Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Мустафин, Оценка целой функции в объединении двух углов, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 549–558

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:27:26

УДК 517.5

ОЦЕНКА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ В ОБЪЕДИНЕНИИ ДВУХ УГЛОВ

Р. М. Мустафин

Получена оценка целой функции, представленной в виде предела последовательности полиномов из экспонент, в объединении двух углов через оценку функции и ее производных на множестве, лежащем в горизонтальной полосе.

Библиография: 7 названий.

Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, разбита на две подпоследовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, обладающие следующими свойствами:

- 1) числа λ'_n являются нулями целой функции $L(z)$ экспоненциального типа, причем

$$|L(re^{\pm(\pi/2)i})| \geq Be^{Ar}$$

и $L(z)$ в правой полуплоскости не имеет нулей кроме λ'_n ;

- 2) последовательность $\{\lambda''_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda''_n} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda''_n} = \infty.$$

В этом случае Леонтьевым показано [1], что система $\{e^{\lambda_n z}\}$ полна в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq A$ в классе функций, аналитичных в полосе $|\operatorname{Im} z| < A$ и непрерывных вплоть до границы. Далее, им же показано [2], что существует функция

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_\nu < \rho_k} c_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad \rho_k \rightarrow \infty, \quad (1)$$

(сходимость равномерная на компактах), не равная тождественно нулю, которая ограничена в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq A$.

Из последнего утверждения вытекает, что для функции вида (1) нельзя получить оценку в угле через оценку ее на каком-либо множестве из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq A$. Поэтому естественно возникала задача о получении оценки функции вида (1) в угле, если известна оценка производных $F^{(n)}(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, на некотором множестве $\overline{G}$ из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq A$:

$$|F^{(n)}(z)| < km_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad z \in \overline{G}.$$

Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, разбита на две подпоследовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, обладающие следующими свойствами:

- 1) числа λ'_n , $n = 1, 2, \dots$, являются нулями целой функции $L_1(\lambda)$ экспоненциального типа, причем

$$|L_1(re^{\pm(\pi/2)i})| < Be^{Ar}; \quad (2)$$

- 2) последовательность $\{\lambda''_n\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda''_n} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda''_n} = \infty.$$

Пусть

$$L_2(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda_1'^2)(\lambda^2 - \lambda_2'^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n'^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \lambda^{2n},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \quad \beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|, \quad n \geq 0.$$

Обозначим через $\overline{D}$ сопряженную диаграмму функции $L_1(\lambda)$. В силу (2) она лежит в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq A$; считаем, что $0 \in \overline{D}$. Обозначим через $\overline{D}_\alpha$ смещение $\overline{D}$ на вектор α .

Возьмем выпуклую область $\tilde{G}_\alpha$, $\tilde{G}_\alpha \supset \overline{D}_\alpha$, и положим

$$\overline{G}_\alpha = \overline{\tilde{G}_\alpha} \cap \{| \operatorname{Im}(z - \alpha) | \leq A\}.$$

При этих условиях в работе [3] установлено, что если $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ (сходимость равномерная на любом компакте), где $P_n(z)$ – конечные линейные комбинации функций $e^{\lambda_n z}$, удовлетворяет условию

$$|F^{(n)}(z)| < K(\alpha) m_n, \quad n \geq 0, \quad K(\alpha) > 0, \quad z \in \overline{G}_\alpha,$$

тогда для любого φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/2$, существуют такие положительные постоянные C и b , не зависящие от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg[z - (\alpha - b)]| < \varphi_0.$$

Если

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n'^2}\right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\lambda_n'}\right) = \sigma < \infty, \quad \sigma = \frac{A}{\pi} \quad (3)$$

для любых $\varepsilon > 0$ и φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/2$, то существует такая постоянная C , не зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg[z - (\alpha - \varepsilon)]| < \varphi_0.$$

Возникает вопрос, возможно ли приблизить вершину угла, где справедливы указанные оценки, к точке α в случае, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/\lambda_n')$ не существует, но имеется конечный верхний предел. Решению этой задачи и посвящена статья.

Итак, пусть последовательность $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, разбита на две подпоследовательности $\{\lambda'_n\}$ и $\{\lambda''_n\}$, причем для чисел λ'_n , $n = 1, 2, \dots$, имеется конечная верхняя плотность

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda'_n} = \sigma \quad (4)$$

и выполнены условия

$$|L_1(re^{\pm \pi i/2})| < B_0 e^{Ar}, \quad A = \pi \sigma, \quad L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n'^2}\right), \quad (5)$$

$\{\lambda''_n\}$ те же, что и ранее,

$$\tilde{L}_1(\lambda) = \frac{L_1(\lambda)}{1 - \lambda^2/\lambda_1'^2}, \quad L_1(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_1'^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n'^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \lambda^{2n}$$

и m_n – положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n < \infty, \quad \beta_{2n} = \beta_{2n+1} = |c_{2n}|, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

Сопряженная диаграмма $\overline{D}$ функции $\tilde{L}_1(\lambda)$ в силу (5) лежит в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq A$. Пусть $0 \in \overline{D}$, $\overline{D}_\alpha$ – смещение $\overline{D}$ на вектор α , в качестве области $\tilde{G}_\alpha$ возьмем выпуклый многоугольник.

Для функции $L(\lambda) = \tilde{L}_1(\lambda)L_2(\lambda)$ наряду с индикатрисой $h(\varphi)$ введем новую характеристику (см. [4])

$$H(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right) \ln \left| \frac{1}{L(re^{i\varphi})} \right|, \quad \varphi \neq 0, \pi.$$

Верно следующее утверждение [4, с. 38–40].

ЛЕММА. При любом $\varepsilon > 0$ верно соотношение

$$(M - \varepsilon) \ln \left(\frac{1}{|\varphi|}\right) < H(\varphi) < (M + \varepsilon) \ln \left(\frac{1}{|\varphi|}\right), \quad 0 < |\varphi| < \varphi_0(\varepsilon), \quad (7)$$

где $M = \overline{\lim}_{\xi \rightarrow 1-0} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} [(n(r) - n(r\xi))/r]$, а $n(r)$ – число чисел λ_k , меньших r .

Заметим, что если $\sigma < \infty$, то и $M < \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$, затем φ , $0 < \varphi < \pi/2$. Если $\varphi < \varphi_0(\varepsilon)$, то обозначим через $E(\varphi, \varepsilon, \alpha)$ угол

$$|\pi - \arg(z + a - \alpha)| < \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad a = \frac{M_1 \ln(1/|\varphi|)}{\cos \varphi}, \quad M_1 = M + 2\varepsilon. \quad (8)$$

Если же $\varphi \geq \varphi_0(\varepsilon)$, то обозначим через $E(\varphi, \varepsilon, \alpha)$ тот же угол при

$$a = -M_1 \frac{\ln \varphi_0(\varepsilon)}{\cos \varphi_0(\varepsilon)} + \varepsilon.$$

При этом (в силу непрерывности функции $-(\ln \varphi)/\cos \varphi$) угол $E(\varphi, \varepsilon, \alpha)$ при $\varphi_0(\varepsilon) \leq \varphi < \pi/2$ содержится в угле $E(\varphi_1, \varepsilon, \alpha)$ при некотором $\varphi_1 < \varphi_0(\varepsilon)$.

Пусть $D(\varphi, \varepsilon, \delta, \alpha)$ есть объединение угла $E(\varphi, \varepsilon, \alpha)$ и угла

$$|\pi - \arg(z - \alpha)| < \frac{\pi}{4} - \delta, \quad \delta > 0. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА. Пусть функция $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ (сходимость равномерная на любом компакте), где $P_n(z)$ – конечные линейные комбинации функций $e^{\lambda_\nu z}$, производные которой удовлетворяют условию

$$|F^{(n)}(z)| < K(\alpha) m_n, \quad n \geq 0, \quad K(\alpha) > 0, \quad z \in \overline{G}_\alpha, \quad (10)$$

(m_n удовлетворяют условию (6)). Тогда для любого φ , $\pi/2 > \varphi > 0$, существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad z \in D(\varphi, \varepsilon, \delta, \alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим функцию

$$\omega_L(\mu, \alpha, F) = \frac{e^{-\alpha\mu}}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left[\int_0^t F(t + \alpha - \xi) e^{\mu\xi} d\xi \right] dt,$$

где $\gamma(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, C – замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции $\gamma(t)$. Имеем (см. [5, с. 242])

$$\omega_L(\mu, \alpha, \Psi_\nu) = \frac{e^{(\lambda_\nu - \mu)\alpha} L(\mu)}{\mu - \lambda_\nu}, \quad \Psi_\nu = e^{\lambda_\nu z}.$$

Поэтому вычет функции $\omega_L(\mu, \alpha, \Psi_\nu) e^{\mu z} / L(\mu)$ как функции переменной μ равен $e^{\lambda_\nu z}$ в точке $\mu = \lambda_\nu$ и равен нулю во всех остальных точках. Поэтому

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^n} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu,$$

где $P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \gamma_k^{(n)} e^{\lambda_k z}$, контур Γ_0^n замкнутый, содержащий внутри точки $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_n}$.

По условию $\lim(n/\lambda_n'') = 0$, поэтому $L_2(\lambda)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Значит, $L(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа и ее индикатриса совпадает с индикатрисой $h(\varphi)$ функции $\tilde{L}_1(\lambda)$. Отметим (см. [5, с. 20–22]), что найдутся окружности $|\lambda| = b_k \uparrow \infty$, на которых при некотором $h > 0$

$$|L(\lambda)| > e^{-h|\lambda|}, \quad |\lambda| = b_k, \quad k \geq 1. \quad (11)$$

Пусть $0 < \psi < \pi/2$ и Γ_ψ – граница угла $|\arg \mu| < \psi$. Обозначим через Γ_ψ^n часть Γ_ψ , лежащую в круге $|\mu| \leq b_n$, а через S_ψ^n – дугу окружности $|\mu| = b_n$, заключенную внутри Γ_ψ . Возьмем в качестве Γ_0^n путь $\Gamma_\psi^n \cup S_\psi^n$ и докажем, что интеграл по дуге S_ψ^n стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Имеем (см. [3, с. 543–544])

$$|\omega_L(\mu, \alpha, P_n)| \leq e^{(h(\varphi) + \varepsilon)|\mu|} |e^{-\alpha\mu}| N(\varepsilon), \quad \varphi = \arg \mu, \quad (12)$$

где $\varepsilon > 0$ любое, $N(\varepsilon)$ не зависит от n . Отсюда

$$|\omega_L(\mu, \alpha, F)| \leq e^{(h(\varphi) + \varepsilon)|\mu|} |e^{-\alpha\mu}| N(\varepsilon), \quad \varphi = \arg \mu. \quad (13)$$

На основании леммы (при фиксированном ψ , $0 < \psi < \varphi_0(\varepsilon)$) имеем, что оценка (11) справедлива и на Γ_ψ^n . Поэтому, учитывая (12), получаем

$$\left| \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n)}{L(\mu)} \right| < B(\varepsilon) e^{h_1|\mu|} e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)} \leq B(\varepsilon) e^{h_2|\mu|}, \quad (14)$$

где $h_1 = \sigma + h + \varepsilon$, $h_2 = h_1 + |\alpha|$, σ – тип функции $L(\lambda)$.

Пусть z лежит в области

$$|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{2} - \psi - \varepsilon_0, \quad |z| > \frac{h_2 + 1}{\sin \varepsilon_0}, \quad 0 < \psi < \varphi_0(\varepsilon), \quad (15)$$

тогда

$$\operatorname{Re}(z\mu) = |z\mu| \cos[\arg(z\mu)] \leq |z||\mu| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0\right) \leq -(h_2 + 1)|\mu|$$

и

$$\left| \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < B(\varepsilon) e^{-|\mu|}.$$

Из этой оценки получаем

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\psi} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_n) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu \quad (16)$$

для z из области (15).

Покажем, что представление (16) имеет место на самом деле для z из большей области. Используем другую запись функции $\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)$ [5, с. 247]:

$$\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha\mu} \sum_{k=1}^{\infty} c_k [F^{(k-1)}(\alpha) + \mu F^{(k-2)}(\alpha) + \dots + \mu^{k-1} F(\alpha)]. \quad (17)$$

Воспользуемся следующим свойством ([5, с. 246]):

$$\omega_{\tilde{L}_1 L_2}(\mu, \alpha, F) = \tilde{L}_1(\mu) \omega_{L_2}(\mu, \alpha, F) + \omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi), \quad (18)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \gamma_2(t) F(t+z) dt,$$

$\gamma_2(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $L_2(\lambda)$ (она регулярна всюду кроме $t = 0$), C_2 – замкнутый контур, охватывающий начало координат. Заметим, что $\Phi(z)$, как и $F(z)$ – целая функция. Подставляя в последний интеграл разложение функции $F(t+z)$ в ряд Тейлора, получим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k k!}{t^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(z) t^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F^{(n)}(z). \quad (19)$$

Как установлено в [5, с. 328–336], функция $\Phi(z)$ разлагается в многоугольнике G_0 в ряд $\Phi(z) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\mu_s z}$, который сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}_\varepsilon$, полученной из $\overline{G}_0$ удалением ε -окрестностей вершин. Здесь μ_s – нули квазиполинома $M(\mu)$,

по которому согласно [5] строится ряд; можно считать, что они простые. В качестве многоугольника G_0 с самого начала берем многоугольник $G \subset G_\varepsilon$.

Рассмотрим ряд

$$e^{-\alpha\mu} \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\mu_s \alpha} \frac{\tilde{L}_1(\mu) - \tilde{L}_1(\mu_s)}{\mu - \mu_s} = e^{-\alpha\mu} (A(\mu) \tilde{L}_1(\mu) - B(\mu)),$$

где

$$A(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s e^{\mu_s \alpha}}{\mu - \mu_s}, \quad B(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s e^{\mu_s \alpha} \tilde{L}_1(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

Пусть $\{\psi_s(t)\}$ – система, биортогональная к системе $\{e^{\mu_s z}\}$. Справедливо неравенство [5, с. 232]

$$|\psi_s(t)| < \frac{A_0}{|M'(\mu_s)|}, \quad t \in \partial \tilde{G}.$$

Имеем

$$b_s e^{\mu_s \alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \Phi(t + \alpha) \psi_s(t) dt, \quad s \geq 1.$$

Отсюда

$$|b_s e^{\mu_s \alpha}| \leq \frac{A_1}{|M'(\mu_s)|} \max_{t \in \overline{G}_\alpha} |\Phi(t)|.$$

Пусть $\arg \mu = -\alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, p$, – перпендикуляры к сторонам многоугольника и μ лежит вне углов R_k , задаваемых соотношением $|\arg(\mu - \alpha_k)| < \varepsilon$. Имеем

$$|B(\mu)| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|b_s| |e^{\mu_s \alpha}| |\tilde{L}_1(\mu_s)|}{|\mu - \mu_s|} \leq A_2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|\tilde{L}_1(\mu_s)|}{|M'(\mu_s)|} \max_{t \in \overline{G}_\alpha} |\Phi(t)|.$$

Для $|M'(\mu_s)|$ справедлива оценка [5, с. 56]

$$|M'(\mu_s)| \geq A_3 \exp(h_1(\varphi_s) |\mu_s|), \quad \varphi_s = \arg \mu_s, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где $h_1(\varphi)$ – опорная функция многоугольника $\overline{G}$. Следовательно, $|\tilde{L}_1(\mu_s)|/|M'(\mu_s)| \leq A_4 e^{(h(\varphi_s) + \varepsilon - h_1(\varphi_s)) |\mu_s|}$, $\varphi_s \neq \pm\pi/2$, и из (5) вытекает, что $h(\pm\pi/2) = h_1(\pm\pi/2)$. Поэтому, последняя оценка справедлива без ε , причем вместо $\tilde{L}_1$ можно подставить L_1 , имеющую ту же индикатрису роста $h(\varphi)$. Учитывая определение функции $\tilde{L}_1(\lambda)$, имеем $|\tilde{L}_1(\mu_s)|/|M'(\mu_s)| \leq A_s/|\mu_s|^2$, $\varphi_s = \pm\pi/2$. Так как μ_s – нули квазиполинома и $h(\varphi_s) < h_1(\varphi_s)$, $\varphi_s \neq \pm\pi/2$, то ряд $\sum_{s=1}^{\infty} |\tilde{L}_1(\mu_s)|/|M'(\mu_s)|$ сходится. Имеем вне углов R_k

$$|B(\mu)| < B \max_{t \in \overline{G}_\alpha} |\Phi(t)|. \quad (20)$$

Аналогично,

$$|A(\mu)| < B \max_{t \in \overline{G}_\alpha} |\Phi(t)|. \quad (21)$$

Но

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha\mu} \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\mu_s \alpha} \frac{\tilde{L}_1(\mu) - \tilde{L}_1(\mu_s)}{\mu - \mu_s} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s e^{-\alpha\mu}}{2\pi i} \int_{C_1} \gamma_1(t) \left[\int_0^t e^{\mu_s(t+\alpha-\xi)} e^{\mu\xi} d\xi \right] dt \\ &= \frac{e^{-\alpha\mu}}{2\pi i} \int_{C_1} \gamma_1(t) \left[\int_0^t \Phi(t+\alpha-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \right] dt = \omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi), \end{aligned}$$

где $\gamma_1(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $\tilde{L}_1(\mu)$, контур C_1 замкнутый, согласно (5) его можно взять целиком лежащим в полосе $|\operatorname{Im} t| \leq A$. То есть,

$$\omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi) = e^{-\alpha\mu} (A(\mu) \tilde{L}_1(\mu) - B(\mu)), \quad (22)$$

где $A(\mu)$ и $B(\mu)$ удовлетворяют оценкам (20) и (21) вне R_k .

Заметим, что вместо P_n в (16) можно подставить F [3, с. 544–545]. То есть, имеет место представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\psi} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu. \quad (23)$$

Формула (23) справедлива и для $\psi = \pi/4$. Вывод ее аналогичен, учитывая, что оценка (11) справедлива с $h = 0$, так как $L(\mu) \geq 1$ на Γ_ψ .

Итак, возьмем в (23) $\psi = \pi/4$. На Γ_ψ тогда выполняется оценка $\tilde{L}_1(\mu) \geq 1$ и, поэтому, в силу (20)–(22)

$$\left| \frac{\omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi)}{\tilde{L}_1(\mu)} \right| < C_0 e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)} \max_{t \in \tilde{G}_\alpha} |\Phi(t)|.$$

Но в силу (19)

$$\max_{t \in \tilde{G}_\alpha} |\Phi(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \max_{t \in \tilde{G}_\alpha} |F^{(n)}(t)| = K(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n m_n, \quad (24)$$

а, значит,

$$\left| \frac{\omega_{\tilde{L}_1}(\alpha, \mu, \Phi)}{\tilde{L}_1(\mu)} \right| < C_1 K(\alpha) e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)}. \quad (25)$$

В силу того, что $L_2(\mu)$ – функция минимального типа, для $\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)$ имеется оценка [3, с. 542]

$$|\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)| < C_2(\varepsilon) e^{\varepsilon|\mu|} e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)} K(\alpha). \quad (26)$$

Так как $L_2(\mu) \geq 1$, в силу (18), (25) и (26) с учетом равенства $L(\mu) = \tilde{L}_1(\mu) \cdot L_2(\mu)$ имеем на Γ_ψ

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F)}{L(\mu)} \right| &< C_2(\varepsilon) e^{\varepsilon|\mu|} e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)} K(\alpha) + C_1 K(\alpha) e^{-\operatorname{Re}(\alpha\mu)} \\ &\leq C_3(\varepsilon) K(\alpha) e^{\varepsilon|\mu| - \operatorname{Re}(\alpha\mu)} \end{aligned}$$

и из (23) получаем

$$|F(z)| < C_4(\varepsilon)K(\alpha) \int_{\Gamma_\psi} e^{\varepsilon|\mu| + \operatorname{Re}(\mu(z-\alpha))} |d\mu|.$$

Пусть z лежит в области

$$E = \{z : |\arg(\alpha - z)| < \pi/4 - \delta\} \cap \{z : |z - \alpha| \geq \delta_0, \delta_0 > 0\}.$$

Тогда, обозначив $\arg(\alpha - z) = \varphi$, имеем

$$\operatorname{Re}[(z - \alpha)\mu] = -|\mu||z - \alpha|\cos(\varphi + \psi) \leq -|\mu|\delta_0 \sin \delta.$$

При достаточно малом ε таком, что $\varepsilon < \delta_0 \sin \delta$, и при $z \in E$ получаем оценку

$$|F(z)| < CK(\alpha).$$

При малом δ_0 круг $|z - \alpha| \leq \delta_0$ целиком содержится в $\overline{G}_\alpha$. В силу этого доказанное неравенство имеет место во всем угле (9).

Установим теперь требуемое неравенство в угле (8). Для этого в формуле (23) положим $\psi = \varphi$, $0 < \varphi < \varphi_0(\varepsilon)$. При малом ε и $\varphi_0(\varepsilon)$ мало, и на Γ_φ верны оценки (20) и (21) (многоугольник G можно выбрать так, чтобы углы R_k не пересекались с вещественной осью).

В силу (22) имеем

$$\frac{\omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi)}{L(\mu)} = \left(\frac{A(\mu)}{L_2(\mu)} - \frac{B(\mu)}{L(\mu)} \right) e^{-\alpha\mu}. \quad (27)$$

На основании леммы на Γ_φ

$$\left| \frac{1}{L(\mu)} \right| < C_{\varphi, \varepsilon_1} \exp \left\{ \left[(M + \varepsilon) \ln \left(\frac{1}{\varphi} \right) + \varepsilon_1 \right] r \right\},$$

где $\varepsilon_1 > 0$ любое. Подобная оценка справедлива и для $1/L_2(\mu)$ с $M = 0$.

В силу этой оценки, а также оценок (20), (21) на основании равенства (27) получаем

$$\left| \frac{e^{\alpha\mu} \omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi)}{L(\mu)} \right| < 2BC_{\varphi, \varepsilon_1} \max_{t \in \overline{G}_\alpha} |\Phi(t)| \exp \left\{ \left[(M + \varepsilon) \ln \left(\frac{1}{\varphi} \right) + \varepsilon_1 \right] r \right\}.$$

Имеем далее

$$|\exp((z - \alpha)\mu)| = \exp(|\mu||z - \alpha|\cos(\pm\varphi + \psi)), \quad \psi = \arg(z - \alpha).$$

Выражение $|z - \alpha|\cos(\varphi + \psi)$ получается, если $\arg \mu = \varphi$, а выражение $|z - \alpha|\cos(-\varphi + \psi)$ — при $\arg \mu = -\varphi$.

Пусть z лежит в угле (8), стороны которого имеют уравнения

$$M_1 \ln \left(\frac{1}{\varphi} \right) - (x - \operatorname{Re} \alpha) \cos \varphi \pm (y - \operatorname{Im} \alpha) \sin \varphi = 0.$$

Тогда

$$|z - \alpha| \cos(\pm\varphi + \psi) < -M_1 \ln\left(\frac{1}{\varphi}\right), \quad M_1 = M + 2\varepsilon,$$

и

$$|\exp((z - \alpha)\mu)| < \exp\left(-M_1 \ln\left(\frac{1}{\varphi}\right)r\right).$$

В силу этого для z из угла (8)

$$\left| \frac{\omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi)e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < 2BC_{\varphi, \varepsilon_1} \max_{t \in \overline{G}_\alpha} |\Phi(t)| \exp\left[\left(-\varepsilon \ln \frac{1}{\varphi} + \varepsilon_1\right)r\right].$$

При малом ε_1 имеем $-\varepsilon \ln(1/\varphi) + \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \varepsilon_2 > 0$. Учитывая (24), имеем

$$\left| \frac{\omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi)e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < B_1 K(\alpha) e^{-\varepsilon_2 r}. \quad (28)$$

Для функции $L_2(\mu)$ справедливы аналогичные оценки в большем угле

$$|\pi - \arg(z + 2\varepsilon - \alpha)| < \frac{\pi}{2} - \varphi$$

при $M = 0$. Поэтому имеем для z из угла (8)

$$\left| \frac{\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)e^{\mu z}}{L_2(\mu)} \right| < B_2 e^{-\varepsilon_2 r} K(\alpha). \quad (29)$$

Воспользуемся равенством (18). Получим

$$\frac{\omega_L(\mu, \alpha, F)e^{\mu z}}{L(\mu)} = \frac{\omega_{L_2}(\mu, \alpha, F)e^{\mu z}}{L_2(\mu)} + \frac{\omega_{\tilde{L}_1}(\mu, \alpha, \Phi)e^{\mu z}}{L(\mu)}.$$

Учитывая (28) и (29), имеем на Γ_φ для z из угла (8)

$$\left| \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F)e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < B_3(\varphi) K(\alpha) e^{-\varepsilon_2 r}.$$

В силу интегрального представления (23) получаем

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad z \in E(\varphi, \varepsilon, \alpha).$$

Последнее неравенство доказано при $\varphi < \varphi_0(\varepsilon)$. Если же $\varphi \geq \varphi_0(\varepsilon)$, то угол $E(\varphi, \varepsilon, \alpha)$ содержится в угле $E(\varphi_1, \varepsilon, \alpha)$ при некотором $\varphi_1 < \varphi_0(\varepsilon)$ (как было отмечено перед формулировкой теоремы) и неравенство справедливо и в этом случае.

А, значит, и в $D(\varphi, \varepsilon, \delta, \alpha)$ выполнена оценка $|F(z)| < CK(\alpha)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как было отмечено в работе [3, с. 539], если $H_\alpha \subset \overline{G}_\alpha$ и

$$K(\alpha) = \max_{z \in \overline{H}_\alpha} |F(z)|,$$

то

$$|F^{(n)}(z)| \leq K(\alpha) m_n, \quad n \geq 0, \quad z \in \overline{G}_\alpha,$$

где m_n удовлетворяют условию (4). Это означает, что в определении множества $\overline{G}_\alpha$ нельзя взять полосу $|\operatorname{Im}(z - \alpha)| \leq A - \varepsilon, \varepsilon > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу того, что $\overline{G}_\alpha$ содержит некоторую окрестность точки α , множество $\overline{G}_\alpha$ и угол с вершиной в точке $\alpha - \varepsilon$ покрывают угол чуть меньшего раствора с вершиной в точке α , поэтому процитированный в начале статьи результат из работы [3] можно усилить следующим образом: в случае, если

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n'^2}\right), \quad \lim \left(\frac{n}{\lambda_n'}\right) = \sigma < \infty, \quad \sigma = \frac{A}{\pi},$$

для любого φ_0 , $0 < \varphi_0 < \pi/2$, существует такая постоянная C , не зависящая от $F(z)$, $K(\alpha)$ и α , что

$$|F(z)| < CK(\alpha), \quad |\pi - \arg(z - \alpha)| < \varphi_0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как и в работе [3], можно рассмотреть последовательность $\{\lambda_n''\}$, имеющую плотность τ при уточненном порядке $\rho(r)$, удовлетворяющем условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\rho(r)-1} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = \infty, \quad (30)$$

где $\varphi(t)$ — функция, обратная к функции $t = r^{\rho(r)}$ (в силу условий (30) имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} (n/\lambda_n'') = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n'')^{-1} = \infty$). Тогда в качестве m_n можно взять числа $m_n = h_1^n [\varphi(n)]^n$, $h_1 < h_0$, $h_0 = (\pi e \tau)^{-1}$.

Как и в [6, с. 359–365] можно показать (это сделано в работе [7]), что если в качестве m_n взять числа $M_n = h_2^n [\varphi(n)]^n$, $h_2 > h_0$, то существует целая функция $\omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z}$, не равная тождественно нулю, удовлетворяющая условиям

$$|\omega^{(n)}(z)| < CM_n, \quad |\operatorname{Im} z| \leq A, \quad n \geq 0,$$

т.е. утверждение теоремы перестает быть справедливым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Леонтьев А. Ф. О полноте системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в замкнутой полосе // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. № 2. С. 266–268.
- [2] Леонтьев А. Ф. О некоторых теоремах единственности для рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. физ.-матем. 1963. Т. 27. № 6. С. 1251–1280.
- [3] Мустафин Р. М. Оценка целой функции через оценку функции и ее производных в замкнутой полосе // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 4. С. 537–549.
- [4] Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
- [5] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
- [6] Мустафин Р. М. Оценка целой функции через оценку функции и ее производных на кривой // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 3. С. 351–366.
- [7] Мустафин Р. М. Пример функции, заданной рядом экспонент и ограниченной вместе с производными в полосе // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа: Башкирский филиал АН СССР, ОФМ, 1979. С. 212–222.

Уфимский государственный нефтяной
технический университет

Поступило
05.01.1999
Исправленный вариант
30.10.2000