Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Скориков, Информационный колмогоровский перечень для пересечения соболевских классов, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 4, 638–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:50:16

ИНФОРМАЦИОННЫЙ КОЛМОГОРОВСКИЙ ПОПЕРЕЧНИК ДЛЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СОБОЛЕВСКИХ КЛАССОВ

Е. М. Скориков

В работе вводится понятие информационного колмогоровского поперечника $d_m^n(M, X)$, определяются порядки информационного колмогоровского поперечника $d_m^N(\widetilde{W}_{\bar{p}}^{\alpha}, \widetilde{L}_q)$ классов периодических функций $\widetilde{W}_{\bar{p}}^{\alpha}$ с несколькими ограниченными дробными производными по Вейлю в пространстве L_q при $1 < q \leq \bar{p} < \infty$.

Введенный поперечник естественно возникает в вопросах наилучшего приближения функций, используя не только гладкость функции, но и некоторую априорную информацию о ней.

Везде далее X, Y – банаховы пространства, M – непустое центрально симметричное относительно нуля подмножество X , $\mathcal{B}(X, Y)$ – множество всех линейных ограниченных операторов из X в Y , B_X – замкнутый единичный шар X . Пусть $L_m \subset X$ – подпространство размерности m , $V^n \subset X$ – подпространство коразмерности n , $\dim M$ – размерность M по Менгеру–Урысону, $\text{Comp}_m(X)$ – класс всех компактов из X размерности не выше m , $C(U, V)$ – класс всех непрерывных отображений из U в V .

Величины

$$\begin{aligned} d_m(M, X) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_m \subset X} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L_m} \|x - y\|_X, \\ \lambda_n(M, X) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_n \subset X, A \in \mathcal{B}(X, L_n)} \sup_{x \in M} \|x - Ax\|_X, \\ a_m(M, X) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{N \in \text{Comp}_m(X), \varphi \in C(M, N)} \sup_{x \in M} \|x - \varphi(x)\|_X \end{aligned}$$

называются *колмогоровским*, *линейным*, *александровским поперечниками* множества M соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Информационным колмогоровским поперечником назовем величину

$$d_m^n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{V^n} \sup_{b \in X} d_m(M \cap (V^n + b), X).$$

Пусть

$$\widehat{d}_m^n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{V^n, L_m} \sup_{b \in X} \inf_{a \in X} \sup_{x \in M \cap (V^n + b)} \inf_{y \in L_m} \|x - y - a\|.$$

Отметим, что $d_m^n(M, X) \leq \widehat{d}_m^n(M, X)$.

Через B_p^n обозначается единичный шар в ℓ_p^n .

В работе получен аналог известного неравенства [1]

$$a_m(M, X) \leq d_m(M, X).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M \subset X$ замкнуто, ограничено, выпукло. Тогда

$$a_{n+m}(M, X) \leq \widehat{d}_m^n(M, X) \leq 2d_m^n(M, X) \leq 2\lambda_{n+m}(M, X).$$

Теорема (левая оценка) доказывается с помощью теоремы Майкла о непрерывной селекции из многозначного отображения.

Для вычисления порядков поперечников соболевских классов вычисляется порядок убывания поперечников $d_m^n(B_p^{C(n+m)}, \ell_q^{C(n+m)})$.

Известны следующие результаты:

ТЕОРЕМА 2 [2]. Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $C > 1$. Тогда

$$a_n(B_p^{[Cn]}, \ell_q^{[Cn]}) \asymp n^{1/q-1/p}.$$

ТЕОРЕМА 3 [3]. Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $C > 1$. Тогда

$$\lambda_n(B_p^{[Cn]}, \ell_q^{[Cn]}) \asymp n^{1/q-1/p}.$$

Из теорем 1–3 получаем

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $C > 1$. Тогда

$$d_m^n(B_p^{[C(n+m)]}, \ell_q^{[C(n+m)]}) \asymp (n+m)^{1/q-1/p}$$

с константой, зависящей только от p, q .

Для получения оценок информационного колмогоровского поперечника функциональных классов в пространстве $\tilde{L}_p(\mathbb{T}^n)$ используется стандартная техника дискретизации этой задачи, сформировавшаяся в работах Исмаилова [4], Майорова [5], Кашина [6], Глушкина [7], развитая затем многими авторами. Данная работа опирается на работы [8], [9] из этой тематики.

Условимся далее равенства и неравенства для векторов понимать, как покоординатные. Через $\mathbf{1}, \infty$ будем обозначать n -мерные векторы, состоящие только из единиц и бесконечностей.

Пусть $\mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n$ — n -мерный тор. Обозначим через

$$\tilde{L}_p = \tilde{L}_p(\mathbb{T}^n), \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad 1 \leq p_j < \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

пространство 2π -периодических по каждому аргументу функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_n)$, для которых конечна смешанная норма

$$\|x\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\dots \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right]^{p_n/p_{n-1}} \right\}^{1/p_n}.$$

Для функции $x \in \tilde{L}_p$ с нулевым средним по всем аргументам

$$x(t) = \sum_{k \in \hat{\mathbb{Z}}^n} x_k e^{i(k, t)}, \quad \text{где } \hat{\mathbb{Z}}^n = \left\{ k \in \mathbb{Z}^n : \prod_{j=1}^n k_j \neq 0 \right\}$$

(сходимость ряда понимается в смысле $\tilde{L}_p$ -сходимости) и вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n$ введем формально операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(\alpha)} = \sum_{k \in \hat{\mathbb{Z}}^n} \prod_{j=1}^n (ik_j)^{\alpha_j} x_k e^{i(k, t)}, \quad (ik_j)^{\alpha_j} = |k_j|^{\alpha_j} e^{i(\pi/2)\alpha_j \operatorname{sgn} k_j}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\alpha, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p_j < \infty$, $j = 1, \dots, n$. Классом Соболева

$$\widetilde{W}_p^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x(\cdot) : \|x^{(\alpha)}\|_p \leq 1\}$$

называется множество функций $x(\cdot)$ с нулевым средним по всем аргументам.

Для конечного набора $\bar{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^m\}$, $1 \leq p^r < \infty$, $r = 1, \dots, m$, и $\bar{\alpha} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^m\} \subset \mathbb{R}^n$ определим класс

$$\widetilde{W}_{\bar{\mathbf{p}}}^{\bar{\alpha}} = \bigcap_{r=1}^m \widetilde{W}_{p^r}^{\alpha^r}.$$

Один из первых результатов по вычислению порядков поперечников таких классов получен Галеевым, в частности,

ТЕОРЕМА 5 [10]. Пусть $\mathbf{q}, \mathbf{p}^r, \alpha^r \in \mathbb{R}^n$, $1 < \mathbf{q} \leq \mathbf{p}^r < \infty$, $r = 1, \dots, m$, A – выпуклая оболочка $\{\alpha^1, \dots, \alpha^m\}$. Тогда

$$d_N(\widetilde{W}_{\overline{p}}^{\alpha}, \widetilde{L}_q) \asymp (N \log^l N)^{1/M} \quad \text{при } A \cap \mathring{\mathbb{R}}_+^n \neq \emptyset,$$

где M – значение, а l – размерность множества решений задачи

$$\begin{aligned} (s, 1) &\rightarrow \sup, \\ (s, \alpha^r) &\leq 1, \quad r = 1, \dots, m \end{aligned}$$

(здесь и далее, $\mathring{\mathbb{R}}_+^n$ – положительный открытый октант в $\mathbb{R}^n$).

Основной теоремой работы является

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathbf{q}, \mathbf{p}^r, \alpha^r \in \mathbb{R}^n$, $1 < \mathbf{q} \leq \mathbf{p}^r < \infty$, $r = 1, \dots, m$, A – выпуклая оболочка $\{\alpha^1, \dots, \alpha^m\}$. Тогда

$$d_K^N(\widetilde{W}_{\overline{p}}^{\alpha}, \widetilde{L}_q) \asymp ((N + K) \log^l(N + K))^{1/M} \quad \text{при } A \cap \mathring{\mathbb{R}}_+^n \neq \emptyset,$$

где M – значение, а l – размерность множества решений задачи

$$\begin{aligned} (s, 1) &\rightarrow \sup_{s \in \mathring{\mathbb{R}}_+^n}, \\ (s, \alpha^r) &\leq 1, \quad r = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО оценки сверху немедленно вытекает из теоремы 1 и теоремы 5. Оценка снизу с помощью метода дискретизации сводится к оценке $d_m^n(B_p^{[C(n+m)]}, \ell_q^{[C(n+m)]})$, которая подсчитана в теореме 4.

Автор выражает благодарность И. Г. Царькову, А. С. Кочурову за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Кочуров, *Абсолютные поперечники и копоперечники*, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук, МГУ, М., 1990. [2] М. И. Стесин, *Докл. АН СССР*, **220**:6 (1975), 1278–1281. [3] В. Е. Майоров, *Матем. сб.*, **113**:3 (1980), 437–462. [4] Р. С. Исмагилов, *УМН*, **29**:3 (1974), 161–178. [5] В. Е. Майоров, *УМН*, **30**:6 (1975), 179–180. [6] Б. С. Кашин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 334–351. [7] Е. Д. Глускин, *Матем. сб.*, **120**:2 (1983), 180–189. [8] Э. М. Галеев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 916–934. [9] Динь Зунг, *Тр. семинара им. Петровского*, 1984, № 10, 207–226. [10] Э. М. Галеев, *УМН*, **32**:4 (1977), 251–252.

Е. М. Скориков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: eskorikov_eugene@mail.ru

Поступило

21.04.2006