\gamma(G)}^\infty A(G_t(\gamma)) dt \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{u^\gamma(G)}^\lambda A(G_t(\gamma)) dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{u^\gamma(G)}^\lambda [A(|\text{int } \Gamma_0|) - A(G^t(\gamma))] dt \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[(\lambda - (u(G))^\gamma) A(|\text{int } \Gamma_0|) - \iint_{G^\lambda(\gamma)} u^\gamma(x, G^\lambda(\gamma)) dA \right] \\
 &\leq \lim_{\lambda^* \rightarrow \infty} \left[(\lambda^* - (u(R))^\gamma) A(|\text{int } \Upsilon_0|) - \iint_{R^{\lambda^*}(\gamma)} u^\gamma(x, R^{\lambda^*}(\gamma)) dA \right] \\
 &= \iint_{|\text{int } \Upsilon_0|} u^\gamma(x, R) dA - A(|\text{int } \Upsilon_0|)(u(R))^\gamma.
 \end{aligned}$$

Привлекая к полученному неравенству неравенство (25), имеем

$$\begin{aligned}
 \iint_{|\text{int } \Gamma_0|} u^\gamma(x, G) dA &= A(|\text{int } \Gamma_0|)(u(G))^\gamma + \iint_{|\text{int } \Gamma_0|} u^\gamma(x, G) dA - A(|\text{int } \Gamma_0|)(u(G))^\gamma \\
 &< \iint_{|\text{int } \Upsilon_0|} u^\gamma(x, R) dA.
 \end{aligned}$$

Последнее неравенство является строгим в силу леммы 1, когда область G совпадает с кольцом. Если G не совпадает с кольцом, то знак строгого неравенства следует из того, что кольцо является единственной экстремалью в неравенстве (25). Это завершает доказательство неравенства (15).

Теперь покажем, что неравенство (16) следует из (15). В этом случае мы полагаем, что $P(\gamma, G)$ существует и конечно, в противном случае утверждение тривиально. Тогда мы можем по аналогии с $R(\alpha)$ определить круг $R(\gamma)$. Из доказанного следует, что радиус круга $R(\gamma)$ больше, чем радиус $R(\alpha)$. Действительно, меняя местами параметры в неравенстве (15), получим

$$P(\alpha, R(\alpha)) := P(\alpha, G) \leq P(\alpha, R(\gamma)),$$

так как $\alpha > \gamma$. Но функционал $P(\alpha, G)$ при фиксированном параметре монотонно возрастает при расширении области, т.е. имеем

$$P(\gamma, G) =: P(\gamma, R(\gamma)) \geq P(\gamma, R(\alpha)).$$

Таким образом, неравенство (16), а вместе с ним и пункт b) теоремы 4 доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из условий теоремы следует ограниченность интегралов, входящих в неравенство (5). Положим в неравенствах (13) и (16) $\alpha = \alpha' + \beta - 1$, тогда получим неравенство

$$\frac{P(\alpha' + \beta - 1, G)}{P(\alpha' - 1, G)P(\beta - 1, G)} < \frac{P(\alpha' + \beta - 1, R(\alpha' + \beta - 1))}{P(\alpha' - 1, R(\alpha' + \beta - 1))P(\beta - 1, R(\alpha' + \beta - 1))}.$$

Дробь в правой части неравенства легко оценивается, и это завершает доказательство теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В случае, когда G – кольцо, теорема 3 – утверждение леммы 1. Пусть G не совпадает с кольцом. Зафиксируем $\beta \geq \beta_0$, тогда $P_\beta(G)$ ограничен в силу неравенств (12) и (15). Как и выше построим кольцо $R(\beta)$ такое, что $P_\beta(G) = P_\beta(R(\beta))$. Для кольца по лемме 1 имеем $P_\gamma(R(\beta)) < P_\beta(R(\beta))$ для всех допустимых $\gamma > \beta$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$, из неравенств (12) и (15) снова следует, что $P_{\beta+\varepsilon}(G)$ ограничена, и круг $R(\beta)$ доставляет большее значение $P_{\beta+\varepsilon}(R(\beta))$, чем область G , т.е.

$$P_{\beta+\varepsilon}(G) < P_{\beta+\varepsilon}(R(\beta)) < P_\beta(R(\beta)) = P_\beta(G), \quad \varepsilon > 0.$$

Это и завершает доказательство теоремы 3.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Ф. Г. Авхадиеву за полезные советы и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Поля, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства математической физики*, Физматгиз, М., 1962.
- [2] C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman Adv. Publ. Program, Boston, 1980.
- [3] G. Keady, A. McNabb, “The elastic torsion problem: Solutions in convex domains”, *New Zealand J. Math.*, **22** (1993), 43–64.
- [4] G. Polya, A. Weinstein, “On the torsional rigidity of multiply connected cross-sections”, *Ann. of Math.*, **52**:1 (1950), 154–163.
- [5] F. G. Avkhadiyev, R. G. Salahudinov, “Isoperimetric inequalities for conformal moments of plane domains”, *J. Inequalities Appl.*, **7**:4 (2002), 593–601.
- [6] Ф. Г. Авхадиев, “Решение обобщенной задачи Сен-Венана”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 3–12.
- [7] R. G. Salahudinov, “Isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane”, *J. Inequalities Appl.*, **6** (2001), 253–260.
- [8] M.-Th. Kohler-Jobin, “Une propriété de monotonie isopérimétrique qui contient plusieurs théorèmes classiques”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **284**:3 (1977), 917–920.
- [9] M.-Th. Kohler-Jobin, “Une méthode de comparaison isopérimétrique de fonctionnelles de domaines de la physique mathématique I, II”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **29** (1978), 757–766, 767–776.
- [10] J. Hersch, “Isoperimetric monotonicity—some properties and conjectures (connection between isoperimetric inequalities)”, *SIAM Rev.*, **30**:4 (1988), 551–577.
- [11] L. E. Payne, M. E. Rayner, “An isoperimetric inequality for the first eigenfunction on the fixed membran problem”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **23** (1972), 13–15.
- [12] M.-Th. Kohler-Jobin, “Isoperimetric monotonicity and isoperimetric inequalities of Payne–Rayner type for the first eigenfunction of the Helmholtz problem”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **32** (1981), 625–646.

Р. Г. Салахудинов

Научно-исследовательский институт математики и механики
им. Н. Г. Чеботарева, Казанский государственный университет
E-mail: rsalahudinov@ksu.ru

Поступило
04.09.2003