Общероссийский математический портал

К. Ю. Горбунов, Одно обобщение теоремы Гильберта о базисе, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 508–516

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:50:49

УДК 512.622

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГИЛЬБЕРТА О БАЗИСЕ

К. Ю. Горбунов

Предлагается обобщение геометрической формы теоремы Гильберта о базисе, утверждающее, что для каждого хорошо описываемого (в некотором смысле) семейства многочленов существует такое число C , что для всюду плотного (в некотором смысле) подсемейства P этого семейства и любой точки a если первые C многочленов любой последовательности из P равны нулю в точке a , то и все ее многочлены равны нулю в a .

Библиография: 4 названия.

Геометрическая форма теоремы Гильберта о базисе утверждает, что последовательность вложенных алгебраических многообразий¹ стабилизируется. Иначе говоря, для любой последовательности S многочленов от переменных $x_1, \dots, x_k$ существует такое число C , что для любой точки пространства $a = \langle x_1^*, \dots, x_k^* \rangle$ если первые C многочленов в последовательности S равны нулю в точке a , то и все многочлены из S в этой точке равны нулю (в этом случае будем говорить, что число C *обслуживает* последовательность S). Эта форма является следствием обычной теоремы Гильберта о базисе, а если ограничиться радикальными идеалами (т.е. идеалами, замкнутыми относительно извлечения корней), то эквивалентна ей. Мы будем обобщать эту теорему в направлении, где утверждается существование одного C , обслуживающего целое семейство последовательностей многочленов. Конечно, чтобы обобщение было нетривиальным, семейство должно, во-первых, содержать многочлены сколь угодно большой степени, а во-вторых, не быть семейством многочленов от конечного числа выражений. Учитывая это, дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квазимногочленом* от переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$ будем называть синтаксическое выражение – многочлен от $x_1, x_2, \dots, x_k$ и от выражений $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_k)$, а также от производных – выражений $F'(x_1), \dots, F'(x_k), \dots, F^{(i)}(x_1), \dots, F^{(i)}(x_k), \dots$,² например, $x_2 F(x_1) F'''(x_1) + x_3 F''(x_2) F''(x_2)$.

Пусть дана последовательность $S = q_1, q_2, \dots$ квазимногочленов. Если $p = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$ – многочлен и мы подставим в S всюду вместо $F(x_i)$, $i = 1, \dots, k$,

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-01028.

¹Здесь и далее мы будем понимать под *алгебраическим многообразием* совместное множество нулей конечной системы многочленов в аффинном пространстве над полем действительных или комплексных чисел.

²Обычно *квазимногочленом* называют многочлен от переменных и их экспонент. Мы используем естественное обобщение этого понятия.

многочлен $p(x_i)$ (и соответствующие многочлены вместо производных), то получим последовательность многочленов $S(p) = q_1(p), q_2(p), \dots$. Конечно, мы не можем гарантировать существование одного числа c , которое обслуживает последовательность $S(p)$ при любом многочлене p . Действительно, если $S = F(x), F'(x), F''(x), \dots$, то для $p = x^n$ в точке $x = 0$ первые n членов S равны нулю, а $(n+1)$ -й не равен. Однако следующая теорема утверждает, что существует одно число c , которое обслуживает $S(p)$ для всюду плотного (в некотором смысле) множества многочленов p . Точнее, скажем, что для почти всех многочленов выполнено некоторое свойство P , если для любого достаточно большого n и любых $p_0, \dots, p_n, \varepsilon$ существуют ε_1 и $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n$, где $|\bar{p}_i - p_i| < \varepsilon$, такие, что для любых $\bar{p}_0^*, \dots, \bar{p}_n^*$, где $|\bar{p}_i^* - \bar{p}_i| < \varepsilon_1$, многочлен $\bar{p}_n^* x^n + \dots + \bar{p}_0^*$ удовлетворяет свойству P .

ТЕОРЕМА. Для любой бесконечной последовательности S квазимногочленов от $x_1, x_2, \dots, x_k$ существует такое число c , что для почти всех многочленов p для любой точки $a = \langle x_1^*, \dots, x_k^* \rangle$ либо все многочлены в последовательности $S(p)$ в a равны нулю, либо некоторый многочлен из $S(p)$ с номером не больше c не равен нулю в точке a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем вспомогательную лемму, дающую для любого квазимногочлена q необходимое и достаточное условие того, что если многочлен $q(p)$ равен нулю в точке a , то можно сколь угодно мало сдвинуть (не зависящее от степени p) число коэффициентов многочлена p при младших степенях, чтобы для получившегося многочлена $\bar{p}$ многочлен $q(\bar{p})$ не равнялся 0 в точке a .

ЛЕММА 1. Пусть q – квазимногочлен от $x_1, \dots, x_k$. Тогда существует такое число t , что для любого многочлена $p = p_n x^n + \dots + p_0$ степени $n > t$ и любой точки $a = \langle x_1^*, \dots, x_k^* \rangle$ следующие два утверждения эквивалентны:

- 1) если многочлен $q(p)$ равен нулю в точке a , то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_m$, что $|\bar{p}_i - p_i| < \varepsilon$, $i = 0, \dots, t$, и многочлен $q(\bar{p})$, где $\bar{p} = p_n x^n + \dots + p_{m+1} x^{m+1} + \bar{p}_m x^m + \dots + \bar{p}_0$, не равен нулю в точке a ;
- 2) если подставить в q значения $x_1^*, \dots, x_k^*$, то получится выражение – ненулевой полином от $F(x_i^*), F'(x_i^*), F''(x_i^*), \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ очевидна. Докажем импликацию $2) \Rightarrow 1)$. Назовем *типом точки a* информацию о том, какие из ее координат x_i^* попарно равны. Очевидно, достаточно доказать лемму для точек одного произвольного типа. Отождествив в q выражения $F(x_i)$ и $F(x_j)$, если $x_i^* = x_j^*$, будем считать, что все x_i^* различны.

Возьмем $m \geq \sum_{i=1}^k (\alpha_i + 1)$, где α_i – максимальный порядок производной выражения $F(x_i)$, входящей в q . Зафиксируем значения $F^{(j)}(x_i^*) = \beta_{ij}$, $j = 0, \dots, \alpha_i$, так, чтобы значение q было ненулевым в точке a (по условию 2) это возможно). Из теории интерполяции с кратными узлами (см., например, [1, глава 3, § 6]) известно, что существует многочлен g степени не более m такой, что для всех i и j выполнено равенство $g^{(j)}(x_i^*) = \beta_{ij}$. Отсюда следует, что если в q подставить вместо F многочлен степени m с неопределенными коэффициентами, то получится ненулевой (в точке a) многочлен q_m от этих коэффициентов. Если же подставить вместо F многочлен любой степени $n > m$ с неопределенными коэффициентами, то полученный многочлен q_n будет иметь вид $q_m + \bar{q}$, причем в каждом члене $\bar{q}$ присутствует хотя бы один неопределенный коэффициент p_i , где $i > m$. Таким образом, и в этом случае многочлен q_n ненулевой. Теперь утверждение леммы следует из того геометрически очевидного факта, что ненулевой полином

задает в пространстве алгебраическое многообразие меньшей, чем само пространство, размерности, и всегда можно сдвинуться из его корня на сколь угодно малое расстояние, чтобы сойти с этого многообразия (строгое рассуждение легко провести индукцией по числу переменных). Лемма 1 доказана.

Продemonстрируем на примере основную идею доказательства теоремы.

ПРИМЕР. Пусть последовательность S начинается так: $yx^2, x^3 + z, \dots$, и мы хотим упростить ее второй член, используя информацию о том, что первый член равен нулю. Тогда естественно рассмотреть два случая:

- 1) $y = 0$ – в этом случае второй член упростить не удастся, зато первый член можно заменить на y ;
- 2) $y \neq 0$ – в этом случае второй член можно заменить на z .

Таким образом, вместо одной последовательности возникает две:

$$y = 0, x^3 + z = 0, \dots \quad \text{и} \quad (yx^2 = 0 \ \& \ y \neq 0), z = 0, \dots$$

Эти две последовательности естественно представлять в виде дерева с добавленным (пустым) корнем и двумя ветвями. Тогда перебор возможных случаев (как было выше) соответствует расщеплению одной вершины на несколько.

Перейдем к формальному изложению доказательства.

Напомним, что *типом* точки называется информация о том, какие из ее координат попарно равны. Пусть $t_1, \dots, t_d$ – все возможные типы. Для каждого типа t независимо проведем обработку последовательности S , состоящую в следующем. отождествим равные переменные и соответствующие им выражения $F(x_i), F'(x_i), \dots$, заменив все переменные из класса равных переменных на переменную из этого класса с наименьшим индексом. Получим последовательность S_t .

Будем строить бесконечное (но с конечными степенями вершин) дерево T (представляем его “растущим” вверх), каждая вершина которого помечена конечным числом равенств типа $q = 0$ и неравенств типа $q \neq 0$, где q – ненулевой квазимоночлен (разметка вершины может быть и пустой). Вначале в качестве T возьмем дерево T_t , в котором любая вершина имеет ровно одного “сына” и для каждого i i -я снизу вершина помечена приравненным к нулю i -м членом последовательности S_t . Путь (конечный или бесконечный), начинающийся в корне и идущий все время вверх, будем называть *корневым*. *Компонентами* разметки будем называть переменные $x_1, \dots, x_k$ и выражения $F(x_1), \dots, F(x_k), F'(x_1), \dots, F'(x_k), \dots$.

В конце конструкции дерево T будет удовлетворять следующим четырем *основным свойствам*.

1. Если для некоторого конечного корневого пути γ_1 в T_t и некоторой точки a выполняются все равенства на пути γ_1 , то в T существует корневой путь γ_2 той же длины, на котором удовлетворяется вся разметка (т.е. выполняются и равенства и неравенства) в точке a .
2. Если для некоторого конечного корневого пути γ в T и некоторой точки a удовлетворяется вся разметка на пути γ , то в точке a выполняются все равенства на корневом пути той же длины в T_t .
3. Разметка любой вершины в T либо пуста, либо содержит хотя бы одно равенство.
4. Для любой компоненты на любом бесконечном корневом пути в T есть лишь конечное число вершин, в разметке которых встречается эта компонента.

Упорядочим компоненты разметки так:

$$x_1, \dots, x_k, \quad F(x_1), \dots, F(x_k), \quad F'(x_1), \dots, F'(x_k), \quad \dots$$

Каждую компоненту обрабатываем описанным далее образом. Перед началом обработки очередной компоненты кроме первых трех основных свойств выполнено следующее “промежуточное” свойство.

4*. На любом бесконечном корневом пути в дереве имеется лишь конечное число вершин, разметка которых содержит уже обработанные компоненты или неравенства.

Будем называть *активными* те вершины, в текущей разметке которых не встречается уже обработанных компонент, но встречается обрабатываемая компонента. Опишем ее обработку. Пусть, для примера, обрабатываемая компонента – $F(x_1)$. Будем рассматривать все левые части равенств как полиномы от одной переменной – компоненты $F(x_1)$ с коэффициентами – полиномами от остальных компонент (под *степенью полинома* понимаем максимальную входящую в него степень $F(x_1)$). Обрабатываем лишь активные вершины дерева, причем начинаем с нижних, так что перед обработкой очередной вершины v все активные вершины ниже нее уже обработаны, и в каждой из них все коэффициенты при степенях $F(x_1)$ в равенствах разметки являются левыми частями некоторых неравенств разметки.

Обрабатываем v следующим образом. Если степени всех полиномов, стоящих в левых частях равенств в разметке v , меньше, чем степени всех полиномов в разметке активных вершин на пути от v до корня, то расщепляем вершину v на конечное число вершин с тем же родителем. Каждая из них соответствует одному указанию на то, какие коэффициенты в многочленах из левых частей равенств разметки v равны нулю, а какие не равны (перебираются все случаи). В случае, когда коэффициент равен нулю, это равенство добавляется в разметку образуемой вершины, а из полинома вычеркивается соответствующий член, когда не равен – добавляем в разметку это неравенство. Так, если разметкой v является

$$F(x_2)F^2(x_1) + F(x_3)F(x_1) + 1 = 0,$$

то вместо v будет 8 вершин с разметками

- 1) $F(x_2) \neq 0, F(x_3) \neq 0, 1 \neq 0, F(x_2)F^2(x_1) + F(x_3)F(x_1) + 1 = 0;$
- 2) $F(x_2) = 0, F(x_3) \neq 0, 1 \neq 0, F(x_3)F(x_1) + 1 = 0;$
- 3) $F(x_2) \neq 0, F(x_3) = 0, 1 \neq 0, F(x_2)F^2(x_1) + 1 = 0;$
- 4) $F(x_2) \neq 0, F(x_3) \neq 0, 1 = 0, F(x_2)F^2(x_1) + F(x_3)F(x_1) = 0;$
- 5) $F(x_2) \neq 0, F(x_3) = 0, 1 = 0, F(x_2)F^2(x_1) = 0;$
- 6) $F(x_2) = 0, F(x_3) \neq 0, 1 = 0, F(x_3)F(x_1) = 0;$
- 7) $F(x_2) = 0, F(x_3) = 0, 1 \neq 0, 1 = 0;$
- 8) $F(x_2) = 0, F(x_3) = 0, 1 = 0.$

Выше каждой из этих вершин располагаем копию множества вершин, находившегося выше v . Описанная операция расщепления вершины сохраняет выполненность основного свойства 1 (поскольку рассматриваются все случаи), основного свойства 2 (поскольку из истинности разметки новой вершины следует истинность разметки старой) и основного свойства 3 (поскольку неравенство нулю некоторого коэффициента полинома оставляет этот полином ненулевым).

Теперь рассмотрим случай, когда в некоторой вершине u ниже v стоит равенство с полиномом p_u , а в вершине v – с полиномом p_v , причем n – степень v – не меньше m – (ненулевой) степени p_u (будем считать, что вершина u выбрана так, что m минимально). Для каждого такого p_v совершаем следующие действия. Домножим p_v на $(n - m + 1)$ -ю степень старшего коэффициента p_u , чтобы при делении “уголком” полученного полинома на p_u не возникали дроби. Выполнив это деление, получим равенство $p_m^{n-m+1} p_v = qp_u + r$, где p_m – старший коэффициент p_u , многочлен r – так называемый *псевдоостаток* (или модифицированный остаток), степень r строго меньше степени p_u (отметим, что понятие псевдоостатка использовалось китайским математиком Ву Вень Пунем для алгоритмического доказательства теорем евклидовой геометрии (см., например, [2, гл. 6, § 5]), а также Мучником для нового более простого доказательства теоремы Тарского об элиминации кванторов, см. [3, гл. 3, п. 8]). Например, если

$$p_v = F^2(x_3)F^3(x_1) - F(x_1), \quad p_u = F^3(x_3)F(x_1) - 2,$$

то

$$(F^3(x_3))^3 p_v = (F^8(x_3)F^2(x_1) + 2F^5(x_3)F(x_1) + 4F^2(x_3) - F^6(x_3))p_u + (8F^2(x_3) - 2F^6(x_3)).$$

Поскольку в разметке вершины u стоит неравенство $p_m \neq 0$, имеем $p_v = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$. Если r – ненулевой многочлен, то в разметке вершины v заменяем p_v на r , а если нулевой – убираем из этой разметки равенство $p_v = 0$. При этом сохраняется выполненность основных свойств 1 и 2 (очевидно) и основного свойства 3 (поскольку вершина v активна, а значит в ее разметке нет неравенств). Выполнив все возможные деления и замены делимых на остатки, мы свели ситуацию к уже рассмотренному случаю, после чего проводится описанное ранее расщепление вершины v .

Легко видеть, что после обработки компоненты (т.е. описанной обработки счетного множества вершин) остаются выполненными основные свойства 1, 2 и 3. Выполнено и “промежуточное” свойство 4*, поскольку вдоль корневого пути степени полиномов в равенствах разметки строго убывают, а любое неравенство стоит в разметке вершины лишь вместе с равенством, содержащим ту же компоненту.

При обработке счетного числа компонент вершины фиксированной высоты активны лишь конечное число раз. Поэтому можно говорить о предельном дереве T , в котором, очевидно, выполнены все 4 основных свойства. Из свойства 4 вытекает следующая лемма. Назовем *рангом* вершины v (обозначение: $\text{rang}(v)$) минимальный порядок производных, встречающихся в разметке вершины v , а если в разметке присутствует хотя бы одна переменная x_i (не как аргумент F) или разметка пуста, то считаем ранг равным -1 . Ранг множества вершин M определим как $\text{rang}(M) = \min_{v \in M} \text{rang}(v)$ (считаем, что $\text{rang}(\emptyset) = \infty$). Вершину, из которой есть бесконечный путь вверх по вершинам с пустой разметкой, назовем *крайней* (сама она может иметь непустую разметку).

ЛЕММА 2. Для любых чисел r, h в предельном дереве T существует конечное подмножество вершин M со следующими свойствами:

- 1) $\text{rang}(M) > r$, высота всех вершин из M больше h ;
- 2) существует такое число h_1 , что любой бесконечный корневой путь в T либо пересекает M ровно в одной вершине, либо проходит через крайнюю вершину, лежащую на высоте не больше h_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что существует такая высота $h_1 > h$, что любой бесконечный корневой путь на отрезке между высотами h и h_1 либо проходит через крайнюю вершину, либо через вершину ранга больше r . Действительно, иначе по свойству компактности (лемма Кёнига) существовал бы бесконечный корневой путь, который проходил бы через бесконечное число вершин ограниченного ранга с непустой разметкой, что противоречит основному свойству 4. Таким образом, множество M состоит так: для каждого корневого пути заносим в M первую из его вершин ранга больше r на высотах между h и h_1 (если она есть). Лемма 2 доказана.

Напомним, что для каждого типа точки мы получили свое обработанное дерево. Упорядочим эти деревья произвольным образом: $T_1, T_2, \dots, T_d$. В каждом из T_i построим $k + 1$ конечных множеств вершин (будем называть эти множества *ярусами*) $M_i^1, M_i^2, \dots, M_i^{k+1}$ со следующими свойствами (введем линейный порядок: скажем, что M_i^j *ниже* M_i^l , если либо $i < s$, либо $i = s$ и $j < l$).

1. Для любого яруса M , во-первых, $\text{rang}(M) > 0$, а во-вторых, если ниже есть непустые ярусы, то $\text{rang}(M) > \text{rang}(\overline{M}) + m$, где $\overline{M}$ – ближайший к M снизу непустой ярус, а m – максимальное из тех чисел m , которые по лемме 1 соответствуют многочленам из равенств разметки яруса $\overline{M}$ (присутствие там равенств следует из основного свойства 4).
2. Высоты всех вершин каждого яруса больше всех высот вершин предыдущих ярусов.
3. Существует такое число h , что в каждом T_i любой бесконечный корневой путь либо пересекает все ярусы $M_i^1, \dots, M_i^{k+1}$, причем каждый ровно в одной вершине, либо проходит через крайнюю вершину, лежащую на высоте не больше h .

Очевидно, что, используя лемму 2, можно построить требуемые M_i^j по одному, начиная с самых нижних. Свойство 1 ярусов выражает основную идею наших дальнейших действий: мы собираемся осуществлять сдвиг коэффициентов $p_0, p_1, \dots, p_m$ в F , который бы менял функцию, стоящую в левой части равенства разметки вершины из некоторого яруса, но оставлял бы неизменными все функции из разметки более высоких ярусов.

Зафиксируем степень n больше рангов всех ярусов. Возьмем произвольный многочлен p степени n . В разметках ярусных вершин подставим вместо F полином p (и соответствующие выражения вместо производных). Зафиксируем по одному равенству в разметке каждой ярусной вершины v . Это равенство определяет алгебраическое многообразие (будем обозначать его как $R(v)$) в пространстве переменных $x_1, \dots, x_{k(i)}$ ($k(i) \leq k$ из-за отождествления равных переменных, здесь $v \in T_i$). Если $u \in M_i^j$, $v \in M_i^l$, $j < l$, и v является потомком вершины $u \neq v$ в дереве T_i , то скажем, что многообразие $R(v)$ – *потомок* многообразия $R(u)$.

Будем перебирать ярусы, начиная с самых высоких, и для каждой их вершины v осуществлять сдвиги коэффициентов (текущего) многочлена p так, чтобы многообразие $R(v)$ находилось в как можно более общем положении относительно совокупности своих потомков. Точнее, для каждого пути из v вверх рассматриваем алгебраическое многообразие R , равное пересечению всех потомков многообразия $R(v)$ на этом пути. Из алгебраической геометрии известно (см., например, [4, гл. 1, § 3, теорема 1] или [2, гл. 4, § 6, теорема 2]), что любое многообразие является объединением конечного числа неприводимых (т.е. не представимых в виде объединения двух непустых многообразий)

многообразий, называемых его неприводимыми компонентами. Будем рассматривать неприводимые над полем комплексных чисел компоненты многообразия R , причем лишь такие, которые содержат хотя бы одну точку с попарно различными координатами (напомним, что нас интересуют только точки, у которых все координаты x_i попарно различны, иначе за эти точки “отвечает” другое дерево). Мы хотим сдвинуть коэффициенты p в малой окрестности так, чтобы R осталось неподвижным, а каждая его неприводимая компонента R^* указанного вида пересекалась с многообразием $R(v)$ по многообразию меньшей, чем у R , размерности. Геометрически ясно, что для этого достаточно сдвинуть $R(v)$ с произвольной точки компоненты R^* , причем сдвинуть столь мало, чтобы размерности пересечений других многообразий (из конечного числа) остались меньшими размерностей самих многообразий.

По лемме 1 при достаточно большом n возможен сдвиг из любой точки с попарно различными координатами. Действительно, из их различности и положительности ранга вершины v вытекает выполнение условия 2) леммы 1. Из свойства 1 ярусов следует неподвижность многообразия R и всех многообразий из более высоких ярусов. Эта неподвижность гарантирует, что сдвиг каждый раз можно делать столь малым, чтобы все ранее достигнутые “общие положения” многообразий таковыми и остались. Из алгебраической геометрии известно (см., например, [4, гл. 1, § 6, теорема 1] или [2, гл. 9, § 4, предложение 10]), что если произвольное многообразие X является строгим подмножеством неприводимого многообразия Y , то размерность X строго меньше размерности Y . Поэтому каждый раз, когда мы пересекаем (сдвинутое) текущее многообразие с пересечением его потомков на пути, размерность пересечения уменьшается. Осуществив описанные сдвиги коэффициентов, получим из p многочлен $\bar{p}$.

Возьмем требуемое в формулировке теоремы число s больше числа h из свойства 3 ярусов. Докажем, что это s обслуживает $S(\bar{p})$. Действительно, пусть первые s равенств последовательности S выполняются в точке a типа t . Тогда первые s равенств последовательности S_t выполняются в точке a_t , полученной из a отождествлением равных координат. Пусть типу t соответствует дерево T_i . По основному свойству 1 в T_i есть корневой путь γ длины s с удовлетворяющей в точке a_t разметкой. Для него есть две возможности.

Случай 1. Пусть γ пересекает все ярусы $M_i^1, \dots, M_i^{k+1}$, каждый в одной вершине. Обозначим эти вершины, соответственно, $v_1, \dots, v_{k+1}$. По построению, последовательность размерностей тех неприводимых компонент многообразий

$$R(v_{k+1}), R(v_{k+1}) \cap R(v_k), \dots, R(v_{k+1}) \cap R(v_k) \cap \dots \cap R(v_1),$$

в которых находится точка a_t (с попарно неравными координатами), строго убывает. Поскольку размерность пространства не превышает k , этот случай невозможен.

Случай 2. Пусть γ проходит через крайнюю вершину v . Рассмотрим бесконечный корневой путь $\bar{\gamma}$, совпадающий с γ до v , а дальше идущий по вершинам с пустой разметкой. По основному свойству 2, примененному к произвольному началу пути $\bar{\gamma}$, все равенства последовательности S_t выполняются в точке a_t , а значит все равенства последовательности S выполняются в точке a .

Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что можно добиться, чтобы число s обслуживало не только сам $\bar{p}$, но и некоторую его окрестность. Покажем, как осуществить сколь угодно малый сдвиг произвольных коэффициентов многочлена p , чтобы полученный $\bar{p}$ удовлетворял этому свойству. Для выбранной ранее

степени n подставим в разметку всех деревьев T_i вместо F многочлен степени n с неопределенными коэффициентами. Для каждого дерева и каждого корневого пути, пересекающего все ярусы в этом дереве в вершинах $v_1, \dots, v_k$, напомним формулу Φ_i^γ , утверждающую, что пересечение всех многообразий $R(v_i)$ пусто. Эта формула имеет свободными переменными неопределенные коэффициенты многочлена p . По теореме Тарского об элиминации кванторов (верной как над полем действительных чисел, так и над полем комплексных чисел, см., например, [3, гл. 3, п. 8]) существует эквивалентная ей бескванторная формула. Сдвиг коэффициентов p осуществим так, чтобы все полиномы от коэффициентов во всех полученных бескванторных формулах имели ненулевые значения. Покажем, что при этом все формулы Φ_i^γ станут истинными. Действительно, если бы некоторая формула была ложна, то можно было бы осуществить описанные ранее сколь угодно малые сдвиги коэффициентов (для приведения соответствующих многообразий в общее положение) и формула стала бы истинной. Это противоречит тому, что при малых сдвигах не меняются знаки в полиномах эквивалентной бескванторной формулы. По этой же причине все формулы Φ_i^γ истинны не только для самого многочлена $\bar{p}$, но и для всех многочленов в его малой коэффициентной окрестности, что и требовалось. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что в формулировке теоремы вместо последовательности S можно сразу рассматривать (размеченное равенствами) произвольное дерево S . Тогда утверждение теоремы будет состоять в том, что существует такое c , что для почти всех p для любой точки либо существует бесконечный корневой путь, на котором выполняются все равенства, либо на любом бесконечном корневом пути некоторое равенство на высоте не более c не выполняется. В доказательстве основное свойство 2 следует переформулировать так: если для некоторого конечного корневого пути γ в T и некоторой точки a удовлетворяет вся разметка на пути γ , то существует корневой путь той же длины в T_t , на котором выполняются все равенства в точке a (a именно, прообраз пути γ относительно расщепления вершин). В остальном доказательство аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказанную теорему нетрудно обобщить на случай, когда функция F имеет не один аргумент, а фиксированное конечное число аргументов, а в квазимногочленах допускаются частные производные (например $d^4 F / (\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2 \partial x_3)$; вместо F теперь подставляются многочлены от соответствующего числа переменных). Для удобства можно считать, что производные по переменным всегда берутся в порядке возрастания номеров этих переменных. Единственное существенное усложнение доказательства состоит в том, что в доказательстве леммы 1 вместо упомянутого результата из теории кратной интерполяции следует использовать

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Любой конечный набор условий, т.е. значений функции и ее частных производных в заданных точках, удовлетворяется на полиноме, степень которого зависит только от числа переменных, числа точек и максимального порядка встречающихся в условиях производных.*

Доказать его можно, например, следующим образом.

Назовем условие равенства заданному значению частной производной суммарного порядка i (соответственно, порядка i по переменной x) *условием порядка i* (соответственно, *условием порядка i по переменной x*). (При этом значению самого многочлена соответствует $i = 0$). Линейно упорядочим точки произвольным образом, и частные

производные так, чтобы не убывал порядок. Используя эти упорядочения, линейно упорядочим все условия по точкам, а при равных точках по частным производным. Будем перебирать условия в соответствии с этим упорядочением и строить искомый многочлен по шагам. На i -м шаге добавляем к ранее построенному многочлену q_i такой многочлен p_i , у которого значения производных во всех ранее рассмотренных условиях равны нулю, а значение производной в i -ом условии таково, чтобы это условие выполнялось для $q_i + p_i$.

Пусть i -е условие соответствует точке $a = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, а уже рассмотренные условия – точкам $b_1, \dots, b_m$ и, возможно, a . Многочлен p_i – это некоторое число c , умноженное на произведение степеней двучленов вида $x - t$, где x пробегает все переменные, а t для каждой переменной x_j пробегает попарно различные значения координаты x_j , встретившиеся среди координат точек $b_1, \dots, b_m, a$. Для j -ой координаты точки b_n , не равной a_j , берем степень соответствующего множителя больше порядка всех условий – это обеспечивает равенство нулю производных p_i в условиях, соответствующих этим точкам. Для точки a степень множителя $x_j - a_j$ берем равной порядку i -го условия по переменной x_j . Во-первых, этим обеспечивается для p_i равенство нулю в точке a произвольной производной d в ранее рассмотренных условиях, соответствующих точке a . Действительно, так как порядок d не больше порядка i -го условия, найдется переменная x_j , имеющая порядок в d строго меньше, чем в i -ом условии. Поэтому, в любом произведении двучленов, естественным образом входящем в качестве слагаемого в $d(p_i)$, степень двучлена $x_j - a_j$ ненулевая.

Во-вторых, частная производная p_i в i -ом условии ненулевая. Действительно, в любом ее слагаемом, где хотя бы раз взятие производной по x_j применяется не к соответствующему множителю $x_j - a_j$, этот множитель присутствует в ненулевой степени и обнуляет это слагаемое. В том же единственном слагаемом, где взятие производных всегда применялось к “своим” множителям, остались лишь множители типа $x_j - t$, где $t \neq a_j$. Следовательно, рассматриваемая частная производная не равна нулю в точке a , и за счет выбора числа c ей можно придать любое требуемое значение. Утверждение доказано.

Автор выражает глубокую признательность Ан. А. Мучнику, беседы с которым способствовали существенному улучшению текста, а также Н.К. Верещагину за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
- [2] Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000.
- [3] Верещагин Н. К., Шень А. Х. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2000.
- [4] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1998.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: gorbunov@iitp.ru

Поступило
08.11.2001
Исправленный вариант
10.02.2003