Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Маршан, О перестановках системы Хаара в двоичных пространствах H и BMO , *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 636–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2857>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:48:11

О ПЕРЕСТАНОВКАХ СИСТЕМЫ ХААРА В ДВОИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ H И BMO

Д. Б. Маршан

Пусть

$$A_0 = \left\{ [0, 1), \left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 1\right), \left[0, \frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, 1\right), \dots \right\}$$

– множество всех открытых справа двоичных полусегментов, $A = A_0 \cup \{[0, 1]\}$ и $\{h_I, I \in A\}$ – система Хаара, занумерованная элементами множества A так: $h_{[0,1]}(t) = 1, t \in [0, 1)$, а для $I \in A_0$ значения функции $h_I(t)$ определены по правилу

$$h_I(t) = \begin{cases} |I|^{-1/2}, & t \in I^+, \\ -|I|^{-1/2}, & t \in I^-, \\ 0, & t \in [0, 1] \setminus I, \end{cases}$$

где I^+ (соответственно I^-) – левая (соответственно правая) половина элемента I , $I^+ \in A_0$, $|I|$ – мера Лебега множества I .

Каждая биекция $\pi: A \rightarrow A$ порождает оператор перестановки системы Хаара:

$$R_\pi f = \sum_{I \in A} f_I h_{\pi(I)}, \quad f_I = \int_0^1 f(t) h_I(t) dt, \quad I \in A.$$

Определим “норму” биекции $\pi: A \rightarrow A$ следующим образом:

$$\|\pi\| = \sup_{I \in A_0} \left(\frac{|\bigcup_{J \subseteq I} \pi(J)|}{|I|} \right)^{1/2}.$$

Пусть H – двоичное пространство Харди:

$$H = \left\{ f \in L[0, 1): \|f\|_H = \int_0^1 f^*(t) dt < \infty \right\}, \quad \text{где } f^*(t) = \sup_{I \in A_0} \frac{|\int_I f(y) dy|}{|I|},$$

BMO – двоичное пространство, сопряженное к H :

$$BMO = \left\{ f \in L^2[0, 1): f_{[0,1]} = 0, \|f\|_{BMO} = \sup_{I \in A_0} \left(\frac{\sum_{J \subseteq I} f_J^2}{|I|} \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: A \rightarrow A$ – произвольная биекция, $\pi([0, 1]) = [0, 1]$. Тогда

$$\|R_\pi\|_{H \rightarrow H} \sim \|R_{\pi^{-1}}\|_{BMO \rightarrow BMO} = \|\pi\|, \quad (1)$$

где ‘ $\sim$ ’ означает эквивалентность норм.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $2 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, и пусть $\pi: A \rightarrow A$ – произвольная биекция. Тогда

$$\|R_\pi\|_{L^q \rightarrow L^q} = \|R_{\pi^{-1}}\|_{L^p \rightarrow L^p} \sim \|\pi\|^{(p-2)/p}. \quad (2)$$

Эта теорема уточняет и обобщает теорему Шиппа из [1], а из следствия следует, как частный случай, теорема Семенова из [2; теорема 2]. Шипп установил в своей теореме из [1] оценку (1) для биекций $\pi: A \rightarrow A$ таких, что $|\pi(I)| = |I|$ для каждого $I \in A$.

При таких же ограничениях на класс перестановок теорема Семенова [2; теорема 2] устанавливает необходимые и достаточные условия ограниченности операторов R_π в пространствах L^p , $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, только при этом автор использует другие обозначения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Сначала докажем неравенство

$$\|R_{\pi}^{-1}\|_{BMO \rightarrow BMO} \leq \|\pi\|. \quad (3)$$

Пусть $S_{\pi}(I)$ – множество, полученное удалением из $\{\pi(J): J \subseteq I\}$ всякого элемента, являющегося подмножеством другого элемента того же множества.

Пусть $\|f\|_{BMO} \leq 1$. Имеем

$$\frac{\sum_{J \subseteq I} f_{\pi(J)}^2}{|I|} \leq \frac{\sum_{J \in S_{\pi}(I)} \sum_{K \subseteq J} f_K^2}{|I|} \leq \frac{\sum_{J \in S_{\pi}(I)} |J|}{|I|} \leq \frac{|\bigcup_{J \subseteq I} \pi(J)|}{|I|}, \quad I \in A.$$

Отсюда следует (3).

Теперь докажем неравенство, обратное к (3). Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем такой элемент $I \in A_0$, что

$$\frac{|\bigcup_{J \subseteq I} \pi(J)|}{|I|} > (\|\pi\| - \varepsilon)^2.$$

Определим функцию $\varphi = \sum_{J \in S_{\pi}(I)} |J|^{1/2} h_J$. Заметим, что $\|\varphi\|_{BMO} = 1$. Имеем

$$\frac{|\sum_{J \subseteq I} \varphi_{\pi(J)}^2|}{|I|} = \frac{\sum_{J \in S_{\pi}(I)} |J|}{|I|} = \frac{|\bigcup_{J \subseteq I} \pi(J)|}{|I|} > (\|\pi\| - \varepsilon)^2.$$

Из этой оценки следует, что

$$\|R_{\pi}^{-1}\|_{BMO \rightarrow BMO} \geq \|R_{\pi^{-1}} \varphi\|_{BMO} > \|\pi\| - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем $\|R_{\pi^{-1}}\|_{BMO \rightarrow BMO} \geq \|\pi\|$. Эта оценка и (3) дают правое равенство в (1). Оператор R_{π}^* , сопряженный к R_{π} , удовлетворяет равенству $R_{\pi}^* = R_{\pi^{-1}}$. Используя сопряжение, получим

$$\|R_{\pi}\|_{H \rightarrow H} \sim \|R_{\pi}^*\|_{BMO \rightarrow BMO} = \|R_{\pi^{-1}}\|_{BMO \rightarrow BMO} = \|\pi\|.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Фиксируем $p \in (2, +\infty)$. Замечаем, что

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left(\sum_{J \in S_{\pi}(I)} |J| \right)^{1/p} = \left| \bigcup_{J \subseteq I} \pi(J) \right|^{1/p}.$$

Имеем

$$\left| \bigcup_{J \subseteq I} \pi(J) \right| = \|R_{\pi^{-1}} \varphi\|_{L^2}^2 \leq |I|^{(p-2)/p} \|R_{\pi^{-1}} \varphi\|_{L^p}^2.$$

Поэтому

$$\|R_{\pi^{-1}}\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq \frac{\|R_{\pi^{-1}} \varphi\|_{L^p}^2}{\|\varphi\|_{L^p}^2} \geq \left(\frac{|\bigcup_{J \subseteq I} \pi(J)|}{|I|} \right)^{(p-2)/(2p)} > (\|\pi\| - \varepsilon)^{(p-2)/p}.$$

В силу произвольности ε получим $\|R_{\pi^{-1}}\|_{L^p \rightarrow L^p} \geq \|\pi\|^{(p-2)/p}$. Эта оценка и оценка

$$\|R_{\pi}\|_{L^q \rightarrow L^q} = \|R_{\pi^{-1}}\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq C_p \|\pi\|^{(p-2)/p},$$

где C_p – постоянная, зависящая только от p (см. интерполяцию между H и L^2 в [1; с. 140]), дают оценку (2). Следствие доказано.

При доказательстве теоремы и следствия мы следовали рассуждениям работы [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] F. Schipp, *Anal. Math.*, **49** (1990), 135–141. [2] Е. М. Семенов, Б. Штекерт, *Anal. Math.*, **7** (1981), 277–295.

Д. Б. Маршан

Абхазский государственный университет,
г. Сухуми

Поступило

20.09.2005

Исправленный вариант

23.03.2006