Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Муравник, О задаче Коши для некоторых неоднородных дифференциально-разностных параболических уравнений, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 538–548

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:53:16

УДК 517.944

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Б. Муравник

Доказана теорема существования и единственности классического решения задачи Коши для неоднородного уравнения параболического типа, содержащего сдвиги по пространственным переменным.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Параболические уравнения, содержащие операторы сдвига по пространственным переменным (в том числе абстрактные уравнения в банаховых и гильбертовых пространствах), исследовались ранее в ряде работ (см., например, [1]–[7] и имеющуюся там библиографию). Вопросы единственности решения задачи Коши для указанных уравнений изучались в [8] (см. также имеющуюся там библиографию).

В работе [9] исследовалась задача Коши для дифференциально-разностного параболического уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{k=1}^m a_k u(x - b_k h, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1)$$

где a, b – произвольные параметры из $\mathbb{R}^m$, h – фиксированный вектор единичной длины в $\mathbb{R}^n$.

В настоящей работе мы рассмотрим *неоднородное* уравнение. Будет доказана классическая разрешимость задачи Коши, получено интегральное представление решения и установлены классы единственности. Для этого мы используем фундаментальное решение уравнения (1), найденное в [9].

2. Формулировка теоремы существования. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^m$, h – фиксированный вектор единичной длины в $\mathbb{R}^n$, $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$, $f(x, t)$ и ее первые производные по пространственным переменным непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \sum_{k=1}^m a_k u(x - b_k h, t) = f(x, t). \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке фонда ИНТАС, грант № 00-136 и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00312.

Отметим, что уравнения такого вида встречаются, например, в задачах нелинейной оптики (см. [10] и [11]). Наряду с уравнением (2) рассмотрим начальное условие

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (3)$$

Обозначим через $\mathcal{E}(x, t)$ функцию

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-t(|\xi|^2 - \sum_{k=1}^m a_k \cos(b_k h) \xi)\right) \cos\left(x \cdot \xi - t \sum_{k=1}^m a_k \sin b_k h \cdot \xi\right) d\xi. \quad (4)$$

Теперь определим на $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ следующую функцию:

$$u(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x - y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) f(y, \tau) dy d\tau. \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$, $f(x, t)$ и ее первые производные по пространственным переменным непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Тогда функция, определенная равенством (5), является классическим решением задачи (2), (3).

Доказательству этой теоремы предположим следующую лемму.

ЛЕММА 1. Имеет место сходимость

$$\int_0^\infty \exp\left(-z^2 + t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \cos\left(2z\eta - t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz \xrightarrow{t \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\eta^2}$$

равномерно по $\eta \in \mathbb{R}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что для любого положительного ε существует такое положительное δ , что для любого $t \in (0, \delta)$, для любого вещественного η выполнена оценка

$$\left| \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \cos\left(2z\eta - t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz - \int_0^\infty e^{-z^2} \cos 2z\eta dz \right| < \varepsilon.$$

Итак, пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-z^2} \left[\exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \cos\left(2z\eta - t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - \cos 2z\eta \right] dz \\ &= \int_0^\infty e^{-z^2} \left[\exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \left(\cos 2z\eta \cos\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sin 2z\eta \sin\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \right) - \cos 2z\eta \right] dz. \end{aligned}$$

Выберем δ из $(0, 1]$ настолько малым, что синус монотонен на промежутке

$$\left(-\delta \sum_{k=1}^m |a_k|, \delta \sum_{k=1}^m |a_k|\right)$$

и

$$\sin\left(\delta \sum_{k=1}^m |a_k|\right) < \frac{\varepsilon}{2} \left(\exp\left(t \sum_{k=1}^m |a_k|\right) \int_0^\infty e^{-z^2} dz\right)^{-1} \quad \text{для любого } t \in (-\delta, \delta).$$

Тогда при $t \in (0, \delta)$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty e^{-z^2} \exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \sin 2z\eta \sin\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\exp\left(t \sum_{k=1}^m |a_k|\right) \int_0^\infty e^{-z^2} dz\right)^{-1} \int_0^\infty e^{-z^2} \exp\left(t \sum_{k=1}^m |a_k|\right) dz = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Осталось показать, что это (достаточно малое) δ можно выбрать так, что для любых вещественных z, η при $t \in (0, \delta)$ выполняется еще и следующее неравенство:

$$\left| \cos 2z\eta \right| \exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \cos\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_0^\infty e^{-z^2} dz\right)^{-1}.$$

То есть достаточно показать, что

$$\exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \cos\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +0} 1$$

равномерно по $z \in \mathbb{R}^1$. Имеем

$$\begin{aligned} & \exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \cos\left(t \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1 \\ & = \exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \left[1 - 2 \sin^2\left(\frac{t}{2} \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right] - 1 \\ & = \exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1 - 2 \exp\left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \sin^2\left(\frac{t}{2} \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Выберем t настолько малым, что

$$\sin^2\left(\frac{t}{2} \sum_{k=1}^m |a_k|\right) \leq \frac{\varepsilon}{8} \exp\left(-\sum_{k=1}^m |a_k|\right).$$

В силу монотонности синуса в достаточно малой положительной полуокрестности начала координат

$$2 \sin^2\left(\frac{t}{2} \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \leq \frac{\varepsilon}{4} \exp\left(-\sum_{k=1}^m |a_k|\right)$$

для указанного t . Без ограничения общности можно считать, что выбранное t принадлежит промежутку $(0, 1)$, следовательно, для любого вещественного z

$$2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) \exp \left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Итак, осталось оценить $\exp \left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos(h_k z / \sqrt{t}) \right) - 1$.

Без ограничения общности можно считать, что t настолько мало, что

$$1 - \frac{\varepsilon}{4} < \exp \left(- \sum_{k=1}^m |a_k| t \right) < \exp \left(\sum_{k=1}^m |a_k| t \right) < 1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{\varepsilon}{4} < \exp \left(- \sum_{k=1}^m |a_k| t \right) < \exp \left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) < \exp \left(\sum_{k=1}^m |a_k| t \right) < 1 + \frac{\varepsilon}{4}$$

для любого $z \in \mathbb{R}^1$.

Отсюда

$$\left| \exp \left(t \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

для любого $z \in \mathbb{R}^1$.

3. Доказательство теоремы существования. Введем следующие обозначения:

$$u_1(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x - y, t) u_0(y) dy, \quad u_2(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) f(y, \tau) dy.$$

Как известно из [9], функция $u_1(x, t)$ является классическим решением задачи (1), (3). Поэтому достаточно доказать, что функция $u_2(x, t)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (2) и $u_2|_{t=0} \equiv 0$.

Для доказательства первого из этих утверждений заметим (см. [9]), что $\mathcal{E}(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ и для любого фиксированного t стремится к нулю (вместе со всеми своими производными любого порядка) при $x \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$. Поэтому остается доказать следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$. Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, t_0 - \tau) \mathcal{E}(x_0 - \xi, \tau) d\xi = f(x_0, t_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего введем следующую функцию двух переменных:

$$\mathcal{E}_0(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-t\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^m a_k \cos b_k \xi\right)\right) \cos\left(x\xi - t \sum_{k=1}^m a_k \sin b_k \xi\right) d\xi.$$

Далее, без ограничения общности (поскольку оператор Лапласа инвариантен относительно поворота) можно считать, что вектор h совпадает по направлению с первой координатной осью, т.е. что $h = (1, 0, \dots, 0)$. Это позволяет представить функцию $(2\pi)^n \mathcal{E}(x, t)$ в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(t\left(\sum_{k=1}^m a_k \cos b_k \xi_1 - |\xi|^2\right)\right) \cos\left(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n - t \sum_{k=1}^m a_k \sin b_k \xi_1\right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(t\left(\sum_{k=1}^m a_k \cos b_k \xi_1 - \xi_1^2\right)\right) e^{-t|\xi'|^2} \cos\left(x_1 \xi_1 - t \sum_{k=1}^m a_k \sin b_k \xi_1\right) \\ & \quad \times \cos x' \cdot \xi' d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(t\left(\sum_{k=1}^m a_k \cos b_k \xi_1 - \xi_1^2\right)\right) e^{-t|\xi'|^2} \\ & \quad \times \sin\left(x_1 \xi_1 - t \sum_{k=1}^m a_k \sin b_k \xi_1\right) \sin x' \cdot \xi' d\xi \\ &= \int_{-\infty}^\infty \exp\left(t\left(\sum_{k=1}^m a_k \cos b_k \xi_1 - \xi_1^2\right)\right) \cos\left(x_1 \xi_1 - t \sum_{k=1}^m a_k \sin b_k \xi_1\right) d\xi_1 \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2} \cos x' \cdot \xi' d\xi' - \int_{-\infty}^\infty \exp\left(t\left(\sum_{k=1}^m a_k \cos b_k \xi_1 - \xi_1^2\right)\right) \\ & \quad \times \sin\left(x_1 \xi_1 - t \sum_{k=1}^m a_k \sin b_k \xi_1\right) d\xi_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2} \sin x' \cdot \xi' d\xi' \\ &= 2\pi \mathcal{E}_0(x_1, t) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2} \cos x' \cdot \xi' d\xi'. \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл. Без ограничения общности, а именно, с точностью до поворота координатной системы $\xi_1, \dots, \xi_n$ (якобиан такой замены переменных равен единице), $x' \cdot \xi' = |x| \xi_2$. Поэтому,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2} \cos x' \cdot \xi' d\xi' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2} \cos |x'| \xi_2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\xi_2^2} \cos |x'| \xi_2 d\xi_2 \int_{\mathbb{R}^{n-2}} e^{-t|\xi''|^2} d\xi'' \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-|x'|^2/(4t)} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} e^{-t(\xi_3^2 + \dots + \xi_n^2)} d\xi'' = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{(n-1)/2} e^{-|x'|^2/(4t)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^{n-1}} \mathcal{E}_0(x_1, t) e^{-|x'|^2/(4t)},$$

где $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Переобозначим x_0 через $(y_0, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \stackrel{\text{def}}{=} (y_0, x^0)$ и рассмотрим

$$F(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, t_0 - \tau) \mathcal{E}(x_0 - \xi, \tau) d\xi. \quad (6)$$

Используя полученное выше представление $\mathcal{E}$ через $\mathcal{E}_0$ и замену переменных

$$\frac{y_0 - \xi_1}{2\sqrt{\tau}} = \eta, \quad \frac{x_j^0 - \xi_{j+1}}{2\sqrt{\tau}} = z_j, \quad j = \overline{1, n-1},$$

получаем

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{2}{\pi^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\tau} \mathcal{E}_0(2\sqrt{\tau} \eta, \tau) e^{-|z|^2} \\ &\quad \times f(y_0 - 2\sqrt{\tau} \eta, x_1^0 - 2\sqrt{\tau} z_1, \dots, x_{n-1}^0 - 2\sqrt{\tau} z_{n-1}, t_0 - \tau) d\eta dz \\ &= \frac{2}{\pi^{(n-1)/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{\tau} \mathcal{E}_0(2\sqrt{\tau} \eta, \tau) e^{-|\xi|^2} \\ &\quad \times f(y_0 - 2\sqrt{\tau} \eta, x^0 - 2\sqrt{\tau} \xi, t_0 - \tau) d\xi d\eta \end{aligned}$$

(для удобства возвращаемся к традиционным обозначениям переменных интегрирования),

$$f(x_0, t_0) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\eta^2 - |\xi|^2} f(y_0, x^0, t_0) d\xi d\eta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F(\tau) - f(x_0, t_0) &= \frac{2}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\xi|^2} \left[\pi \sqrt{\tau} \mathcal{E}_0(2\sqrt{\tau} \eta, \tau) \right. \\ &\quad \times f(y_0 - 2\sqrt{\tau} \eta, x^0 - 2\sqrt{\tau} \xi, t_0 - \tau) - \left. \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(y_0, x^0, t_0) e^{-\eta^2} \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \pi \sqrt{\tau} \mathcal{E}_0(2\sqrt{\tau} \eta, \tau) &= \sqrt{\tau} \int_0^\infty \exp\left(-\tau\left(\xi^2 - \sum_{k=1}^m a_k \cos b_k \xi\right)\right) \\ &\quad \times \cos\left(2\sqrt{\tau} \eta \xi - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin b_k \xi\right) d\xi \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \\ &\quad \times \cos\left(2z\eta - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} F(\tau) - f(x_0, t_0) &= \frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\xi|^2} \left[f(y_0 - 2\sqrt{\tau} \eta, x^0 - 2\sqrt{\tau} \xi, t_0 - \tau) \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos\left(2z\eta - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(y_0, x^0, t_0) e^{-\eta^2} \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$A > 0, \quad G_1 = \{(\eta, \xi) \mid \eta \in (-A, A), |\xi| < A\}, \quad G_2 = \mathbb{R}^n \setminus G_1.$$

Тогда $F(\tau) - f(x_0, t_0) = J_1 + J_2$, где

$$J_j = \frac{2}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{G_j} \left[\int_0^\infty f(y_0 - 2\sqrt{\tau}\eta, x^0 - 2\sqrt{\tau}\xi, t_0 - \tau) \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \right. \\ \left. \times \cos\left(2z\eta - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(y_0, x^0, t_0) e^{-\eta^2} \right] e^{-|\xi|^2} d\eta d\xi, \quad j = 1, 2.$$

Сначала оценим интеграл J_2 . Рассмотрим для этого

$$\left| \int_{G_2} f(y_0, x^0, t_0) e^{-|\xi|^2 - \eta^2} d\eta d\xi \right| \leq \sup |f| \int_{|\xi|^2 + \eta^2 \geq A^2} e^{-|\xi|^2 - \eta^2} d\xi d\eta \\ = C_n \sup |f| \int_A^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$$

(в силу сходимости последнего интеграла и ограниченности f).

Для оценки оставшегося слагаемого интеграла J_2 разобьем область интегрирования следующим образом:

$$G_2 = \{\eta > A, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\} \cup \{\eta < -A, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\} \cup \{\eta \in [-A, A], |\xi| \geq A\} \\ \stackrel{\text{def}}{=} G_{2,1} \cup G_{2,2} \cup G_{2,3};$$

соответственно для $j = 1, 2, 3$ обозначим

$$\int_{G_{2,j}} e^{-|\xi|^2} \int_0^\infty f(y_0 - 2\sqrt{\tau}\eta, x^0 - 2\sqrt{\tau}\xi, t_0 - \tau) \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \\ \times \cos\left(2z\eta - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz d\eta d\xi \quad \text{через} \quad \frac{\pi^{(n+1)/2}}{2} J_{2,j}.$$

Тогда

$$J_{2,1} = \frac{2}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{G_{2,1}} e^{-|\xi|^2} u_0(y_0 - 2\sqrt{\tau}\eta, x^0 - 2\sqrt{\tau}\xi, t_0 - \tau) \\ \times \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos 2z\eta \\ \times \cos\left(\tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz d\eta d\xi \\ + \frac{2}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{G_{2,1}} f(y_0 - 2\sqrt{\tau}\eta, x^0 - 2\sqrt{\tau}\xi, t_0 - \tau) \\ \times \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \sin 2z\eta \\ \times \sin\left(\tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz e^{-|\xi|^2} d\eta d\xi \stackrel{\text{def}}{=} J_{2,1,1} + J_{2,1,2}.$$

После двукратного интегрирования по частям

$$\int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos 2z\eta \cos\left(\tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz$$

принимает вид

$$-\frac{1}{4\eta^2} \int_0^\infty \left[\exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos\left(\tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \right]'' \cos 2z\eta dz \quad (7)$$

(с учетом того, что $|\eta| \geq A > 0$ в области $G_{2,1}$).

Считая (без ограничения общности), что $\tau \leq 1$, получаем (при помощи непосредственного дифференцирования), что в (7) абсолютная величина интеграла не превосходит константы, зависящей только от параметров a и b . Отсюда,

$$|J_{2,1,1}| \leq M \sup |f| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\xi|^2} d\xi \int_A^\infty \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{M\pi^{(n-1)/2} \sup |f|}{A}.$$

Аналогично оценивается $J_{2,1,2}$. Отсюда, $|J_{2,1}| \leq 2M\pi^{(n-1)/2} \sup |f|/A$.

Точно так же получаем, что $|J_{2,2}| \leq 2M\pi^{(n-1)/2} \sup |f|/(\pi A)$.

Теперь оценим

$$J_{2,3} = \frac{2}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{|\xi| \geq A} e^{-|\xi|^2} \int_{-A}^A f(y_0 - 2\sqrt{\tau}\eta, x^0 - 2\sqrt{\tau}\xi, t_0 - \tau) \times \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos 2z\eta \cos\left(\tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz d\eta d\xi;$$

при $\tau \in (0, 1]$ имеем

$$\left| \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos 2z\eta \cos\left(\tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz \right| \leq e^\tau \int_0^\infty e^{-z^2} dz \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e.$$

Отсюда

$$|J_{2,3}| \leq \frac{2 \sup |f| e}{\pi^{n/2}} A \int_{|\xi| \geq A} e^{-|\xi|^2} d\xi = \frac{2C_n \sup |f| e}{\pi^{n/2}} A \int_A^\infty r^{n-2} e^{-r^2} dr.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $A \rightarrow \infty$. Действительно,

$$x \int_x^\infty r^{n-2} e^{-r^2} dr = x \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{2}} - \int_0^x r^{n-2} e^{-r^2} dr \right) = \frac{\Gamma(n/2)/\sqrt{2} - \int_0^x r^{n-2} e^{-r^2} dr}{1/x}.$$

Вычисляя

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n/2)/\sqrt{2} - \int_0^x r^{n-2} e^{-r^2} dr}{1/x}$$

по правилу Лопиталья, получаем, что он равен $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x^2} = 0$.

Таким образом, для произвольного положительного ε можно выбрать такое $A \in (0, +\infty)$, что $|J_2| < \varepsilon/2$; зафиксируем такое A и рассмотрим интеграл J_1 .

В силу непрерывности функции f в точке (y_0, x^0, t_0) и леммы 1 можно выбрать положительное τ_0 настолько малым, что для любого τ из $(0, \tau_0)$, для любого (η, ξ) из G_1

$$\left| \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos\left(2z\eta - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz \right. \\ \left. \times f(y_0 - 2\sqrt{\tau}\eta, x^0 - 2\sqrt{\tau}\xi, t_0 - \tau) - f(y_0, x^0, t_0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\eta^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\pi^{(n+1)/2}}{2} \frac{1}{(2A)^n},$$

следовательно, $|J_1| < \varepsilon/2$.

Итак, $u_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2). Теперь докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда $u_2(x_0, t) \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x_0 - y, \tau) f(y, t - \tau) dy,$$

определенную при $t \in (0, +\infty)$, $\tau \in (0, t)$.

Представляя $\mathcal{E}$ через $\mathcal{E}_0$, получаем (см. доказательство леммы 2), что последний интеграл равен

$$\frac{2}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} f(x_0 - 2\sqrt{t}\eta, t - \tau) \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \\ \times \cos\left(2z\eta_n - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz d\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi^{(n+1)/2}} G(t, \tau).$$

Докажем ограниченность $G(t, \tau)$ в некоторой (достаточно малой) положительной полукрестности точки $t = 0$. Для этого разобьем $G(t, \tau)$ на слагаемые следующим образом:

$$G(t, \tau) = \int_{G_1} + \int_{G_2} \stackrel{\text{def}}{=} J_1 + J_2,$$

где

$$G_1 = \{\eta \mid \eta_n \in (-1, 1), |\eta'| < 1\}, \quad G_2 = \mathbb{R}^n \setminus G_1.$$

Для оценки слагаемого J_2 разобьем G_2 на области

$$\{\eta_n > 1, \eta' \in \mathbb{R}^{n-1}\}, \quad \{\eta_n < -1, \eta' \in \mathbb{R}^{n-1}\}, \quad \{\eta_n \in [-1, 1], |\eta'| \geq 1\}$$

(обозначим эти области через $G_{2,1}$, $G_{2,2}$, $G_{2,3}$, а соответствующие интегралы – через $J_{2,1}$, $J_{2,2}$, $J_{2,3}$).

Оценивая $J_{2,1}$ и $J_{2,2}$, воспользуемся установленным при доказательстве леммы 2 неравенством (справедливым при $0 < \tau \leq 1$, $|\eta_n| > 1$)

$$\left| \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos\left(2z\eta_n - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz \right| < \frac{M}{\eta_n^2},$$

где M зависит только от a и b .

Получим, что

$$|J_{2,1}| \leq M \sup |f| \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{e^{-|\eta'|^2}}{\eta_n^2} d\eta' d\eta_n = M \sup |f| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} d\eta',$$

т.е. $J_{2,1}$ ограничен; аналогично доказывается ограниченность $J_{2,2}$. Оценивая $J_{2,3}$, воспользуемся очевидным неравенством

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos\left(2z\eta_n - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz \right| \\ & < \frac{\exp(|\tau| \sum_{k=1}^m |a_k|) \sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

что при $0 < \tau \leq 1$ дает

$$|J_{2,3}| \leq \frac{\exp(\sum_{k=1}^m |a_k|) \sqrt{\pi}}{2} \sup |f| \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} d\eta' d\eta_n = M_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\eta'|^2} d\eta'$$

(здесь M_1 зависит только от a и f), т.е. $J_{2,3}$ ограничен.

Таким образом, J_2 ограничен. А J_1 ограничен в силу ограниченности подынтегральной функции (в любой окрестности точки $t = 0$) и области интегрирования. Таким образом, существует такое положительное t_0 , что $G(t, \tau)$ ограничена при $t \in (0, t_0)$. Значит,

$$|u_2(x_0, t)| \leq \sup_{(0, t_0)} |G|t$$

для любого t из $(0, t_0)$.

В силу произвольности выбора точки x_0 теорема 1 доказана полностью.

4. Теорема единственности. Выполняя двойное дифференцирование в выражении (7), получаем, что для любого положительного T выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty \exp\left(-z^2 + \tau \sum_{k=1}^m a_k \cos \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) \cos\left(2z\eta_n - \tau \sum_{k=1}^m a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{\tau}}\right) dz \right| \\ & < \frac{M(1+T) \exp(T \sum_{k=1}^m |a_k|)}{\eta^2} \end{aligned}$$

при $0 < \tau \leq T$, причем M зависит только от a и b . Отсюда и из неравенства (8), верного при любом τ , вытекает, что функция (5) ограничена в любой полосе $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ (см. доказательство леммы 3).

Далее, уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{r=1}^{m+1} L_r P_r u,$$

где $P_r = a_r I$ при $r = \overline{1, m}$, $P_{m+1} = \Delta$, $L_{m+1} = I$, а при $r = \overline{1, m}$ операторы L_r действуют следующим образом: $L_r g(x) = g(x - b_r h)$. А из [8] известно, что для таких уравнений задача Коши в любой полосе $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ в случае тривиальной начальной функции не имеет нетривиальных ограниченных решений. Тем самым, в силу линейности уравнения (2) доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$, $f(x, t)$ и ее первые производные по пространственным переменным непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$. Тогда функция, определенная равенством (5), является единственным решением задачи (2), (3), которое ограничено в $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ при каждом $T > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы использовали единственность *ограниченного* решения задачи (1), (3), однако в работе [8] доказано и более сильное утверждение. Поэтому решение (5) единственно и в более широком классе, а именно – в классе функций, при любом положительном T удовлетворяющих следующей оценке:

$$\sup_{t \in [0, T]} |u(x, t)| \leq C e^{q|x| \ln(|x|+1)}, \quad \text{если } q < \frac{1}{\max_{1 \leq k \leq m} |b_k|}.$$

Автор выражает глубокую признательность А. Л. Скубачевскому за ценные советы и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kunisch K., Schappacher W. Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate C_0 -semigroups // J. Differential Equations. 1983. V. 50. № 1. P. 49–79.
- [2] Desch W., Schappacher W. Spectral properties of finite-dimensional perturbed linear semigroups // J. Differential Equations. 1985. V. 59. № 1. P. 80–102.
- [3] Власов В. В. Об одном классе дифференциально-разностных уравнений в гильбертовых пространствах и некоторых спектральных вопросах // Докл. РАН. 1992. Т. 327. № 4–6. С. 428–432.
- [4] Власов В. В. Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Изв. ВУЗов. Сер. матем. 1996. № 1. С. 22–44.
- [5] Скубачевский А. Л. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 169–170.
- [6] Skubachevskii A. L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Anal. 1998. V. 32. № 2. P. 261–278.
- [7] Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 1. С. 145–153.
- [8] Борок В. М., Житомирский Я. И. О задаче Коши для линейных уравнений в частных производных с линейно преобразованным аргументом // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 3. С. 515–518.
- [9] Муравник А. Б. О задаче Коши для некоторых дифференциально-разностных уравнений параболического типа // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 5. С. 604–607.
- [10] Razgulin A. V. Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics. Proceedings SPIE. 1993. V. 2039. P. 342–352.
- [11] Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L. Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation // Chaos, Solitons, and Fractals. 1994. V. 4. P. 1701–1716.