Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов, Об игровых задачах на фиксированном отрезке в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 613–626

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:57:53

УДК 517.95

ОБ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ НА ФИКСИРОВАННОМ ОТРЕЗКЕ В УПРАВЛЯЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов

Работа посвящена изучению задач преследования и уклонения от встречи на фиксированном конечном отрезке в управляемых уравнениях параболического типа. Управляющие параметры входят в правую часть уравнений в аддитивной форме. Изучены все возможные случаи ограничений на управления. Для некоторых случаев выделены пары множеств начальных положений таких, что из точек первого из них гарантируется завершение преследования, а из точек второго – уклонение от встречи с терминальным множеством.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Постановка задачи, формулировки предположений и основных результатов

1. Рассматривается управляемая распределенная система, описываемая параболическим уравнением

$$z_t = Az - u + v, \quad z|_{t=0} = z_0(x), \quad z|_{S_T} = 0, \quad (1)$$

где $z = z(t, x)$ – неизвестная функция; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, Ω – ограниченная область, $t \in [0, T]$, T – произвольная положительная константа;

$$Az = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) z_{x_j}), \quad (2)$$

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(x)$ – измеримая ограниченная функция, кроме того, существует положительная константа γ такая, что для произвольных $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^n \xi_i^2;$$

$u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ – управляющие функции (управления, параметры), функцией $u(x, t)$ распоряжается первый игрок (*преследующий* игрок), функцией $v(x, t)$ – второй игрок (*преследуемый* или *убегающий* игрок), $u(x, t)$ и $v(x, t) \in L_2(Q_T)$, $Q_T =$

$\{(x, t) \mid x \in \Omega, t \in (0, T)\}$ – открытый цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$; $z_0(x) \in L_2(\Omega)$, $S_T = \{(x, t) \mid x \in \partial\Omega, t \in (0, T)\}$ – боковая поверхность цилиндра Q_T , $\partial\Omega$ – граница области Ω .

Далее, напомним, что $W_2^1(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые по Ω обобщенные производные первого порядка; $\dot{W}_2^1(\Omega)$ – подпространство $W_2^1(\Omega)$, в котором плотным является множество всех гладких, финитных функций; $W_2^{1,0}(Q_T)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства $L_2(Q_T)$, имеющих квадратично суммируемые по Q_T обобщенные производные z_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n$; $\dot{W}_2^{1,0}(Q_T)$ – подпространство $W_2^{1,0}(Q_T)$, в котором плотным множеством являются гладкие функции, равные нулю вблизи S_T [1].

2. В [1] доказано, что при выполнении перечисленных выше условий задача (1) имеет единственное обобщенное решение $z = z(x, t)$ в классе $\dot{W}_2^{1,0}(Q_T)$ при любых $u(x, t)$, $v(x, t) \in L_2(Q_T)$ и $z_0(x) \in L_2(\Omega)$ (в дальнейшем слово "обобщенное" будем опускать). Кроме того, это решение имеет вид [1; § 3, гл. 3]

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \psi_i(x), \quad (3)$$

где функции $z_i(t)$, $0 \leq t \leq T$, $i = 1, 2, \dots$, составляют решение задачи Коши для следующей бесконечной системы дифференциальных уравнений и начальных условий:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i - u_i(t) + v_i(t), \quad z_i(0) = z_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$ – собственные значения оператора A (см. (2)), они все отрицательные, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \dots$, $\lambda_i \rightarrow -\infty$ при $i \rightarrow \infty$, функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_i(x), \dots$ составляют ортонормированную и полную в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций оператора A , $u_i(t)$, $v_i(t)$ и z_{0i} – коэффициенты Фурье в разложениях $u(x, t)$, $v(x, t)$ и $z_0(x)$ соответственно по системе $\{\psi_i(x)\}$.

При этом ряд в (3) сходится в $L_2(Q_T)$ равномерно, его сумма $z(x, t)$ при каждом $t \in [0, T]$ принадлежит пространству $\dot{W}_2^1(\Omega)$ и как функция переменного t является непрерывной в норме $\dot{W}_2^1(\Omega)$ [1].

3. В дальнейшем управляющие функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ будут удовлетворять одной из следующих систем неравенств:

$$\|u(\cdot, t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t)} \leq \rho, \quad \|v(\cdot, t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(t)} \leq \sigma, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$\|u(\cdot, \cdot)\| = \sqrt{\int_0^T \|u(\cdot, t)\|^2 dt} \leq \rho, \quad \|v(\cdot, \cdot)\| = \sqrt{\int_0^T \|v(\cdot, t)\|^2 dt} \leq \sigma, \quad (6)$$

$$\|u(\cdot, \cdot)\| \leq \rho, \quad \|v(\cdot, t)\| \leq \sigma, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

$$\|u(\cdot, t)\| \leq \rho, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|v(\cdot, \cdot)\| \leq \sigma, \quad (8)$$

где ρ и σ – неотрицательные константы.

Функцию $z_0(x)$, $x \in \Omega$, будем называть *начальным положением (состоянием)* системы (1) и обозначать через $z_0(\cdot)$. Систему (1), в которой $u(x, t)$ и $v(x, t)$ удовлетворяют условию (5) (соответственно (6), (7), (8)), будем называть *игрой* (1), (5) (соответственно (1), (6); (1), (7); (1), (8)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. В игре (1), (5) *возможно завершение преследования* из начального положения $z_0(\cdot)$, если существуют число $T_0 = T(z_0(\cdot)) (\leq T)$ и функция $u(v, x, t)$, $v \in \mathbb{R}^1$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, такие, что для произвольной функции $v_0(x, t) \in L_2(Q_T)$, удовлетворяющей условию $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$, выполнено

- 1) функция $u_0(x, t) \equiv u(v_0(x, t), x, t) \in L_2(Q_T)$ и удовлетворяет неравенству $\|u_0(\cdot, t)\| \leq \rho$;
- 2) решение $z_0(x, t)$ задачи (1), где $u = u_0(x, t)$, $v = v_0(x, t)$, обращается в 0, т.е. $z_0(x, t) \equiv 0$ при некотором $t = t' \leq T_0$.

Число T_0 называется *временем преследования*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В игре (1), (5) *возможно уклонение от встречи* из начального положения $z_0(\cdot)$, $z_0(\cdot) \neq 0$, если существует функция $v(u, x, t)$, $u \in \mathbb{R}^1$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, такая, что для произвольной функции $u_0(x, t) \in L_2(Q_T)$, удовлетворяющей условию $\|u_0(\cdot, t)\| \leq \rho$, выполнено

- 1) функция $v_0(x, t) \equiv v(u_0(x, t), x, t) \in L_2(Q_T)$ и удовлетворяет неравенству $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$;
- 2) решение $z_0(x, t)$ задачи (1), где $u = u_0(x, t)$, $v = v_0(x, t)$, не обращается в 0, т.е. $z_0(x, t) \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$.

Аналогичным образом формулируются определения 1 и 2 для игр (1), (6); (1), (7) и (1), (8). Следует отметить, что в игре (1), (8) под завершением преследования понимается попадание решения $z_0(x, t)$ в произвольную ε -окрестность нуля.

Задача преследования и ее решение предполагают нахождение начальных положений $z_0(\cdot)$, из которых возможно завершение преследования в смысле определения 1, а также времени преследования T_0 и явного вида управляющей функции $u(v, x, t)$.

Задача уклонения от встречи и ее решение предполагают нахождение начальных положений $z_0(\cdot)$, $z_0(\cdot) \neq 0$, из которых возможно уклонение от встречи в смысле определения 2, и конструирование в явном виде управления $v(u, x, t)$.

4. Решению задач преследования и уклонения от встречи в конечномерных пространствах посвящено огромное количество исследований. Что же касается распределенных управляемых систем, то они, на наш взгляд, изучены еще недостаточно.

Настоящая статья примыкает к работам [2]–[13]. Некоторые ее результаты были анонсированы в докладах [12], [13]. Однако в них отрезок $[0, T]$ не является фиксированным.

Следует отметить, что игры (1), (5) и (1), (8) в классе позиционных стратегий $u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$ рассматривались для различных классов распределенных систем в исследованиях академика Осипова и его учеников (см., например, [6]–[8]). В частности, из результатов работ [6], [7] следует, что множество X_1 (см. ниже (9))

является в игре (1), (5) максимальным множеством, из точек которого возможно завершение преследования (в формализации, восходящей к работам Н. Н. Красовского и Ю. С. Осипова). Далее, для любого начального положения, не принадлежащего X_1 , разрешима задача уклонения опять же в классе позиционных стратегий $u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$.

Заметим, что мы придерживаемся формализации, несколько отличающейся от упомянутой выше. Кроме того, наш метод исследования задач преследования и уклонения отличается от методов работ [6]–[8].

В данной работе предложены достаточные условия для разрешимости задач преследования и уклонения от встречи (см. ниже теоремы 1 и 2). При решении задачи преследования для каждой из игр (1), (5) – (1), (8) выделены множества X_m, Y_m , $m = 1, 2, 3, 4$, такие, что из точек X_m можно завершить преследование, а из точек Y_m – невозможно (теорема 1). Возможность уклонения от встречи в играх (1), (5) и (1), (6) из любого начального положения $z_0(\cdot)$, $z_0(\cdot) \neq 0$, установлена при выполнении неравенства $\sigma \geq \rho$ (теорема 2). При доказательстве теоремы 2 мы использовали некоторые идеи, изложенные в книге [14].

Введем еще некоторые обозначения. Пусть

$$e_j(t) = (e^{|\lambda_j|t} - 1)|\lambda_j|^{-1}, \quad f_j(t) = (e^{2|\lambda_j|t} - 1)^{1/2}(2|\lambda_j|)^{-1/2},$$

$$X_1 = \{z_0(\cdot) \mid \|z_0(\cdot)\| \leq |\rho - \sigma|T\}, \quad Y_1 = \{z_0(\cdot) \mid \exists j : |z_{0j}| > |\rho - \sigma|e_j(T)\}; \quad (9)$$

$$X_2 = \{z_0(\cdot) \mid \|z_0(\cdot)\|^2 \leq (\rho - \sigma)^2 T\},$$

$$Y_2 = \begin{cases} \{z_0(\cdot) \mid \exists j : |z_{0j}| > \rho e_j(T)\}, & \sigma = 0, \\ \{z_0(\cdot) \mid \exists j : |z_{0j}| > \frac{\rho^2 f_j(T)}{4\sigma}\}, & \sigma > 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$X^{(i)}(T_0) = \left\{ z_0(\cdot) \mid z_0(x) = z_{0i}\psi_i(x), \ 0 < z_{0i}^2 < \frac{(\rho - \sigma\sqrt{T_0})^2 e_i^2(T_0)}{T_0}, \right.$$

$$\left. 0 < T_0 \leq T, \ \rho > \sigma\sqrt{T_0} \right\},$$

$$X_3 = \bigcup_{T_0} \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{(i)}(T_0), \quad Y^{(i)} = \{z_0(\cdot) \mid z_{0i}^2 > \rho^2 f_i^2(T)\}, \quad Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y^{(i)}; \quad (11)$$

$$X_4 = \left\{ z_0(\cdot) \mid \|z_0(\cdot)\| + \frac{\sigma}{\sqrt{2|\lambda_1|}} \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2|\lambda_1|}\varepsilon} \right) \leq \rho T, \ \varepsilon > 0 \right\},$$

$$Y_4 = \left\{ z_0(\cdot) \mid \exists j : |z_{0j}| > \left| \rho - \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \right| e_j(T) \right\}. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 1. 1) Если $\rho > \sigma$, то в игре (1), (5) (соответственно (1), (6)) возможно завершение преследования из любого начального положения $z_0(\cdot) \in X_1$ (соответственно $z_0(\cdot) \in X_2$).

2) Для произвольных $\rho > 0$ и $\sigma \geq 0$ в игре (1), (7) (соответственно (1), (8)) возможно завершение преследования из любого начального положения $z_0(\cdot) \in X_3$ (соответственно $z_0(\cdot) \in X_4$).

3) Для произвольных $\rho \geq 0$ и $\sigma \geq 0$ в игре (1), (5) (соответственно (1), (6); (1), (7); (1), (8)) невозможно завершение преследования ни из какого начального положения $z_0(\cdot) \in Y_1$ (соответственно $z_0(\cdot) \in Y_j$, $j = 2, 3, 4$).

ТЕОРЕМА 2. Если $\sigma \geq \rho$, то в игре (1), (5) (соответственно (1), (6)) возможно уклонение от встречи из произвольного начального положения $z_0(\cdot)$, $z_0(\cdot) \neq 0$.

2. Доказательства теорем 1 и 2

Ниже, в п. 1–3 этого раздела доказывается теорема 1, в п. 4 – теорема 2.

1. а) Рассматривается игра (1), (5) (игра (1), (6) изучается в п. б)). Пусть $\rho > \sigma$, $z_0(\cdot)$ – произвольная точка множества X_1 (см. (9)), $v_0(x, t)$ – произвольное управление второго игрока.

Положим $u(v, x, t) = v + w(x, t)$, где $w(x, t) \in L_2(Q_T)$, $\|w(\cdot, t)\| \leq \rho - \sigma$, конкретный вид функции $w(x, t)$ будет указан ниже. Ясно, что для функции $v_0(x, t)$, удовлетворяющей неравенству $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$, выполняется условие

$$\|u_0(\cdot, t)\| \leq \rho, \quad \text{где} \quad u_0(x, t) = v_0(x, t) + w(x, t).$$

Пусть

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t) \psi_i(x). \quad (13)$$

Тогда для решения $z_0(x, t)$ задачи (1) имеем (см. (3))

$$z_0(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_{0i}(t) \psi_i(x), \quad (14)$$

где функции $z_{0i}(t)$, $0 \leq t \leq T$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяют бесконечной системе дифференциальных уравнений и начальных условий (ср. (4))

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i - w_i(t), \quad z_i(0) = z_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что каждая функция $z_{0i}(t)$, $0 \leq t \leq T$, имеет вид

$$z_{0i}(t) = e^{\lambda_i t} \left[z_{0i} - \int_0^t e^{-\lambda_i s} w_i(s) ds \right]. \quad (15)$$

Положим

$$w_i(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda_i z_{0i}}{e^{-\lambda_i T_0} - 1}, & 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & T_0 < t \leq T, \end{cases} \quad T_0 = T(z_0(\cdot)) = \frac{\|z_0(\cdot)\|}{\rho - \sigma}. \quad (16)$$

В соответствии с определением множества X_1 число $T_0 = \|z_0(\cdot)\|/(\rho - \sigma) \leq T$. Далее, имеем (см. (15), (16))

$$z_{0i}(T_0) = e^{\lambda_i T_0} \left[z_{0i} - \int_0^{T_0} e^{-\lambda_i s} \frac{-\lambda_i z_{0i}}{e^{-\lambda_i T_0} - 1} ds \right] = e^{\lambda_i T_0} z_{0i} \left[1 - \frac{\lambda_i (e^{-\lambda_i T_0} - 1)}{\lambda_i (e^{-\lambda_i T_0} - 1)} \right] = 0$$

для всех $i = 1, 2, \dots$. Значит, $z_0(\cdot, T_0) = 0$ (см. (14)).

Таким образом, игра (1), (5) завершается из начального положения $z_0(\cdot) \in X_1$ в момент времени T_0 .

Теперь покажем, что $\|w(\cdot, t)\| \leq \rho - \sigma$ на $[0, T]$. Действительно (см. (16)),

$$\|w(\cdot, t)\|^2 \equiv \sum_{i=1}^{\infty} w_i^2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 z_{0i}^2}{(e^{-\lambda_i T_0} - 1)^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 z_{0i}^2}{\lambda_i^2 T_0^2} = T_0^{-2} \|z_0(\cdot)\|^2 = (\rho - \sigma)^2. \quad (17)$$

При выводе (17) мы воспользовались очевидным неравенством $(e^{-\lambda_i T_0} - 1)^2 \geq \lambda_i^2 T_0^2$.

б) Рассматривается игра (1), (6). И здесь положим $u_0(x, t) = v_0(x, t) + w(x, t)$, выбирая далее неизвестную пока функцию $w(x, t)$ удовлетворяющей неравенству $\|w(\cdot, \cdot)\| \leq \rho - \sigma$. Тогда, очевидно, $\|u_0(\cdot, \cdot)\| \leq \rho$.

Аналогично п. а) положим (ср. (16))

$$w_i(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda_i z_{0i}}{e^{-\lambda_i T_0} - 1}, & 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & T_0 < t \leq T, \end{cases} \quad T_0 = T(z_0(\cdot)) = \frac{\|z_0(\cdot)\|^2}{(\rho - \sigma)^2}. \quad (18)$$

И здесь легко убедиться, что все $z_{0i}(T_0) = 0$.

Далее, в силу следствия теоремы Б. Леви [15; с. 286] и (18)

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, \cdot)\|^2 &= \int_0^T \|w(\cdot, t)\|^2 dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T w_i^2(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 z_{0i}^2 T_0}{(e^{-\lambda_i T_0} - 1)^2} \\ &\leq T_0^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} z_{0i}^2 = (\rho - \sigma)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, в игре (1), (6) преследование завершается из произвольного начального положения $z_0(\cdot) \in X_2$ за время $T(z_0(\cdot))$ (см. (18)). Часть 1) теоремы 1 доказана.

2. а) Рассматривается игра (1), (7). Пусть $\rho (> 0)$ и $\sigma (\geq 0)$ – произвольные константы, $z_0(\cdot) (\in X_3)$ – произвольное начальное положение системы (1), $v_0(x, t)$ – произвольное управление второго игрока, $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$.

Так как $z_0(\cdot) \in X_3$, то (см. (11))

$$z_0(\cdot) = z_{0i} \psi_i(x), \quad 0 < z_{0i}^2 < \frac{(\rho - \sigma \sqrt{T_0})^2 e_i^2(T_0)}{T_0}, \quad (19)$$

при некоторых $i = k$ и $T_0 \in (0, T]$, $\rho > \sigma \sqrt{T_0}$.

Далее, так как $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$ на $[0, T]$, то

$$\|v_0(\cdot, \cdot)\|_{T_0}^2 \equiv \int_0^{T_0} \|v(\cdot, t)\|^2 dt \leq \sigma^2 T_0.$$

Поэтому, если положить $u_0(x, t) = v_0(x, t) + w(x, t)$ на $\Omega \times [0, T_0]$, $u_0(x, t) = 0$ на $\Omega \times (T_0, T]$ и считать $\|w(\cdot, \cdot)\| \leq \rho - \sigma \sqrt{T_0}$, то видно, что $\|u_0(\cdot, \cdot)\|^2 \leq \rho^2$.

Учитывая это замечание, рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i - w_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

считая $z_i(0) = 0$ при $i \neq k$ и $z_k(0) = z_{0k}$. В (20) положим $w_i(t) \equiv 0$ для всех $i \neq k$, а $w_k(t)$, $0 \leq t \leq T$, выберем в виде

$$w_k(t) = \begin{cases} -\frac{\lambda_k z_{0k}}{e^{-\lambda_k T_0} - 1}, & 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & T_0 < t \leq T. \end{cases} \quad (21)$$

Легко убедиться, что при предложенном выше способе управления все $z_{0i}(T_0) = 0$.

Значит, игра (1), (7) завершается в момент времени $t = T_0$ ($\leq T$) из произвольного начального положения $z_0(\cdot) \in X_3$. Кроме того (см. (19), (21)),

$$\|w(\cdot, \cdot)\|^2 = \int_0^T w_k^2(t) dt = \int_0^{T_0} w_k^2(t) dt = \frac{\lambda_k^2 z_{0k}^2}{(e^{-\lambda_k T_0} - 1)^2} \leq (\rho - \sigma \sqrt{T_0})^2.$$

б) В этом подпункте будем изучать игру (1), (8). Пусть ε – произвольное положительное число, $v_0(x, t)$ – произвольная управляющая функция, $\|v_0(\cdot, \cdot)\| \leq \sigma$, $z_0(\cdot) (\in X_4)$ – произвольное начальное положение системы (1), $\|z_0(\cdot)\| > \varepsilon$.

Функцию $u_0(x, t)$ выберем следующим образом (ср. (16), (18), (21)):

$$u_i(t) = -\frac{\lambda_i z_{0i}}{e^{-\lambda_i T_1} - 1}, \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad T_1 = T(z_0(\cdot)) = \frac{\|z_0(\cdot)\|}{\rho}. \quad (22)$$

Тогда для произвольного i решение $z_{0i}(t)$, $0 \leq t \leq T_1$, задачи

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i - u_i(t) + v_i(t), \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad z_i(0) = z_{0i},$$

выражается так:

$$z_{0i}(t) = e^{\lambda_i t} \left[z_{0i} - \int_0^t e^{-\lambda_i s} u_i(s) ds + \int_0^t e^{-\lambda_i s} v_i(s) ds \right], \quad z_{0i} - \int_0^{T_1} e^{-\lambda_i s} u_i(s) ds = 0. \quad (23)$$

Следовательно (см. (23)),

$$z_{0i}(T_1) = e^{\lambda_i T_1} \int_0^{T_1} e^{-\lambda_i s} v_i(s) ds.$$

Возможны два случая:

- 1) $\|z_0(\cdot, T_1)\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} z_{0i}^2(T_1) \leq \varepsilon^2$;
- 2) $\|z_0(\cdot, T_1)\|^2 > \varepsilon^2$.

В случае 1) игра (1), (8) завершается из данного начального положения в момент времени T_1 . Заметим, что $T_1 \leq T$ (см. (12)).

Пусть теперь реализуется случай 2). Тогда, считая $z_0(\cdot) = z_0(\cdot, T_1)$, применим предыдущие рассуждения, т.е. положим

$$u_i(t) = -\frac{\lambda_i z_{0i}(T_1)}{e^{-\lambda_i T_2} - 1}, \quad 0 \leq t \leq T_2, \quad i = 1, 2, \dots, \quad T_2 = T(z_0(\cdot, T_1)) = \frac{\|z_0(\cdot, T_1)\|}{\rho} \quad (24)$$

и получим, что

$$z_{0i}(T_1 + T_2) = e^{\lambda_i T_2} \int_0^{T_2} e^{-\lambda_i s} v_i(T_1 + s) ds.$$

И здесь возможны два случая:

- 1) $\|z_0(\cdot, T_1 + T_2)\|^2 \leq \varepsilon^2$;
- 2) $\|z_0(\cdot, T_1 + T_2)\|^2 > \varepsilon^2$.

В случае 1) игра (1), (8) завершается из начального положения $z_0(\cdot, T_1)$ в момент времени $T_1 + T_2$. В случае 2), считая $z_0(\cdot) = z_0(\cdot, T_1 + T_2)$, применяем предыдущие рассуждения и т.д.

Покажем, что через конечное число шагов игра (1), (8) завершится из начального положения $z_0(\cdot)$.

Действительно, на первом шаге в силу неравенства Коши–Буняковского из (23) получаем

$$|z_{0i}(T_1)| \leq \int_0^{T_1} e^{\lambda_i(T_1-s)} |v_i(s)| ds \leq f_i(T_1) \sqrt{\int_0^{T_1} v_i^2(s) ds} \leq \frac{1}{\sqrt{2|\lambda_1|}} \sqrt{\int_0^{T_1} v_i^2(s) ds},$$

ибо $|\lambda_i| \geq |\lambda_1|$ для всех i . Значит,

$$\|z_0(\cdot, T_1)\|^2 \leq \frac{1}{2|\lambda_1|} \int_0^{T_1} \left[\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(s) \right] ds = \frac{1}{2|\lambda_1|} \int_0^{T_1} \|v_0(\cdot, s)\|^2 ds \equiv \frac{1}{2|\lambda_1|} \sigma_1^2.$$

Но по предположению $\|z_0(\cdot, T_1)\|^2 > \varepsilon^2$. Поэтому $\sigma_1^2 > 2|\lambda_1|\varepsilon^2$. Ясно, что и

$$\sigma_2^2 \equiv \int_{T_1}^{T_1+T_2} \|v_0(\cdot, s)\|^2 ds > 2|\lambda_1|\varepsilon^2.$$

Утверждается, что если положить

$$k = \left\lceil \frac{\sigma^2}{2|\lambda_1|\varepsilon^2} \right\rceil + 2, \quad (25)$$

то игра (1), (8) завершится из начального положения до $(k+1)$ -го шага. Если это не так, то она не завершается до момента времени $T(z_0(\cdot)) = T_1 + T_2 + \dots + T_k$, где

$$T_j = \frac{\|z_0(\cdot, T_1 + \dots + T_{j-1})\|}{\rho}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad T_0 = 0, \quad z_0(\cdot, 0) = z_0(\cdot).$$

С другой стороны, имеем (см. выше)

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{k-1}^2 &> 2|\lambda_1|\varepsilon^2 + \dots + 2|\lambda_1|\varepsilon^2 = 2|\lambda_1|\varepsilon^2(k-1) \\ &\geq 2|\lambda_1|\varepsilon^2 \left(1 + \left\lceil \frac{\sigma^2}{2|\lambda_1|\varepsilon^2} \right\rceil \right) > 2|\lambda_1|\varepsilon^2 \frac{\sigma^2}{2|\lambda_1|\varepsilon^2} = \sigma^2, \end{aligned}$$

что противоречит очевидному неравенству $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{k-1}^2 \leq \sigma^2$.

Следовательно, игра (1), (8) завершится из начального положения $z_0(\cdot) \in X_4$ до $(k+1)$ -го шага, т.е. время преследования $T(z_0(\cdot))$ можно считать равным $T_1 + T_2 + \dots + T_k$. Это время можно оценить:

$$T(z_0(\cdot)) = T_1 + T_2 + \dots + T_k = \frac{\|z_0(\cdot)\|}{\rho} + \frac{\|z_0(\cdot, T_1)\|}{\rho} + \dots + \frac{\|z_0(\cdot, T_1 + \dots + T_{k-1})\|}{\rho}.$$

Но, как показано выше,

$$\|z_0(\cdot, T_1)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2|\lambda_1|}} \sigma_1, \quad \dots, \quad \|z_0(\cdot, T_1 + \dots + T_{k-1})\| \leq \frac{1}{\sqrt{2|\lambda_1|}} \sigma_{k-1}.$$

Значит (см. (25)),

$$\begin{aligned} T(z_0(\cdot)) &\leq \frac{1}{\rho} \left[\|z_0(\cdot)\| + \frac{1}{\sqrt{2|\lambda_1|}} (\sigma_1 + \dots + \sigma_{k-1}) \right] \\ &\leq \frac{1}{\rho} \left[\|z_0(\cdot)\| + \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{2|\lambda_1|}} \sigma \right] \leq \frac{1}{\rho} \left[\|z_0(\cdot)\| + \frac{\sigma}{\sqrt{2|\lambda_1|}} \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2|\lambda_1|}} \right) \right], \end{aligned}$$

т.е. время преследования $T(z_0(\cdot)) \in [0, T]$ (см. (12)). Часть 2) теоремы 1 доказана.

3. В этом пункте установим справедливость части 3) теоремы 1.

а) Рассматривается игра (1), (5). Пусть ρ и σ – произвольные неотрицательные константы, $z_0(\cdot) \in Y_1$, $u_0(x, t)$ – произвольное управление первого игрока, $\|u_0(\cdot, t)\| \leq \rho$.

Так как $z_0(\cdot) \in Y_1$, то $|z_{0i}| > |\rho - \sigma| e_i(T)$ при некотором $i = j$ (см. (9)). Допустим, что $z_{0j} > 0$ (в случае, когда $z_{0j} < 0$, рассуждения проводятся аналогично). Положим $v_i(t) \equiv 0$ для всех $i \neq j$, а $v_j(t) \equiv \sigma$. Тогда для решения $z_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq T$, задачи

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j - u_j(t) + v_j(t), \quad z_j(0) = z_{0j},$$

имеем

$$\begin{aligned} z_{0j}(t) &= e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} + \sigma e_j(t) - \int_0^t e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds \right] \geq e^{\lambda_j t} [z_{0j} + \sigma e_j(t) - \rho e_j(t)] \\ &= e^{\lambda_j t} [z_{0j} - (\rho - \sigma) e_j(t)] \geq e^{\lambda_j t} [z_{0j} - |\rho - \sigma| e_j(T)] > 0, \end{aligned}$$

так как $(\rho - \sigma) \leq |\rho - \sigma|$, $e_j(t) \leq e_j(T)$. Значит, ни из какого начального положения $z_0(\cdot) \in Y_1$ игра (1), (5) не завершится на отрезке $[0, T]$.

б) Рассматривается игра (1), (6). Пусть $z_0(\cdot) \in Y_2$, $\sigma = 0$ (случай, когда $\sigma > 0$ см. ниже), $u_0(x, t)$ – произвольное управление, $\|u_0(\cdot, \cdot)\| \leq \rho$.

Имеем $|z_{0i}| > \rho e_i(T)$ при некотором $i = j$. Для решения $z_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq T$, задачи

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j - u_j(t), \quad z_j(0) = z_{0j},$$

имеем

$$|z_{0j}(t)| \geq e^{\lambda_j t} \left[|z_{0j}| - \int_0^t e^{-\lambda_j s} |u_j(s)| ds \right] \geq e^{\lambda_j t} [|z_{0j}| - \rho e_j(T)] > 0.$$

Значит, игра (1), (6) из начального положения $z_0(\cdot) \in Y_2$ при $\sigma = 0$ не завершится на $[0, T]$.

Пусть теперь $z_0(\cdot) \in Y_2$, $\sigma > 0$. Имеем

$$|z_{0j}| > \frac{\rho^2 f_j(T)}{4\sigma}.$$

Учитывая это неравенство, функцию $v_0(x, t)$ выбираем следующим образом. Положим $v_i(t) \equiv 0$ при всех $i \neq j$, а

$$v_j(t) = \frac{\sigma \operatorname{sgn} z_{0j}}{f_j(T)} e^{-\lambda_j t}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

(Ясно, что $\|v(\cdot, \cdot)\| \leq \sigma$.)

Тогда для решения $z_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq T$, задачи

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j - u_j(t) + \frac{\sigma}{f_j(T)} e^{-\lambda_j t}, \quad z_j(0) = z_{0j},$$

имеем (считаем $z_{0j} > 0$)

$$z_{0j}(t) = e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} + \frac{\sigma}{f_j(T)} f_j^2(t) - \int_0^t e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds \right] \geq e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} + \frac{\sigma}{f_j(T)} f_j^2(t) - \rho f_j(t) \right] \quad (26)$$

Так как $z_{0j} > \rho^2 f_j(T)/(4\sigma)$, то квадратный трехчлен

$$z_{0j} + \frac{\sigma}{f_1(T)} \eta^2 - \rho \eta > 0$$

для любого η . Элементарные вычисления показывают, что его минимальное значение равно $z_{0j} - \rho^2 f_j(T)/(4\sigma)$. Поэтому (см. (26))

$$z_{0j}(t) \geq e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} - \frac{\rho^2 f_j(T)}{4\sigma} \right] > 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Следовательно, ни из какой начальной точки $z_0(\cdot) \in Y_2$ игра (1), (6) не завершится на отрезке $[0, T]$.

в) Пусть в игре (1), (7) константы ρ и σ неотрицательные, $z_0(\cdot) \in Y_3$, $u = u_0(x, t)$ – произвольное управление, $\|u_0(\cdot, \cdot)\| \leq \rho$. Из определения Y_3 (см. (11)) следует, что $z_0(\cdot) \in Y^{(i)}$ при некотором $i = j$. Значит, $z_{0j}^2 > \rho^2 f_j^2(T)$. Пусть для определенности $z_{0j} > \rho f_j(T)$.

Учитывая последнее неравенство, положим $v_i(t) \equiv 0$ для всех $i \neq j$, а $v_j(t) \equiv \sigma$. Тогда для решения $z_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq T$, задачи

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j - u_j(t) + \sigma, \quad 0 \leq t \leq T, \quad z_j(0) = z_{0j},$$

имеем

$$z_{0j}(t) = e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} + \sigma e_j(t) - \int_0^t e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds \right], \quad (27)$$

откуда в силу неравенства

$$\int_0^t e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds \leq \rho f_j(t)$$

получим (см. (27))

$$z_{0j}(t) \geq e^{\lambda_j t} [z_{0j} - \rho f_j(t) + \sigma e_j(t)] \geq e^{\lambda_j t} [z_{0j} - \rho f_j(T) + \sigma e_j(t)] > e^{\lambda_j t} \sigma e_j(t).$$

Следовательно, игра (1), (7) ни из какого начального положения $z_0(\cdot) \in Y_3$ не завершится на отрезке $[0, T]$.

г) В этом подпункте изучается игра (1), (8). Пусть $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $u_0(x, t)$ – произвольное управление, $\|u_0(\cdot, t)\| \leq \rho$, $z_0(\cdot)$ – произвольная точка множества Y_4 .

В силу определения множества Y_4 (см. (12)) при некотором $i = j$ верно неравенство

$$|z_{0i}| > \left| \rho - \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \right| e_i(T).$$

Пусть

$$z_{0j} > \left| \rho - \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \right| e_j(T).$$

Положим $v_i(t) \equiv 0$ для всех $i \neq j$, а $v_j(t) \equiv \sigma/\sqrt{T}$. Тогда для решения $z_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq T$, задачи

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j - u_j(t) + \frac{\sigma}{\sqrt{T}}, \quad z_j(0) = z_{0j},$$

имеем

$$\begin{aligned} z_{0j}(t) &= e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} e_j(t) - \int_0^t e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds \right] \\ &\geq e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} + \frac{\sigma}{\sqrt{T}} e_j(t) - \rho e_j(t) \right] \geq e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} - \left| \rho - \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \right| e_j(T) \right]. \end{aligned}$$

Далее, легко убедиться, что $\|v_0(\cdot, \cdot)\| \leq \sigma$.

Таким образом, в игре (1), (8) завершение преследования на отрезке $[0, T]$ невозможно ни из какого начального положения $z_0(\cdot) \in Y_4$. Теорема 1 доказана полностью.

4. а) Рассматривается игра (1), (5). Пусть $\sigma \geq \rho$, $u_0(x, t)$ – произвольное управление первого игрока, $\|u_0(\cdot, t)\| \leq \rho$, $z_0(\cdot)$ – произвольное начальное положение системы (1), $z_0(\cdot) \neq 0$.

Функцию $v_0(x, t)$, удовлетворяющую неравенству $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$ и позволяющую уклониться системе (1), построим следующим образом.

Так как $z_0(\cdot) \neq 0$, имеем $z_{0i} \neq 0$ при некотором $i = j$. Учитывая это замечание, положим $v_i(t) \equiv 0$ для всех $i \neq j$, а $v_j(t) = \sigma \operatorname{sgn} z_{0j}$ на $[0, T]$. (Ясно, что $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$.)

Тогда для решения $z_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq T$, задачи

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j - u_j(t) + \sigma \operatorname{sgn} z_{0j}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad z_j(0) = z_{0j},$$

имеем (ниже для определенности $z_{0j} > 0$)

$$z_{0j}(t) = e^{\lambda_j t} \left[z_{0j} + \sigma e_j(t) - \int_0^t e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds \right] \geq e^{\lambda_j t} [z_{0j} + (\sigma - \rho) e_j(t)],$$

так как, очевидно, $|u_j(t)| \leq \rho$.

Но по условию $\sigma \geq \rho$. Поэтому для всех $t \in [0, T]$

$$z_{0j} \geq e^{\lambda_j t} z_{0j}, \quad (28)$$

откуда вытекает возможность уклонения от встречи в игре (1), (5) из начального состояния $z_0(\cdot)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как видно из способа выбора функций $v_i(t)$, $0 \leq t \leq T$, при нахождении каждого значения $v(u, x, t)$ значения функции $u_0(x, t)$ не использованы, т.е. $v(u, x, t)$ от u не зависит.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из неравенства (27) можно вывести оценку $\|z_0(\cdot, t)\| \geq e^{\lambda_j t} |z_{0j}|$, $0 \leq t \leq T$.

б) В этом подпункте изучается игра (1), (6). Пусть $\sigma \geq \rho$, $u_0(x, t)$ – произвольное управление первого игрока, $\|u_0(\cdot, t)\| \leq \rho$, $z_0(\cdot)$ – произвольное начальное положение системы (1), $z_0(\cdot) \neq 0$.

Как и выше, в п. а), выберем ненулевой коэффициент z_{0j} в разложении функции $z_0(x)$ в ряд Фурье.

Нетрудно убедиться в существовании константы $\delta = \delta(z_0(\cdot)) \in (0, T]$, для которой $v_j(t) = 0$ на $[0, \delta]$, а $u_j(t)$, $0 \leq t \leq T$, – произвольная суммируемая с квадратом измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T u_j^2(t) dt \leq \rho^2, \quad (29)$$

решение $z_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq \delta$, задачи

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j - u_j(t), \quad z_j(0) = z_{0j},$$

удовлетворяет неравенству $z_{0j}(t) \geq z_{0j}/2$ на $[0, \delta]$ (считаем $z_{0j} > 0$).

Учитывая отмеченный факт, положим $v_j(t) \equiv 0$ для всех $i \neq j$, а $v_j(t) = u_j(t - \delta)$ при всех $t \in [\delta, T]$. Ясно, что $\|v_0(\cdot, \cdot)\| \leq \sigma$.

Теперь покажем, что, уменьшив δ , если это необходимо, можно добиться, чтобы решение $z_{0j}(t)$, $\delta \leq t \leq T$, задачи

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j - u_j(t) + v_j(t), \quad \delta \leq t \leq T, \quad z_j(0) = z_{0j}(\delta),$$

не обращалось в 0.

Действительно, пусть $t \in [\delta, T]$. Тогда

$$z_{0j} + \int_0^t e^{-\lambda_j s} [v_j(s) - u_j(s)] ds = z_{0j} - \int_0^t e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds + \int_\delta^t e^{-\lambda_j s} u_j(s - \delta) ds. \quad (30)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_\delta^t e^{-\lambda_j s} u_j(s - \delta) ds &= \int_\delta^t [e^{-\lambda_j s} - e^{-\lambda_j (s - \delta)}] u_j(s - \delta) ds \\ &\quad + \int_\delta^t e^{-\lambda_j (s - \delta)} u_j(s - \delta) ds, \\ \int_\delta^t e^{-\lambda_j (s - \delta)} u_j(s - \delta) ds &= \int_0^{t - \delta} e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds. \end{aligned} \quad (31)$$

Поэтому (см. (30))

$$\begin{aligned} z_{0j} + \int_0^t e^{-\lambda_j s} [v_j(s) - u_j(s)] ds &= z_{0j} - \int_{t-\delta}^t e^{-\lambda_j s} u_j(s) ds \\ &\quad + \int_{\delta}^t [e^{-\lambda_j s} - e^{-\lambda_j(s-\delta)}] u_j(s-\delta) ds. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) следует, что для любого $t \in [\delta, T]$

$$\begin{aligned} z_{0j} + \int_0^t e^{-\lambda_j s} [v_j(s) - u_j(s)] ds &\geq z_{0j} - \int_{t-\delta}^t e^{-\lambda_j s} |u_j(s)| ds \\ &\quad - \int_{\delta}^t |e^{-\lambda_j s} - e^{-\lambda_j(s-\delta)}| \cdot |u_j(s-\delta)| ds. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя формулу о конечных приращениях для функции $e^{-\lambda_j t}$, $0 \leq t \leq T$, неравенство Коши–Буняковского и неравенство (33), можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \int_{t-\delta}^t e^{-\lambda_j s} |u_j(s)| ds &\leq e^{-\lambda_j T} \sqrt{\delta} \rho, \\ \int_{\delta}^t |e^{-\lambda_j s} - e^{-\lambda_j(s-\delta)}| \cdot |u_j(s-\delta)| ds &\leq e^{-\lambda_j T} (-\lambda_j) \delta \sqrt{T} \rho. \end{aligned} \quad (34)$$

Следовательно (см. (33), (34)), выбрав $\delta \in (0, T]$ достаточно малым, можно добиться выполнения неравенства

$$z_{0j} + \int_0^t e^{-\lambda_j s} [v_j(s) - u_j(s)] ds \geq \frac{z_{0j}}{2} \quad (35)$$

для всех $t \in [\delta, T]$.

Значит, при предложенном выше способе управления параметром v для всех $t \in [0, T]$ имеет место неравенство (см. (35))

$$|z_{0j}(t)| \geq e^{\lambda_j t} \frac{z_{0j}}{2}. \quad (36)$$

Из последнего неравенства вытекает, что в игре (1), (6) возможно уклонение от встречи из начального положения $z_0(\cdot)$, $z_0(\cdot) \neq 0$.

Теорема 2 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из неравенства (36) можно вывести оценку

$$\|z_0(\cdot, t)\| \geq e^{\lambda_j t} \frac{|z_{0j}|}{2}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Разумеется, если положить $v(u, x, t) = u$, то, очевидно, $z_0(\cdot, t) \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$. Однако в наших рассуждениях при построении $v_0(x, t)$ мы использовали $u_0(x, t - \delta)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [2] Ф. Л. Черноусько, “Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **56**:5 (1992), 810–829.
- [3] J.-L. Lions, “Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems”, *SIAM Rev.*, **30**:1 (1988), 1–68.
- [4] Ф. П. Васильев, “О двойственности в линейных задачах контроля и наблюдения”, *Дифференц. уравнения*, **31**:11 (1995), 1893–1900.
- [5] А. Г. Бутковский, *Методы управления распределенными системами*, Наука, М., 1975.
- [6] Ю. С. Осипов, “К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами”, *Докл. АН СССР*, **223**:6 (1975), 1314–1317.
- [7] Ю. С. Осипов, “Позиционное управление в параболических системах”, *ПММ*, **41**:2 (1977), 195–201.
- [8] Ю. С. Осипов, Л. Пандольфи, В. И. Максимов, “Задача робастного граничного управления: случай краевых условий Дирихле”, *Докл. РАН*, **374**:3 (2000), 310–312.
- [9] В. А. Ильин, “Граничное управление процессом колебаний струны на одном ее конце при закреплённом втором конце и при условии существования конечной энергии”, *Докл. РАН*, **378**:6 (2001), 743–747.
- [10] М. Тухтасинов, “О некоторых задачах теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **59**:6 (1995), 979–984.
- [11] Г. Ибрагимов, “Об одной задаче оптимального преследования в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **66**:5 (2002), 753–759.
- [12] Н. Ю. Сатимов, “О задаче уклонения от встречи в распределенных управляемых системах”, *Тр. международной конференции “Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы”*, **2**, Стерлитамак, 2003, 180–184.
- [13] Н. Ю. Сатимов, “Об одной задаче убегания в распределенных системах”, *Тр. международной конференции “Современные проблемы математической физики и информационных технологий”*, **2**, Ташкент, 2003, 240–244.
- [14] Н. Ю. Сатимов, Б. Б. Рихсиев, *Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления*, ФАН, Ташкент, 2000.
- [15] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов

Национальный университет Узбекистана

E-mail: mumin51@mail.ru

Поступило

03.06.2005