Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Струнков, О слабо коспектральных графах II, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 627–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2855>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:23:04

УДК 519.1

О СЛАБО КОСПЕКТРАЛЬНЫХ ГРАФАХ II

С. П. Струнков

Доказывается конечность любого множества попарно неизоморфных сильно связных слабо коспектральных псевдоорграфов, множество индексов нильпотентности которых конечно.

Библиография: 5 названий.

Псевдографы или псевдоорграфы G_1 и G_2 [1] называются *слабо коспектральными*, если множества всех попарно различных характеристических чисел их матриц смежности M_{G_1} и M_{G_2} совпадают [2], [3]. Автором доказано в [3; следствие теоремы 1], что любое множество попарно неизоморфных слабо коспектральных связных псевдографов конечно. Для псевдоорграфов ситуация оказалась иной. В [3] в частности показано, что для любого даже сильно связного регулярного валентности $v \geq 2$ орграфа G с вырожденной матрицей смежности M_G существует бесконечное множество попарно неизоморфных сильно связных регулярных орграфов, слабо коспектральных с G . Остается открытым вопрос, обладает ли этим свойством произвольный нетривиальный сильно связный псевдоорграф с невырожденной матрицей смежности.

Индексом нильпотентности псевдоорграфа G (и его матрицы смежности M_G) будем называть индекс нильпотентности матрицы N , участвующей в представлении жордановой формы $J(M_G) = D + N$ матрицы M_G в виде суммы диагональной матрицы D и нильпотентной N , т.е. наименьшее натуральное число μ такое, что $N^\mu = 0$. Оказывается, что ограничения на абсолютные значения характеристических чисел, число попарно различных среди них и индекс нильпотентности “почти” определяют сильно связный псевдоорграф, как показывает следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть r – произвольное положительное число, k и v – натуральные числа, Σ – некоторое множество попарно неизоморфных сильно связных псевдоорграфов, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) число попарно различных характеристических чисел матрицы смежности M_G каждого псевдоорграфа $G \in \Sigma$ равно k , и при этом абсолютное значение каждого из них не превосходит r ;
- 2) индекс нильпотентности любого псевдоорграфа $G \in \Sigma$ не превосходит v .

Тогда множество Σ конечно.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 05-01-01018, и ГУ-ВШЭ (договор о НИР № 511/10-05).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – множество попарно различных характеристических чисел матрицы $M_G = (a_{ij})$ некоторого сильно связного псевдоорграфа G , имеющего $n > 1$ вершин. Так как матрица смежности M_G сильно связного псевдоорграфа G неразложима [4; п. 5.2.6] и неотрицательна, то в силу теоремы Фробениуса [5; глава 13] можно считать, что число λ_1 – простой вещественный положительный корень характеристического уравнения матрицы M_G и при этом $|\lambda_i| \leq \lambda_1 \leq r$ для $i = 2, \dots, k$. Это число λ_1 называется максимальным. Обозначим через m степень минимального многочлена рассматриваемой матрицы M_G . Используя жорданову форму матрицы M_G , легко увидеть, что

$$P(\lambda) = ((\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k))^\nu$$

является аннулирующим многочленом матрицы M_G (т.е. $P(M_G) = 0$). Следовательно, $k^\nu \geq m$.

Так как G – сильно связный псевдоорграф, то для любых индексов $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ найдется такое натуральное число δ , для которого (i, j) -й элемент матрицы M_G^δ отличен от нуля. Минимальное среди всех таких чисел δ для индексов i, j обозначим через δ^{ij} , а максимальное из всех чисел δ^{ij} обозначим через d . Число d называется *диаметром* псевдоорграфа G .

Пусть $p(t) = t^m + \alpha_1 t^{m-1} + \dots + \alpha_m$ – минимальный многочлен матрицы M_G . Если $d \geq m$, то

$$\begin{aligned} M_G^{d-m} p(M_G) &= M_G^{d-m} (M_G^m + \alpha_1 M_G^{m-1} + \dots + \alpha_m E) \\ &= M_G^d + \alpha_1 M_G^{d-1} + \dots + \alpha_m M_G^{d-m} = 0. \end{aligned}$$

Но последнее равенство невозможно, так как (i, j) -й элемент в левой части этого равенства, для которого $\delta^{ij} = d$, не равен нулю. Следовательно, $k^\nu \geq m > d$.

Рассмотрим матрицу

$$B = E + M_G + M_G^2 + \dots + M_G^{k^\nu}.$$

Так как $k^\nu > d$, то все элементы матрицы B являются целыми положительными числами, и поэтому сумма элементов любой строки матрицы B не может быть меньше, чем ее порядок n . Легко показать, что максимальное характеристическое число матрицы B

$$\Lambda_1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_1^{k^\nu},$$

где λ_1 – максимальное характеристическое число матрицы M_G [4; п. 5.5.5]. При этом

$$\Lambda_1 \leq R = 1 + r + r^2 + \dots + r^{k^\nu}.$$

Матрица B содержит строку, сумма s элементов которой удовлетворяет неравенству $s \leq \Lambda_1$ [4; п. 3.1.1]. Следовательно,

$$n \leq s \leq \Lambda_1 \leq R = 1 + r + r^2 + \dots + r^{k^\nu}.$$

Тем самым показано, что множество чисел вершин рассматриваемого множества псевдоорграфов Σ конечно.

Осталось показать, что число псевдоорграфов в рассматриваемом множестве Σ , имеющих заданное число n вершин, конечно. Предположим, что это не так. Тогда

Σ содержит какой-нибудь псевдоорграф G с n вершинами, в матрице смежности $M_G = (a_{ij})$ которого некоторый элемент $a_{pq} \geq 2R^2 + 1$, где $R = 1 + r + r^2 + \dots + r^{k^\nu}$. Так как матрица $M_G \geq 0$ и неразложима, то любое характеристическое число λ' любой ее главной подматрицы удовлетворяет неравенству $|\lambda'| \leq r$ [5; глава 13], [4; п. 5.5.6]. По этой причине все диагональные элементы a_{ii} матрицы M_G удовлетворяют неравенствам $0 \leq a_{ii} \leq r$. По этой же причине любой диагональный элемент b_{ii} матрицы

$$B = (b_{ij}) = E + M_G + M_G^2 + \dots + M_G^{k^\nu}$$

удовлетворяет неравенствам

$$0 < b_{ii} \leq R = 1 + r + r^2 + \dots + r^{k^\nu}.$$

Так как в матрице M_G элемент $a_{pq} \geq 2R^2 + 1$, то этот элемент не является диагональным. Рассмотрим главную подматрицу второго порядка матрицы B

$$B' = \begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{pmatrix}.$$

Пусть λ'_1, λ'_2 – характеристические числа этой подматрицы. Тогда, как отмечалось выше, $|\lambda'_i| \leq R$ для $i = 1, 2$. Следовательно, $|\lambda'_1||\lambda'_2| \leq R^2$. С другой стороны,

$$|\lambda'_1||\lambda'_2| = |b_{pp}b_{qq} - b_{pq}b_{qp}| \geq b_{pq}b_{qp} - b_{pp}b_{qq} \geq 2R^2 + 1 - R^2 = R^2 + 1,$$

так как $B > 0$ и $B \geq M_G$. Тем самым, теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы вытекает следующее обобщение цитированного выше утверждения о конечности любого множества попарно неизоморфных слабо коспектральных связных псевдографов.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть ν – произвольное натуральное число. Тогда любое множество попарно неизоморфных сильно связных слабо коспектральных псевдоорграфов, индекс нильпотентности которых не превосходит ν , конечно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харари Ф., *Теория графов*, Мир, М., 1973.
- [2] Струнков С. П., “О слабо коспектральных графах”, *Докл. РАН*, **379**:3 (2001), 302–304.
- [3] Струнков С. П., “О слабо коспектральных графах”, *Матем. заметки*, **75**:4 (2004), 614–623.
- [4] Маркус М., Минк Х., *Обзор по теории матриц и матричных неравенств*, Наука, М., 1972.
- [5] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, Наука, М., 1966.

С. П. Струнков

Государственный университет – Высшая школа экономики

E-mail: root@ssp.mccme.ru

Поступило

29.11.2005