Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Найденко, Частичная выпуклость, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 222–235

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:12:50

УДК 514+681.3

ЧАСТИЧНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

В. Г. Найденко

Исследуется OC -выпуклость, состоящая из пересечений конических семипространств частичной выпуклости. Рассмотрена оптимизационная проблема на OC -выпуклом множестве. Доказана теорема типа Крейна–Мильмана для OC -выпуклости. Показана связь между OC -выпуклыми и функционально выпуклыми множествами. Описаны топологические и числовые аспекты, свойства отделимости. Найдена верхняя оценка числа Каратеодори для OC -выпуклости. В то же время оказалось, что числа Хелли и Радона бесконечны для OC -выпуклости. Доказано, что OC -выпуклая оболочка любого конечного множества точек представляет собой объединение конечного числа многогранников.

Библиография: 10 названий.

Теория выпуклости представляет собой раздел геометрии, который имеет многочисленные приложения к другим областям математики таким, как линейная алгебра, статистика, теория чисел, комбинаторика и анализ. Исследование практических проблем приводит к необходимости введения нетрадиционных понятий выпуклости, например, частичной выпуклости [1]. В настоящей работе исследуется OC -выпуклость [2] как специальный случай частичной выпуклости. Мы рассмотрим оптимизационную проблему на OC -выпуклом множестве, докажем для OC -выпуклости теорему типа Крейна–Мильмана и покажем связь между OC -выпуклыми и функционально частично выпуклыми множествами. Также мы исследуем топологические свойства и числовые характеристики OC -выпуклости, отделимость OC -выпуклых множеств и проблему нахождения OC -выпуклых оболочек. Дадим необходимые определения.

Пусть в n -мерном линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ задано множество единичных векторов $O \subseteq S^{n-1}$ (направлений), где S^{n-1} – единичная сфера. Мы предполагаем симметричность множества O , т.е. $O = -O$, что не является ограничением в контексте частичной выпуклости. Напомним, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *частично выпуклым* (O -выпуклым), если пересечение X с произвольной прямой, параллельной какому-нибудь вектору из O , связно или пусто. Семипространством S_a^O частичной выпуклости в точке $a \in \mathbb{R}^n$ называется максимальное по включению частично выпуклое множество, не содержащее a .

Под *выпуклым конусом* мы понимаем множество C , содержащее $\lambda x + \mu y$ для любых $x, y \in C$ и любых неотрицательных λ и μ . Выпуклый конус C называется *острым*,

Работа поддержана Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры” при частичной поддержке INTAS, проект 00-217.

если C не содержит одномерных линейных подпространств, т.е. $x \in C$ и $-x \in C$ влечет $x = 0$.

Семипространства частичной выпуклости вида

$$S_a^O = \mathbb{R}^n \setminus (C + a)$$

называются C -семипространствами, где C – острый выпуклый конус.

Напомним определение OC -выпуклости. Семейство подмножеств OC из $\mathbb{R}^n$ образует OC -выпуклость, если OC содержит только следующие множества:

- 1) $\mathbb{R}^n$;
- 2) для любого $a \in \mathbb{R}^n$ все C -семипространства O -выпуклости принадлежат OC ;
- 3) пересечение любой совокупности C -семипространств O -выпуклости принадлежит OC .

Пара $(\mathbb{R}^n, OC)$ с точки зрения аксиоматической теории выпуклости [3] называется пространством OC -выпуклости, а элементы семейства OC – OC -выпуклыми множествами. OC -выпуклость можно считать частным случаем O -выпуклости, так как все OC -выпуклые множества являются O -выпуклыми. Очевидно, что обратное не верно. Однако OC -выпуклость позволяет эффективно строить аппроксимации частично выпуклых оболочек. Семипространства OC -выпуклости в произвольной точке $a \in \mathbb{R}^n$ будем для краткости называть OC -семипространствами и обозначим символом S_a^{OC} . OC -выпуклую оболочку произвольного множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (т.е. пересечение всех OC -выпуклых множеств, содержащих A) обозначим через $\text{conv}^{OC}[A]$. Точку $a \in A$ назовем OC -экстремальной для A , если $a \notin \text{conv}^{OC}[A \setminus \{a\}]$. Совокупность всех OC -экстремальных точек для множества A обозначим как $\text{ext}^{OC}[A]$.

Через $\bar{A}$, $\text{int}(A)$, $\text{fr}(A)$, $\dim(A)$ обозначим соответственно замыкание, внутренность, границу и размерность произвольного множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть $d(A, B)$ обозначает расстояние между множествами $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Через $a \cdot b$ обозначим скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$. Под телом будем понимать ограниченную область пространства вместе со своей границей, где область представляет собой любое открытое множество (мы не будем требовать связности области). Множество $M \subset O$ назовем половинным для O , если

$$M \cup -M = O \quad \text{и} \quad M \cap -M = \emptyset.$$

Через $\text{CH}[M]$ обозначим выпуклую коническую оболочку множества M , т.е. наименьший выпуклый конус, содержащий M .

Будем использовать следующие свойства OC -выпуклости [2], [4], [5]:

- 1) все классически выпуклые множества являются OC -выпуклыми;
- 2) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ всякое OC -семипространство в точке x является C -семипространством O -выпуклости в той же точке x ;
- 3) пусть $M \subset O$ – половинное множество; если $\text{CH}[M]$ – острый конус, то

$$\mathbb{R}^n \setminus (\text{CH}[M] + x)$$

– OC -семипространство в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^n$;

- 4) для любого OC -семипространства $S_x^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x)$ существует половинное для O множество $M \subseteq C$ такое, что

$$\mathbb{R}^n \setminus (\text{CH}[M] + x) = S_x^{OC}.$$

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbb{R}^n \setminus (C + a)$ – некоторое OC -семипространство в произвольной точке a . Тогда для любого OC -выпуклого компакта A найдется такая точка $x \in A$, что OC -семипространство $\mathbb{R}^n \setminus (C + x)$ будет содержать все множество A , кроме точки x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести индукцией по размерности пространства $\mathbb{R}^n$. Для $\mathbb{R}^1$ теорема тривиальна. Пусть она выполняется для $\mathbb{R}^{n-1}$. Покажем справедливость теоремы для $\mathbb{R}^n$. Пусть $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = 0\}$ – гиперплоскость, опорная к C , и полупространство $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \geq 0\}$ содержит C . Рассмотрим следующую оптимизационную задачу относительно переменной $x \in \mathbb{R}^n$:

$$a \cdot x \rightarrow \max, \quad x \in A.$$

По теореме Вейерштрасса максимум достигается в некоторой точке $x_0 \in A$. Обозначим через H_0 гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = a \cdot x_0\}$. Если $H \cap O = \emptyset$, то, очевидно, любая точка $x \in H_0 \cap A$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть $H \cap O \neq \emptyset$. Гиперплоскость H_0 можно рассматривать как аффинное $(n-1)$ -мерное подпространство. Свяжем с ним линейное $(n-1)$ -мерное пространство. Зафиксируем в H_0 некоторую точку h_0 как начало координат. Тогда каждой точке $x \in H_0$ будет соответствовать вектор $v = \overrightarrow{h_0 x}$. Пусть O' – такое множество единичных векторов в H_0 , что каждый вектор из O' коллинеарен какому-нибудь вектору из $O \cap H$ и наоборот. В пространстве H_0 множество точек $H_0 \setminus (C + h_0)$ будет OC -семипространством в точке h_0 для множества направлений частичной выпуклости O' . Так как H_0 можно отождествить с $\mathbb{R}^{n-1}$, то по предположению индукции найдется точка $a_0 \in H_0 \cap A$ такая, что

$$(H_0 \setminus (C + a_0)) \cap (H_0 \cap A) = (H_0 \cap A) \setminus \{a_0\}.$$

Следовательно, $(C + a_0) \cap H_0 \cap A = \{a_0\}$. Заметим, что $(C + a_0) \cap A \subseteq H_0$. Поэтому $(C + a_0) \cap A = \{a_0\}$, или

$$(\mathbb{R}^n \setminus (C + a_0)) \cap A = A \setminus \{a_0\}.$$

То есть, OC -семипространство $\mathbb{R}^n \setminus (C + a_0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию теоремы. Теорема доказана.

Рассмотрим следующую оптимизационную проблему на OC -выпуклом компакте A относительно переменной $x \in \mathbb{R}^n$:

$$a \cdot x \rightarrow \max, \quad x \in A, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор.

В [6] показано, что в случае конечности множества O среди решений проблемы (1) найдется по крайней мере одна OC -экстремальная точка. Покажем, что аналогичный результат имеет место и для бесконечного случая. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть O – бесконечное множество направлений частичной выпуклости. Существует по крайней мере одна OC -экстремальная точка для A , которая является решением проблемы (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = 0\}$$

и одно из ограничиваемых ею замкнутых полупространств

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \geq 0\}.$$

Заметим, что согласно свойствам семипространств классической выпуклости [7], найдется такое классически выпуклое семипространство S_0 в точке 0 , что H – опорная гиперплоскость к S_0 и $\mathbb{R}^n \setminus S_0 \subset H^+$. Заметим, что для любого ненулевого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ справедливо либо $v \in \mathbb{R}^n \setminus S_0$, либо $-v \in \mathbb{R}^n \setminus S_0$ (но не одновременно). Тогда $\mathbb{R}^n \setminus S_0$ будет содержать некоторое половинное подмножество векторов M из O . Так как конус $\mathbb{R}^n \setminus S_0$ острый, то $\text{CH}[M]$ также острый. Следовательно, $\mathbb{R}^n \setminus \text{CH}[M]$ будет OC -семипространством в точке 0 . Заметим, что H – опорная гиперплоскость к $\text{CH}[M]$ и полупространство H^+ содержит $\text{CH}[M]$. Тогда, используя доказательство теоремы 1, можно найти OC -экстремальную точку для A , являющуюся решением задачи (1). Теорема доказана.

В работе [2] доказан аналог теоремы Крейна–Мильмана для конечного O . Здесь мы рассмотрим бесконечный случай. Пусть O содержит базис $\mathbb{R}^n$. Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ через $\text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A]$ и $\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]$ обозначим

$$\bigcap \{\overline{S_x^{OC}} \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus A, A \subseteq \overline{S_x^{OC}}\} \quad \text{и} \quad \bigcap \{\text{int}(S_x^{OC}) \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus A, A \subseteq \text{int}(S_x^{OC})\}$$

соответственно. Отметим, что множества $\text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A]$ и $\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]$ определены тогда и только тогда, когда $\text{conv}^{OC}[A] \neq \mathbb{R}^n$. Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Если O содержит базис $\mathbb{R}^n$, то для любого $A \subset \mathbb{R}^n$ такого, что $\text{conv}^{OC}[A] \neq \mathbb{R}^n$, выполняется

$$\text{int}(\text{conv}^{OC}[A]) = \text{int}(\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное OC -семипространство $S_x^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x)$. Так как O содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$, то C также будет содержать базис $\mathbb{R}^n$. Значит, $\dim(C + x) = n$ и $\text{int}(S_x^{OC}) \neq \emptyset$. Заметим, что так как для любой точки $y \in \overline{C} + x$ выполняется $\text{int}(S_x^{OC}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus (C + y)$, то

$$\text{int}(S_x^{OC}) = \bigcap \{\mathbb{R}^n \setminus (C + y) \mid y \in \overline{C} + x\}.$$

То есть, внутренность OC -семипространства $\text{int}(S_x^{OC})$ можно представить как пересечение подходящего числа OC -семипространств. Следовательно, $\text{conv}^{OC}[A] \subseteq \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]$. Покажем, что любая точка $a \in \text{int}(\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A])$ также является внутренней точкой для $\text{conv}^{OC}[A]$. Предположим противное, что $a \in \text{int}(\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A])$, но $a \notin \text{int}(\text{conv}^{OC}[A])$. Так как $a \in \text{int}(\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A])$, то существует такое фиксированное $\delta > 0$, что для любого OC -семипространства S_x^{OC} , внутренность которого содержит

множество A , выполняется оценка $d(\text{fr}(S_x^{OC}), a) \geq \delta$. Кроме того, поскольку предполагается $a \notin \text{int}(\text{conv}^{OC}[A])$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое OC -семипространство S_x^{OC} , что $A \subseteq S_x^{OC}$ и $d(\text{fr}(S_x^{OC}), a) \leq \varepsilon$. Зафиксируем $\varepsilon < \delta$ и OC -семипространство $S_x^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x)$ такое, что $d(\text{fr}(S_x^{OC}), a) \leq \varepsilon$ и $A \subseteq S_x^{OC}$. Возьмем точку $x' \in \text{int}(C + x)$ такую, что $\|x' - x\| < \delta - \varepsilon$. Рассмотрим OC -семипространство $S_{x'}^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x')$. Очевидно, что $A \subseteq \text{int}(S_{x'}^{OC})$ и по неравенству треугольника из утверждений

$$d(\text{fr}(S_{x'}^{OC}), \text{fr}(S_x^{OC})) < \delta - \varepsilon, \quad d(\text{fr}(S_x^{OC}), a) \leq \varepsilon$$

вытекает $d(\text{fr}(S_{x'}^{OC}), a) < \delta$. Получаем противоречие. Следовательно,

$$\text{int}(\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]) \subseteq \text{int}(\text{conv}^{OC}[A]).$$

Поскольку $\text{conv}^{OC}[A] \subseteq \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]$, то $\text{int}(\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]) = \text{int}(\text{conv}^{OC}[A])$. Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы Крейна–Мильмана для OC -выпуклости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть O содержит базис $\mathbb{R}^n$. Если A – компакт в $\mathbb{R}^n$, то

$$\text{int}(\text{conv}^{OC}[A]) = \text{int}(\text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 вытекают равенства

$$\begin{aligned} \text{int}(\text{conv}^{OC}[A]) &= \text{int}(\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]), \\ \text{int}(\text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]) &= \text{int}(\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно показать, что $\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A] = \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]$. Предположим, что

$$\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A] \neq \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]].$$

Это означает, что $A \not\subseteq \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]$. Значит, найдутся точка $a \in A$ и OC -семипространство $S_a^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + a)$ такие, что $\text{ext}^{OC}[A] \subseteq \text{int}(S_a^{OC})$, т.е. $(\overline{C} + a) \cap \text{ext}^{OC}[A] = \emptyset$. Рассмотрим множество $(\overline{C} + a) \cap A$. Согласно теореме 1 существует точка $x \in (\overline{C} + a) \cap A$ такая, что OC -семипространство $S_x^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x)$ обладает следующим свойством:

$$S_x^{OC} \cap ((\overline{C} + a) \cap A) = A \setminus \{x\}.$$

Так как $C + x \subseteq \overline{C} + a$, то $S_x^{OC} \cap A = A \setminus \{x\}$. Следовательно, $x \in \text{ext}^{OC}[A]$ и поэтому

$$(\overline{C} + a) \cap \text{ext}^{OC}[A] \neq \emptyset.$$

Получаем противоречие. Тогда из утверждения

$$\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A] = \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]$$

вытекает справедливость теоремы. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если A – OC -выпуклое тело, то

$$A = \overline{\text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A – OC -выпукло, то $A = \text{conv}^{OC}[A]$. Согласно теореме 3 имеем

$$\text{int}(A) = \text{int}(\text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]).$$

Учитывая, что $\text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]] \subseteq A$, получаем утверждение

$$\text{fr}(\text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]) \subseteq \text{fr}(A).$$

С другой стороны, так как A – тело, то

$$\text{fr}(A) = \text{fr}(\text{int}(A)) = \text{fr}(\text{int}(\text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]])).$$

Следовательно, $A = \overline{\text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]}$. Следствие доказано.

Остается открытым вопрос, будет ли выполняться равенство

$$\text{conv}^{OC}[A] = \text{conv}^{OC}[\text{ext}^{OC}[A]]$$

для любого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$? Сложность этого вопроса заключается в том, что если O бесконечно, то OC -выпуклая оболочка компакта может быть некомпактна, в отличие от классической выпуклости. Приведем пример в $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Рассмотрим множество

$$A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Тогда очевидно, что

$$\text{conv}^{OC}[A] = A \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

не является компактом.

Функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется O -выпуклой, если для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $v \in O$ функция $g(t) = f(x + vt)$ является (классически) выпуклой функцией от вещественного аргумента t .

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Множество $\text{conv}^{fO}[A]$, называемое *функциональной O -выпуклой оболочкой* множества A , определяется следующим образом:

$$\text{conv}^{fO}[A] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y) \text{ для всех } O\text{-выпуклых } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Множество A называется *функционально O -выпуклым*, если $A = \text{conv}^{fO}[A]$.

Как показано в работе [8], функциональная O -выпуклая оболочка $\text{conv}^{fO}[A]$ множества A представляет собой пересечение нулевых наборов всех неотрицательных O -выпуклых функций, которые на A принимают нулевые значения.

Матоушек и Плехач [9] поставили проблему нахождения обобщенно выпуклых множеств, которые бы выступали в качестве внешней аппроксимации функционально O -выпуклых множеств при построении последних.

ЛЕММА 2. Пусть O содержит базис $\mathbb{R}^n$. Если A – компакт в $\mathbb{R}^n$, то

$$\text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A] = \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное OC -семипространство $S_x^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x)$. Так как O содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$, то C также будет содержать базис $\mathbb{R}^n$. Значит, $\dim(C + x) = n$ и $\text{int}(C + x) \neq \emptyset$. Заметим, что так как для любой точки $y \in \text{int}(C + x)$ выполняется $\overline{S_x^{OC}} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus (\overline{C} + y)$, то

$$\overline{S_x^{OC}} = \bigcap \{ \mathbb{R}^n \setminus (\overline{C} + y) \mid y \in \text{int}(C + x) \},$$

где $\mathbb{R}^n \setminus (\overline{C} + y) = \text{int}(S_y^{OC})$ – внутренность некоторого OC -семипространства S_y^{OC} . То есть, замыкание OC -семипространства $\overline{S_x^{OC}}$ можно представить как пересечение внутренних подходящего числа OC -семипространств. Следовательно, $\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A] \subseteq \text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A]$. Пусть $A \subseteq \text{int}(S_x^{OC})$. Так как A – компакт и $\overline{C} + x$ замкнуто, то в пространстве $\mathbb{R}^n$ между множествами $\overline{C} + x$ и A существует ненулевое расстояние $d(\overline{C} + x, A) = \delta > 0$. Мы можем выбрать точку $x' = x + \varepsilon$ такую, что

$$x' \in \text{int}(C + x) \quad \text{и} \quad \|x' - x\| < \delta.$$

Очевидно, что $\overline{C} + x' \subset \overline{C} + x$ и $\text{fr}(\overline{C} + x') \cap \text{fr}(\overline{C} + x) = \emptyset$. Используя параллельный перенос множеств $\overline{C} + x'$ и $\overline{C} + x$ по вектору $-\varepsilon$, получаем, что $\overline{C} + x' - \varepsilon \subset \overline{C} + x - \varepsilon$, или $\overline{C} + x \subset \overline{C} + (x - \varepsilon)$. Обозначим точку $x - \varepsilon$ через x'' . Так как $\|x'' - x\| < \delta$, то $(\overline{C} + x'') \cap A = \emptyset$. Значит, $\text{int}(C + x'') \cap A = \emptyset$. Заметим, что поскольку $\text{fr}(C + x'') \cap \text{fr}(C + x) = \emptyset$, то $\overline{C} + x \subset \text{int}(C + x'')$. Это означает, что для внутренней любого OC -семипространства $\text{int}(S_x^{OC}) = \mathbb{R}^n \setminus (\overline{C} + x)$, содержащей множество A , существует точка $x'' \notin A$ такая, что найдется замыкание OC -семипространства $\overline{S_{x''}^{OC}} = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(C + x'')$, причем $A \subseteq \overline{S_{x''}^{OC}}$ и $\overline{S_{x''}^{OC}} \subset \text{int}(S_x^{OC})$. Следовательно, $\text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A] \subseteq \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]$. Таким образом, мы доказали, что $\text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A] = \text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A]$. Лемма доказана.

Нами получена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть O – конечное множество направлений частичной выпуклости, содержащее базис $\mathbb{R}^n$. Тогда OC -выпуклая оболочка $\text{conv}^{OC}[A]$ произвольного компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ является функционально O -выпуклым множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $\text{conv}^{OC}[A] = \text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A]$. Пусть $S_x^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x)$ – произвольное OC -семипространство в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$. Так как конечное O содержит базис $\mathbb{R}^n$, то C – замкнутый конус с $\dim(C) = n$. Поэтому $S_x^{OC} = \text{int}(S_x^{OC})$. Значит, $\text{conv}^{OC}[A] = \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]$. Согласно лемме 2 $\text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A] = \text{conv}_{\text{int}}^{OC}[A]$. Следовательно, $\text{conv}^{OC}[A] = \text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A]$. Заметим, что если замыкание произвольного OC -семипространства функционально O -выпукло, то $\text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A]$ (а следовательно, и $\text{conv}^{OC}[A]$) также функционально O -выпукла. Достаточно доказать функциональную O -выпуклость замыкания произвольного OC -семипространства в точке 0 , так как функциональная O -выпуклость сохраняется при параллельном переносе. Зафиксируем произвольное OC -семипространство $S_0^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus C$ в точке 0 . Так как O конечно, то конус C многогранный. Следовательно, его можно представить в виде $C =$

$\bigcap_{i=1}^m H_i$, где $H_1, \dots, H_m$ – замкнутые полупространства. Для каждого H_i введем функцию $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f_i(x) = \begin{cases} d(x, \leq \text{fr}(H_i)), & \text{если } x \in H_i, \\ 0, & \text{если } x \notin H_i. \end{cases}$$

Отметим, что все f_i являются неотрицательными выпуклыми (в классическом смысле) функциями. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \prod_{i=1}^m f_i(x).$$

Заметим, что $\overline{S_0^{OC}} = \mathbb{R}^n \setminus \text{int}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Покажем, что f – O -выпуклая функция. Выберем произвольную пару противоположных векторов $v, w \in O$, $v = -w$. Поскольку C содержит половинное множество векторов из O , то либо $v \in C$, либо $w \in C$. Для определенности положим, что $v \in C$. Рассмотрим функцию $g^{x,v}(t) = f(x + vt)$, $t \in \mathbb{R}$. Так как $v \in C$, то каждая функция $g_i^{x,v}(t) = f_i(x + vt)$ является неотрицательной неубывающей (классически) выпуклой функцией от аргумента $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, их произведение $g^{x,v}(t) = \prod_{i=1}^m g_i^{x,v}(t)$ также будет неотрицательной неубывающей выпуклой функцией. Рассмотрим теперь функцию $g^{x,w}(t) = f(x + wt)$. Так как $g^{x,w}(t) = g^{x,v}(-t)$, то $g^{x,w}(t)$ будет неотрицательной невозрастающей выпуклой функцией. Таким образом, мы построили неотрицательную O -выпуклую функцию $f(x)$, обращающуюся в нуль на $\overline{S_0^{OC}}$ и принимающую всюду на $\mathbb{R}^n \setminus \overline{S_0^{OC}}$ ненулевые значения. Значит, S_0^{OC} функционально O -выпукло. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть O – конечное множество направлений частичной выпуклости, содержащее базис $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $A \subset \mathbb{R}^n$ такого, что $\text{conv}^{OC}[A] \neq \mathbb{R}^n$, множество $\text{conv}_{\text{fr}}^{OC}[A]$ функционально O -выпукло.

Исследуем топологические свойства OC -выпуклых множеств. Пусть O конечно и

$$\mathbb{R}^n \setminus (C_1 + x), \quad \mathbb{R}^n \setminus (C_2 + x), \quad \dots, \quad \mathbb{R}^n \setminus (C_m + x)$$

– перечисление всех OC -семипространств в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. Если конечное O содержит базис $\mathbb{R}^n$ и A – компактное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\text{conv}^{OC}[A]$ – также компакт в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем замкнутость и ограниченность $\text{conv}^{OC}[A]$. По определению $\text{conv}^{OC}[A]$ представляет собой пересечение всех OC -семипространств, содержащих A . Выберем произвольно одно такое OC -семипространство $\mathbb{R}^n \setminus (C_i + x)$. Тогда $(C_i + x) \cap A = \emptyset$. Так как O конечно, то C_i – замкнутый конус. Следовательно, в пространстве $\mathbb{R}^n$ между множествами $x + C_i$ и A существует ненулевое расстояние δ . Так как O содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$, то C_i также будет содержать базис $\mathbb{R}^n$. Поэтому $\text{int}(C_i + x) \neq \emptyset$ и мы можем выбрать точку $x' = x + \varepsilon$ такую, что

$$x' \in \text{int}(C_i + x) \quad \text{и} \quad \|x' - x\| < \delta.$$

Очевидно, что $C_i + x' \subset C_i + x$ и

$$\text{fr}(C_i + x') \cap \text{fr}(C_i + x) = \emptyset.$$

Используя параллельный перенос множеств $C_i + x'$ и $C_i + x$ по вектору $-\varepsilon$, получаем, что $C_i + x' - \varepsilon \subset C_i + x - \varepsilon$, или

$$C_i + x \subset C_i + (x - \varepsilon).$$

Обозначим точку $x - \varepsilon$ через x'' . Так как $\|x'' - x\| < \delta$, то $C_i + x'' \cap A = \emptyset$. Значит и $\text{int}(C_i + x'') \cap A = \emptyset$. Заметим, что поскольку $\text{fr}(C_i + x'') \cap \text{fr}(C_i + x) = \emptyset$, то $C_i + x \subset \text{int}(C_i + x'')$. Это означает, что для любого OC -семипространства $\mathbb{R}^n \setminus (C_i + x)$, содержащего все множество A , существует точка $x'' \notin A$ со следующим свойством:

$$\mathbb{R}^n \setminus (\text{int}(C_i) + x'') \subset \mathbb{R}^n \setminus (C_i + x) \quad \text{и} \quad A \subset \mathbb{R}^n \setminus (\text{int}(C_i) + x'').$$

Другими словами, для любого OC -семипространства $S_x^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C_i + x)$, содержащего A , существует точка $x'' \notin A$ такая, что найдется замыкание $\overline{S_{x''}^{OC}} = \mathbb{R}^n \setminus (\text{int}(C_i) + x'')$, причем $A \subseteq \overline{S_{x''}^{OC}}$ и $\overline{S_{x''}^{OC}} \subseteq S_x^{OC}$. Тогда $\text{conv}^{OC}[A] \subseteq \overline{\text{conv}^{OC}[A]}$. Утверждение $\text{conv}^{OC}[A] \subseteq \overline{\text{conv}^{OC}[A]}$ очевидно. Таким образом, если O содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$, то

$$\text{conv}^{OC}[A] = \overline{\text{conv}^{OC}[A]}.$$

В то же время OC -выпуклая оболочка $\text{conv}^{OC}[A]$ содержится в классически выпуклой оболочке $\text{conv}[A]$. Так как $\text{conv}[A]$ ограничена, то и $\text{conv}^{OC}[A]$ ограничена. Итак, мы доказали замкнутость и ограниченность $\text{conv}^{OC}[A]$. Теорема доказана.

Аналогично обычной выпуклости [10], OC -выпуклая оболочка замкнутого неограниченного множества может быть незамкнутой. Например, пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы замкнутое неограниченное множество

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq |x| - \frac{1}{1+x^2} \right\} \quad \text{и} \quad |O| = \left\{ \pm \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Тогда $\text{conv}^{OC}[A] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < |x|\}$ – открытое множество. Ранее мы показали, что если O бесконечно, то OC -выпуклая оболочка компакта может быть некомпактна, в отличие от классической выпуклости.

Рассмотрим свойства отделимости OC -выпуклых множеств. С точки зрения теории абстрактной выпуклости [3], непустое OC -выпуклое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *полупространством* OC -выпуклости (или сокращенно *OC -полупространством*), если его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus A$ не пусто и OC -выпукло. Заметим, что любое OC -семипространство $S_x^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus (C + x)$ в произвольной точке x является OC -полупространством, так как OC -выпуклость его дополнения $\mathbb{R}^n \setminus S_x^{OC}$ следует из обычной выпуклости (а, значит, и OC -выпуклости) множества $C + x$. Тогда, с точки зрения теории абстрактной выпуклости [3] OC -выпуклость будет регулярной, т.е. для любого непустого OC -выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и любой точки $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$ существует OC -полупространство T , содержащее A и не пересекающееся с точкой a . В качестве T можно взять подходящее OC -семипространство S_a^{OC} в точке a , где $A \subseteq S_a^{OC}$. Из определения OC -выпуклости

следует, что такое OC -семипространство всегда существует. OC -выпуклые множества A, B называются *отделимыми*, если существует OC -полупространство T такое, что $A \cap T = \emptyset$ и $B \subseteq T$. По сравнению с обычной выпуклостью отделимость OC -выпуклых множеств не обладает аналогичными свойствами. Можно построить такие OC -выпуклые компактные множества A, B , которые неотделимы никаким OC -полупространством. Например, пусть в $\mathbb{R}^2$ заданы множество направлений $O = \{\pm(0, 1), \pm(1, 0)\}$ и множества точек

$$A = [(-1, 0), (1, 0)] \cup [(0, 0), (0, 3)], \quad B = \{(-1, 1), (1, 2)\}.$$

Заметим следующее свойство любого OC -полупространства. Если точка x принадлежит OC -полупространству H , то хотя бы один из лучей $\{\alpha v + x \mid \alpha \leq 0\}$ или $\{\alpha v + x \mid \alpha \geq 0\}$ будет принадлежать H , где v – некоторый фиксированный вектор из O . Попробуем найти такое OC -полупространство, что $A \cap T = \emptyset$ и $B \subseteq T$. Заметим, что согласно вышеупомянутому свойству, луч $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1, y \geq 1\}$ целиком лежит в H , так как $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1, y \leq 1\} \cap A \neq \emptyset$. Тогда отрезок $[(-1, 2), (1, 2)]$ также принадлежит H . Но $A \cap [(-1, 2), (1, 2)] \neq \emptyset$. Следовательно, $A \cap H \neq \emptyset$. Получаем противоречие с требованием отделимости множеств A и B .

Следуя работе [3], введем числовые характеристики OC -выпуклости. Приведем уточненную оценку числа OC -семипространств в фиксированной точке в случае, когда O конечно. Пусть $m = |O|/2$. Обозначим оценку количества максимальных острых выпуклых конусов в пространстве $\mathbb{R}^n$, порожденных подмножествами векторов из O , через $q(n, m)$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Если конечное O содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, то*

$$q(n, m) \leq \min \left\{ 2^m, 2^n \prod_{i=1}^{n-1} C_m^i \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что так как O конечно и содержит базис $\mathbb{R}^n$, то все максимальные острые выпуклые конусы, порожденные половинными подмножествами из O , являются невырожденными многогранными конусами и содержат $(n - 1)$ -мерные грани. Количество всевозможных гиперплоскостей, проведенных через начало координат, на которые опираются $(n - 1)$ -мерные грани этих максимальных конусов, очевидно, не превышает C_m^{n-1} . Любая $(n - 1)$ -мерная грань произвольного максимального конуса, лежащая в некоторой гиперплоскости H , является максимальным острым выпуклым конусом для множества направлений $O \cap H$. Тогда количество $(n - 1)$ -мерных граней всех максимальных конусов в $\mathbb{R}^n$ не превосходит $C_m^{n-1} q(n - 1, m)$. Кроме того, так как максимальные острые выпуклые конусы невырождены, то каждая $(n - 1)$ -мерная грань является общей в точности для двух максимальных конусов. Гиперплоскость H можно рассматривать как линейное подпространство размерности $n - 1$ и $O \cap H$ будет содержать базис H . Оценим число OC -семипространств в $\mathbb{R}^3$. Выделим произвольное половинное множество $M \subset O$. Заметим, что для любого двухэлементного подмножества векторов $v_i, v_j \subseteq M$ можно сопоставить четыре острых выпуклых конуса

$$\text{CH}\{-v_i, -v_j\}, \quad \text{CH}\{-v_i, v_j\}, \quad \text{CH}\{v_i, -v_j\}, \quad \text{CH}\{v_i, v_j\}.$$

Число всех двухэлементных подмножеств векторов из M равно C_m^2 . Тогда, очевидно, число всех острых конусов, порожденных двухэлементными подмножествами векторов из O , равно $4C_m^2$. Поэтому число 2-мерных граней максимальных острых выпуклых конусов в $\mathbb{R}^3$ не превышает $4C_m^2$, а число самих конусов – $8C_m^2$. Получаем следующую рекуррентную формулу для оценки количества максимальных конусов:

$$\begin{aligned} q(3, m) &\leq 8C_m^2, \\ q(n, m) &\leq 2C_m^{n-1}q(n-1, m). \end{aligned}$$

Очевидно, что $q(n, m) \leq 2^m$, где 2^m – число всех половинных подмножеств векторов из O . Тогда

$$q(n, m) \leq \min \left\{ 2^m, 2^n \prod_{i=1}^{n-1} C_m^i \right\} \quad \text{при } n \geq 3.$$

Теорема доказана.

Числом Каратеодори OC -выпуклости (обозначаемым буквой c) называется такое наименьшее число k (если оно существует), что для любого конечного множества $A \subset X$ выполняется соотношение

$$\text{conv}^{OC}[A] = \bigcup \{ \text{conv}^{OC}[B] \mid B \subseteq A, |B| \leq k \}.$$

Числом замены OC -выпуклости (обозначаемым буквой e) называется такое наименьшее число $k \geq 1$, что для любого множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $k \leq |A| \leq \infty$, и для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется соотношение

$$\text{conv}^{OC}[A] \subseteq \bigcup \{ \text{conv}^{OC}[x \cup (A \setminus \{a\})] \mid a \in A \}.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть конечное O содержит базис пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $m = |O|/2$. Тогда число Каратеодори OC -выпуклости в $\mathbb{R}^n$ оценивается так:

$$c \leq \min \left\{ 2^m, 2^n \prod_{i=1}^{n-1} C_m^i \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано произвольное конечное $A \subset \mathbb{R}^n$. Заметим, что соотношение

$$\text{conv}^{OC}[A] = \bigcup \{ \text{conv}^{OC}[B] \mid B \subseteq A, |B| \leq k \}$$

выполняется тогда и только тогда, когда для любого $a \in \text{conv}^{OC}[A]$ существует множество $B \subseteq A$, $|B| \leq k$, такое, что $a \in \text{conv}^{OC}[B]$. Если $a \in A$, то в качестве множества B можно выбрать $\{a\}$. Пусть $a \notin A$. Заметим, что $a \in \text{conv}^{OC}[A]$ тогда и только тогда, когда $a \notin \text{ext}^{OC}[A \cup \{a\}]$. В этом случае не существует OC -семипространства S_a^{OC} такого, что $A \subseteq S_a^{OC}$. Следовательно, для любого S_a^{OC} найдется $x \in A$ такой, что $x \notin S_a^{OC}$. Число семипространств в точке a не превышает

$$\min \left\{ 2^m, 2^n \prod_{i=1}^{n-1} C_m^i \right\}$$

согласно теореме 2. Пусть $S_{a,1}^{OC}, \dots, S_{a,l}^{OC}$ – перечисление этих семипространств,

$$l \leq \min \left\{ 2^m, 2^n \prod_{i=1}^{n-1} C_m^i \right\}.$$

Тогда можно выбрать k точек $x_1, \dots, x_k \in A$, каждая из которых принадлежит хотя бы одному из OC -семипространств $S_{a,1}^{OC}, \dots, S_{a,l}^{OC}$, $k \leq l$. Значит, мы можем задать

$$B = \{x_1, \dots, x_k\}, \quad |B| = k \leq \min \left\{ 2^m, 2^n \prod_{i=1}^{n-1} C_m^i \right\}.$$

Тогда для любого S_a^{OC} найдется $x \in B$ такой, что $x \notin S_a^{OC}$. Следовательно, $a \notin \text{ext}^{OC}[B \cup \{a\}]$ и, поэтому $a \in \text{conv}^{OC}[B]$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть O конечно и $m = |O|/2$. Тогда число замены OC -выпуклости в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, оценивается так:

$$e \leq \min \left\{ 2^m + 1, 1 + 2^n \prod_{i=1}^{n-1} C_m^i \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из соотношения $e \leq c + 1$ (см. [3]).

Числом Хелли h (обобщенной) выпуклости называется такое наименьшее число $k \geq 0$ (если оно существует), что любое конечное семейство выпуклых множеств имеет непустое пересечение, как только в нем имеет непустое пересечение каждое подсемейство из k множеств. Если такое число k не существует, то полагаем $h = \infty$.

Числом Радона r (обобщенной) выпуклости называется такое наименьшее число $k \geq 0$ (если оно существует), что любое множество A , состоящее из k и более точек можно разбить на два непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются. Если такое число k не существует, то полагаем $r = \infty$.

Для OC -выпуклости справедлива следующая

ТЕОРЕМА 8. Числа Хелли h и Радона r для OC -выпуклости бесконечны, если OC -выпуклость не совпадает с обычной выпуклостью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем OC -семипространство $S_0^{OC} = \mathbb{R}^n \setminus C$ в точке 0 , которое не совпадает с каким-нибудь семипространством обычной выпуклости. Тогда существует такой вектор $v \in S^{n-1} \setminus O$, что лучи $\{\alpha v \mid \alpha \geq 0\}$ и $\{\alpha v \mid \alpha \leq 0\}$ не содержатся в C . Следовательно, для любой точки x , принадлежащей прямой $l_v = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, OC -семипространство $S_x^{OC} = S_0^{OC} + x$ содержит всю прямую l_v кроме точки x . Тогда для любого $A \in l_v$ справедливо $\text{conv}^{OC}[A] = A$. Следовательно, $h = r = \infty$. Теорема доказана.

Согласно работе [8] множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *нетривиальным*, если его OC -выпуклая оболочка $\text{conv}^{OC}[A] \neq A$. Назовем множество A *k -нетривиальным*, если для любого $B \subseteq A$ такого, что $|B| = k$, выполняется условие $\text{conv}^{OC}[B] \neq B$.

ТЕОРЕМА 9. Любое k -элементное 2-нетривиальное множество A , где $k \geq 2 + (|O|/2)$, можно разбить на два непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную точку $a_0 \in A$, тогда остальные $k-1$ точек должны размещаться на O -прямых, проходящих через точку a_0 вследствие 2-нетривиальности A . Так как таких O -прямых, проходящих через точку a_0 , может быть не более $|O|/2$, а число остальных точек не менее $1 + (|O|/2)$, то найдется (по принципу ящиков Дирихле) O -прямая, содержащая по меньшей мере три точки множества A (точку a_0 и две остальные точки, скажем a_1, a_2). Для определенности положим (без потери общности), что a_1 – внутренняя точка отрезка $[a_0, a_2]$. Тогда выбирая множества B и C таким образом, что $a_0, a_2 \in B, a_1 \in C, B \cap C = \emptyset$ и $B \cup C = A$, получаем

$$a_1 \in \text{conv}^{OC}[B] \cap \text{conv}^{OC}[C] \neq \emptyset.$$

Теорема доказана.

Покажем, что в случае, когда множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и O конечны, OC -выпуклая оболочка $\text{conv}^{OC}[A]$ представляет собой объединение конечного числа многогранников.

Выведем формулу, описывающую $\text{conv}^{OC}[A]$. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. В произвольной точке $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$ зададим перечисление OC -сепипространств

$$\mathbb{R}^n \setminus (C_1 + a), \quad \dots, \quad \mathbb{R}^n \setminus (C_m + a).$$

Заметим, что точка a принадлежит $\text{conv}^{OC}[A]$ тогда и только тогда, когда

$$a \notin \text{ext}^{OC}[\{a_1, \dots, a_k\} \cup \{a\}].$$

Это означает, что

$$(C_i + a) \cap A \neq \emptyset \quad \forall i \in \overline{1, m}. \quad (2)$$

Любое многогранное множество $C_i + a$ можно записать в виде решений системы линейных уравнений $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{(i)}x \geq A^{(i)}a\}$, где $A^{(i)}$ – матрица, соответствующая конусу C_i . Тогда, используя формулу (2), можно доказать следующее утверждение:

$$\text{conv}^{OC}[\{a_1, \dots, a_k\}] = \bigcap_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^k \{a \in \mathbb{R}^n \mid A^{(i)}a_j \geq A^{(i)}a\} \right) \quad (3)$$

Так как каждое классически выпуклое множество является OC -выпуклым, то классически выпуклая оболочка $\text{conv}[\{a_1, \dots, a_k\}]$ содержит в себе $\text{conv}^{OC}[\{a_1, \dots, a_k\}]$. А поскольку любая классически выпуклая оболочка конечного множества точек ограничена, то и $\text{conv}^{OC}[\{a_1, \dots, a_k\}]$ также ограничена. С учетом формулы (3) получаем, что $\text{conv}^{OC}[\{a_1, \dots, a_k\}]$ представляет собой объединение конечного числа ограниченных многогранных множеств (многогранников).

В случае, когда O бесконечно, OC -выпуклую оболочку можно определить следующим образом. Пусть $\{\mathbb{R}^n \setminus C_\alpha\}_\alpha$ – бесконечное (возможно несчетное) перечисление всех OC -сепипространств в точке 0 . Тогда

$$\text{conv}^{OC}[A] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \alpha [(C_\alpha + x) \cap A \neq \emptyset]\}.$$

Таким образом, учитывая наличие алгоритма перечисления OC -семипространств с полиномиальной скоростью [4] и используя формулу (3), мы располагаем эффективным методом построения OC -выпуклых оболочек конечных множеств точек в $\mathbb{R}^n$ при произвольном конечном множестве направлений. Отметим, что в настоящее время известны лишь алгоритмы построения самих частично выпуклых оболочек в $\mathbb{R}^2$ для двух направлений [1], а для некоторых аппроксимаций частичной выпуклости (например, для функциональной частичной выпуклости [8]) – только для направлений по осям декартовых координат в $\mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rawlins G., Wood D. Ortho-convexity and its generalizations // Computational Morphology / ed. Toussaint G. T. Amsterdam: North-Holland, 1988. P. 137–152.
- [2] Метельский Н. Н., Найдено В. Г. Частично выпуклые оболочки в пространстве $\mathbb{R}^n$ // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук. 1999. № 4. С. 47–52.
- [3] Солтан В. П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984.
- [4] Метельский Н. Н., Найдено В. Г. Алгоритмические аспекты частичной выпуклости // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 3. С. 399–410.
- [5] Метельский Н. Н., Найдено В. Г. Об одном классе семипространств частичной выпуклости // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук. 2000. № 1. С. 56–59.
- [6] Naidenko V. G. Directionally convex set and its application to an optimization problem // Proc. Int. Workshop “Discrete Optimization Methods in Scheduling and Computer-Aided Design”, Minsk, Republic of Belarus, September 5–6, 2000. Minsk: Institute of Engineering Cybernetics, 2000. P. 159–161.
- [7] Klee V. L. The structure of semispaces // Math. Scand. 1956. V. 4. P. 54–64.
- [8] Matoušek J. On directional convexity // Discrete Comput. Geom. 2001. P. 389–403.
- [9] Matoušek J., Plechac P. On functionally separately convex hulls // Discrete Comput. Geom. 1998. P. 105–130.
- [10] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
E-mail: naidenko@im.bas-net.by

Поступило
12.07.2002