Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Х. Рахмонов, Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 564–572

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 04:05:59

УДК 511

ТЕРНАРНАЯ ЗАДАЧА ЭСТЕРМАНА С ПОЧТИ РАВНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

З. Х. Рахмонов

Доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде суммы двух простых и квадрата натурального, когда они почти равны.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Эстерман [1] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N,$$

где p_1, p_2 – простые числа, m – натуральное число.

Карацуба предложил исследовать эту задачу с более жесткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны. Теорема [2], [3] о поведении тригонометрических сумм с простыми числами, переменное суммирование которых принимает значения из коротких интервалов, в сочетании с оценками специальных тригонометрических сумм позволили доказать теорему Эстермана с почти равными слагаемыми.

ТЕОРЕМА. Пусть N – достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$ – число представлений N суммой двух простых чисел p_1, p_2 и квадрата натурального m с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H.$$

Тогда при $H \geq N^{3/4} \mathcal{L}^3$, $\mathcal{L} = \ln N$, справедлива асимптотическая формула

$$I(N, H) = \frac{3\sigma}{2} \frac{H^2}{\sqrt{N/3} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N} \mathcal{L}^3}\right),$$

$$\sigma = \prod_p \left(1 + \left(\frac{N}{p}\right) \frac{1}{(p-1)^2}\right), \quad \left(\frac{N}{p}\right) \text{ – символ Лежандра.}$$

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 [4]. Пусть действительная функция $f(u)$ и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют следующим условиям: $f'(u)$ монотонна, $|f'(u)| \geq m > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка

$$\int_a^b g(u) e(f(u)) du \ll \frac{M}{m}.$$

ЛЕММА 2 [5]. Пусть $f(u)$ в интервале (a, b) – вещественная дифференцируемая функция, причем внутри интервала ее производная $f'(u)$ монотонна и знакопостоянна и при постоянном δ таком, что $0 < \delta < 1$, удовлетворяет неравенству $f'(u) \leq \delta$. Тогда имеем

$$\sum_a^b e(f(n)) = \int_a^b e(f(u)) du + \theta \left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta} \right).$$

ЛЕММА 3 [5]. Пусть $\alpha = a/q + \theta/q^2$, $(a, q) = 1$, $q \geq 1$, $|\theta| \leq 1$. Тогда при любом β , $U > 0$, $P \geq 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^P \min \left(U, \frac{1}{\|\alpha n + \beta\|} \right) \leq 6 \left(\frac{P}{q} + 1 \right) (U + q \ln q).$$

Пусть $N(\alpha, T, \chi)$ – число нулей $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ в области $\operatorname{Re} s \geq \alpha \geq 1/2$, $|\operatorname{Im} s| \leq T$. Если χ – главный характер, тогда $N(\sigma, T, \chi) = N(\sigma, T)$ – число нулей функции Римана $\zeta(s)$ в указанной области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $c \geq 2$, $B \geq 1$ – абсолютные постоянные, $T \geq T_0 > 0$, $T^\theta H < T$, $\theta > 0$. Тогда оценки вида

$$\sum_{\chi \bmod q} [N(\alpha, T + H, \chi) - N(\alpha, T, \chi)] \ll (qT)^{c(1-\alpha)} (\ln qT)^B \quad (1)$$

называются *плотностными теоремами в коротких прямоугольниках критической полосы*.

Жан Тао [6] доказал, что если $H > T^{1/3}$, то соотношение (1) выполняется при $c = 8/3$, $B = 216$.

Приведем теорему, устанавливающую связь плотностных теорем для нулей L-рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы с оценками линейных тригонометрических сумм с простыми числами, переменное суммирование которых принимает значение из коротких интервалов, т.е. с суммами вида

$$S(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \tau.$$

ЛЕММА 4 [3]. Пусть в сумме $S(\alpha; x, y)$ выполнены оценки

$$x \geq x_0 > 2, \quad y \geq hx^{(c-1)/c} \exp(\ln x)^{0.76}, \quad \tau \geq \frac{y^2}{xh}, \quad h \leq x^{1/c}, \quad q \leq h.$$

Тогда справедливо равенство

$$S(\alpha; x, y) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \frac{\sin \pi \lambda y}{\pi \lambda} e \left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} \right) \right) + O \left(\frac{y l^{B+3}}{q^{1/2}} F(q, x) \right),$$

где $l = \ln x$, b – произвольное фиксированное неотрицательное число и

$$F(q, x) = \begin{cases} \exp(-\ln^4 \ln x), & \text{если } q \leq l^b, \\ 1, & \text{если } q > l^b. \end{cases}$$

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha = a/q + \lambda$, $(a, q) = 1$, $q \leq \tau$, $|\lambda| \leq 1/(q\tau)$, $\tau \geq 20y$, $y \leq x$, $\|t\| = \min(\{t\}, 1 - \{t\})$ и

$$m = \begin{cases} 2\lambda qx - \|2\lambda qx\|, & \text{если } \{2\lambda qx\} \leq 0.5, \\ 2\lambda qx + \|2\lambda qx\|, & \text{если } \{2\lambda qx\} \geq 0.5. \end{cases}$$

Тогда имеет место соотношение

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha n^2) = \frac{y}{q} \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{ak^2 + mk}{q}\right) \gamma(\lambda; x, y) + O(q),$$

где

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int_0^1 e\left(\lambda(x - uy)^2 - \frac{m(x - uy)}{q}\right) du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} T(\alpha; x, y) &= \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{x-y < qt+k \leq x} e\left(\left(\frac{a}{q} + \lambda\right)(qt+k)^2\right) \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{ak^2}{q}\right) \sum_{\frac{x-y-k}{q} < t \leq \frac{x-k}{q}} e(\lambda(qt+k)^2). \end{aligned}$$

Так как m целое, то

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{ak^2}{q}\right) \sum_{\frac{x-y-k}{q} < t \leq \frac{x-k}{q}} e(\lambda(qt+k)^2 - mt).$$

Применяя лемму 2 при $f(t) = \lambda(qt+k)^2 - mt$ и имея в виду, что

$$|f'(t)| \leq 2|\lambda|q(x - (qt+k)) + 0.5 \leq \frac{2y}{\tau} + 0.5 \leq 0.6,$$

имеем

$$\sum_{\frac{x-y-k}{q} < t \leq \frac{x-k}{q}} e(\lambda(qt+k)^2 - mt) = \int_{\frac{x-y-k}{q}}^{\frac{x-k}{q}} e(\lambda(qt+k)^2 - mt) dt + O(1).$$

Полагая $u = (x - k - qt)/y$, сделаем в последнем интеграле замену переменных, тогда

$$\begin{aligned} T(\alpha; x, y) &= \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{ak^2}{q}\right) \frac{y}{q} \int_0^1 e\left(\lambda(x - uy)^2 - \frac{m(x - uy - k)}{q}\right) du + O(q) \\ &= \frac{y}{q} \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{ak^2 + mk}{q}\right) \gamma(\lambda; x, y) + O(q). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, будем считать, что $H = 2N^{3/4}\mathcal{L}^{5/2}$. Пусть $Q = \mathcal{L}^5$, $\tau = H^2/NQ$, $\kappa\tau = 1$, $E = [-\kappa, 1 - \kappa]$. Имеем

$$I(N, H) = \int_E S_1^2(\alpha; N, H) T_1(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha,$$

$$S_1(\alpha; N, H) = \sum_{|p - N/3| \leq H} e(\alpha p); \quad T_1(\alpha; N, H) = \sum_{|n^2 - N/3| \leq H} e(\alpha n^2).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка E представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{(q\tau)}. \quad (2)$$

Легко видеть, что в этом представлении $0 \leq a \leq q - 1$, причем $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через E_1 обозначим множество тех α , для которых $q \leq Q$ в представлении (2), через E_2 обозначим оставшиеся α . Множество E_1 состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество E_1 на множества E_{11} и E_{12} следующим образом:

$$E_{11} = \left\{ \alpha : \alpha \in E_1, \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\mathcal{L}^2}{H} \right\}, \quad E_{12} = \left\{ \alpha : \alpha \in E_1, \frac{\mathcal{L}^2}{H} < \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau} \right\}.$$

Обозначим через I_{11} , I_{12} и I_2 соответственно интегралы по множествам E_{11} , E_{12} и E_2 . Имеем

$$I(N, H) = I_{11} + I_{12} + I_2.$$

В последней формуле первый член, т.е. I_{11} доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N, H)$, а I_{12} и I_2 входят в его остаточный член.

Вычисление интеграла I_{11} . По определению интеграла I_{11} имеем

$$I_{11} = \int_{E_{11}} S_1^2(\alpha; N, H) T_1(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a, q),$$

$$I(a, q) = \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^2/H} S_1^2\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) T_1\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) e\left(-\left(\frac{a}{q} + \lambda\right)N\right) d\lambda.$$

Выражая сумму $S_1(\alpha; N, H)$ через сумму $S(\alpha; x, y)$ и пользуясь леммой 4, находим

$$S_1\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) = \left(\ln\left(\frac{N}{3}\right)\right)^{-1} S\left(\frac{a}{q} + \lambda; \frac{N}{3} + H, 2H\right) + O(H^2 N^{-1} \mathcal{L}^{-1})$$

$$= \left(\ln\left(\frac{N}{3}\right)\right)^{-1} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) + O(H \exp(-\ln^4 \mathcal{L})).$$

Возводя обе части получившейся формулы в квадрат и имея в виду, что

$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) \leq H,$$

найдем

$$S_1^2\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) = \left(\ln\left(\frac{N}{3}\right)\right)^{-2} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) + O(H^2 \exp(-\ln^4 \mathcal{L})).$$

Пусть

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha n^2).$$

Пользуясь соотношением

$$\sqrt{\frac{N}{3} \pm H} = N_1 \pm H_1 + O(H^2 N^{-3/2}), \quad N_1 = \sqrt{\frac{N}{3}}, \quad H_1 = \frac{H}{2\sqrt{N/3}},$$

для $T_1(\alpha; N, H)$ имеем

$$\begin{aligned} T_1(\alpha; N, H) &= T\left(\alpha; \sqrt{\frac{N}{3} + H}, \sqrt{\frac{N}{3} + H} - \sqrt{\frac{N}{3} - H}\right) \\ &= T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1) + O(H^2 N^{-3/2}). \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя к сумме $T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$ лемму 5 и имея в виду, что

$$m = 2\lambda q(N_1 + H_1) \pm \|2\lambda q(N_1 + H_1)\| = 0,$$

найдем

$$T_1\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) = \frac{H}{q\sqrt{N/3}} S(a, q) \gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1) + O(q) + O(H^2 N^{-3/2}),$$

где

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int_0^1 e(\lambda(x - uy)^2) du, \quad S(a, q) = \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{ak^2}{q}\right) - \text{сумма Гаусса}.$$

Тем самым, для $I(a, q)$ находим

$$I(a, q) = \left(\ln\left(\frac{N}{3}\right)\right)^{-2} \frac{H}{\sqrt{N/3}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right) \int_0^1 F(t) dt + R_1,$$

где

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^2/H} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} e\left(\lambda\left(\frac{2N}{3} + \left(\sqrt{N/3} + \frac{H}{2\sqrt{N/3}} - t\frac{H}{\sqrt{N/3}}\right)^2 - N\right)\right) d\lambda, \\ R_1 &\ll [S_1^2(\alpha; N, H)(q + H^2 N^{-3/2}) + Hq^{-1} N^{-1/2} S(a, q) H^2 \exp(-\ln^4 \mathcal{L})] H^{-1} \mathcal{L}^2 \\ &\ll [H^2 \mathcal{L}^{-2}(q + H^2 N^{-3/2}) + H N^{-1/2} q^{-1/2} H^2 \exp(-\ln^4 \mathcal{L})] H^{-1} \mathcal{L}^2 \\ &\ll H Q + H^3 N^{-3/2} + H^2 N^{-1/2} \mathcal{L}^2 \exp(-\ln^4 \mathcal{L}) \ll H^2 N^{-1/2} \mathcal{L}^{-3} Q^{-3}. \end{aligned}$$

В интеграле $F(t)$ сделаем замену переменных и получим

$$F(t) = \frac{2H}{\pi} \int_{|u| \leq 2\pi \mathcal{L}^2} \frac{\sin^2 u}{u^2} e\left(\frac{u}{2\pi}(1-2t)\right) e\left(\frac{3Hu}{8\pi N}(1-2t)^2\right) du.$$

Пользуясь соотношением

$$e\left(\frac{3Hu}{8\pi N}(1-2t)^2\right) = 1 + O\left(\frac{u(1-2t)H}{N}\right) = 1 + O\left(\frac{uH}{N}\right),$$

находим

$$F(t) = \frac{2H}{\pi} \int_{|u| \leq 2\pi \mathcal{L}^2} \frac{\sin^2 u}{u^2} e\left(\frac{u}{2\pi}(1-2t)\right) du + O\left(\frac{H^2 \mathcal{L}}{N}\right).$$

Интегрируем обе части этого равенства по t от 0 до 1, затем интеграл по u заменим близким к нему несобственным интегралом, не зависящим от $\mathcal{L}$. Далее, пользуясь соотношениями

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du = \frac{3\pi}{8}, \quad \int_{2\pi \mathcal{L}^2}^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du \ll \mathcal{L}^{-6},$$

найдем

$$\int_0^1 F(t) dt = \frac{4H}{\pi} \left(\int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du - \int_{2\pi \mathcal{L}^2}^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du \right) + O\left(\frac{H^2 \mathcal{L}}{N}\right) = \frac{3H}{2} + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}^6}\right).$$

Подставив это в формулу для $I(a, q)$, найдем

$$I(a, q) = \frac{3H^2}{2\sqrt{N/3} \ln^2(N/3)} \frac{\mu^2(q)S(a, q)}{q\varphi^2(q)} e(-aN/q) + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N} \mathcal{L}^3} \left(\frac{1}{\sqrt{q} \varphi^2(q)} + \frac{1}{Q^3}\right)\right).$$

Следовательно,

$$I_{11} = \frac{3H^2}{2\sqrt{N/3} \ln^2(N/3)} \sum_{q \leq Q} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^q S(a, q) e(-aN/q) + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N} \mathcal{L}^3}\right).$$

Двойную сумму в последнем равенстве заменим близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от Q , т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right) &= \sigma(N) + R(N), \\ \sigma(N) &= \sum_{q=1}^\infty \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right), \\ |R(N)| &= \left| \sum_{q > Q} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right) \right| \\ &\leq \sum_{q > Q} \frac{\mu^2(q)}{\sqrt{q} \varphi(q)} \ll \sum_{q > Q} \frac{\ln \ln q}{q^{3/2}} \ll Q^{-1/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \Phi(q), \quad \Phi(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right).$$

Если q – четное безквадратное число и $(a, q) = 1$, то $S(a, q) = 0$. Действительно, если $q = 2p_1p_2 \cdots p_k$, то полагая $q_0 = q2^{-1}$, $q_i = qp_i^{-1}$, $i = \overline{1, n}$, представив a в виде $a = a_0q_0 + a_1q_1 + \cdots + a_kq_k$ и имея в виду, что $S(a_0q_0, 2) = 0$, получаем

$$S(a, q) = S(aq_0, 2)S(aq_1, p_1) \cdots S(aq_k, p_k) = S(a_0, 2)S(a_1, p_1) \cdots S(a_k, p_k) = 0.$$

Таким образом, не ограничивая общности, будем считать, что q – нечетное безквадратное число, т.е. $q = p_1p_2 \cdots p_k$. Пользуясь мультипликативностью $\Phi(q)$ и формулой, которая устанавливает связь между значениями символов Лежандра и значениями сумм Гаусса, находим

$$\Phi(q) = \prod_{i=1}^k \sum_{a_i=1}^{p_i-1} S(a_i, p_i) e\left(-\frac{a_iN}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^k S(1, p_i) \sum_{a_i=1}^{p_i-1} \left(\frac{a_i}{p_i}\right) e\left(-\frac{a_iN}{p_i}\right).$$

Если $(N, q) > 1$, то существует по крайней мере один p_i такой, что $N \equiv 0 \pmod{p_i}$. Поэтому, при $(N, q) > 1$, имеем

$$\Phi(q) = \Phi(qp_i^{-1})\Phi(p_i) = \Phi(qp_i^{-1})S(1, p_i) \sum_{a_i=1}^{p_i-1} \left(\frac{a_i}{p_i}\right) = 0.$$

Если $(N, q) = 1$, то

$$\Phi(q) = \prod_{i=1}^k S(1, p_i) \left(\frac{-N}{p_i}\right) \sum_{a_i=1}^{p_i-1} \left(\frac{a_i}{p_i}\right) e\left(-\frac{a_iN}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{-N}{p_i}\right) S^2(1, p_i) = \left(\frac{-N}{q}\right) S^2(1, q),$$

где

$$\prod_{i=1}^k \left(\frac{-N}{p_i}\right) = \left(\frac{-N}{q}\right) \quad - \text{символ Якоби.}$$

Следовательно,

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \Phi(q) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)^2} \left(\frac{-N}{p}\right) S^2(1, p)\right).$$

Пользуясь соотношением ($p \neq 2$)

$$\left(\frac{-1}{p}\right) S^2(1, p) = p,$$

найдем

$$\sigma(N) = \prod_p \left(1 + \left(\frac{N}{p}\right) \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{3\sigma(N)H^2}{2\sqrt{N/3} \ln^2(N/3)} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N} \mathcal{L}^3} + HQ^3 \mathcal{L} + \frac{H^3 Q^2 \mathcal{L}}{N^{3/2}} + \frac{H^2}{\sqrt{N} \mathcal{L}^2} Q^{-1/2+\varepsilon}\right) \\ &= \frac{3\sigma(N)H^2}{2\sqrt{N/3} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N} \mathcal{L}^3}\right). \end{aligned}$$

Оценка интеграла I_2 . Оценим $T_1(\alpha; N, H)$ для α из множества E_2 . Если $\alpha \in E_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad Q \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{(q\tau)}.$$

Согласно соотношению (3), имеем

$$\begin{aligned} T_1(\alpha; N, H) &\ll |T(\alpha, N_1 + H_1, 2H_1)| + HN^{-1/2} \mathcal{L}^{-2}, \\ N_1 &= \sqrt{\frac{N}{3}}, \quad H_1 = \frac{H}{2\sqrt{N/3}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как

$$\begin{aligned} |T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)|^2 &= \sum_{N_1 - H_1 < m, n \leq N_1 + H_1} e(\alpha(m^2 - n^2)) \\ &= \sum_{n_1 - H_1 < n \leq N_1 + H_1} \sum_{N_1 - H_1 - n < k \leq N_1 + H_1 - n} e(\alpha k(k + 2n)) \\ &\leq \sum_{|k| \leq 2H_1} \left| \sum_{N_1 - H_1 - k < n \leq N_1 + H_1 - k} e(2\alpha kn) \right| \\ &\leq \sum_{|k| \leq 2H_1} \min\left(2H_1, \frac{1}{|\sin 2\pi \alpha k|}\right) \leq \sum_{|k| \leq 2H_1} \min\left(2H_1, \frac{1}{2\|2\alpha k\|}\right), \end{aligned}$$

то применив к последней сумме лемму 3, найдем

$$|T(\alpha; x, y)|^2 \ll \left(\frac{H}{q\sqrt{N}} + 1\right) \left(\frac{H}{\sqrt{N}} + q \ln q\right) \ll \left(\frac{H^2}{QN} + \frac{H}{\sqrt{N}} + \tau\right) \mathcal{L}.$$

Подставляя найденное выражение в (4) и пользуясь значениями Q и τ , находим

$$T_1(\alpha, N, H) \ll \frac{H}{\sqrt{N}} \mathcal{L}^{-2}.$$

Следовательно,

$$I_2 \ll \max_{\alpha \in E_2} |T_1(\alpha, N, H)| \int_0^1 |S_1(\alpha; N, H)|^2 d\alpha \ll H^2 N^{-1/2} \mathcal{L}^{-3}.$$

Оценка интеграла I_{12} . Если $\alpha \in E_{12}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad \frac{\mathcal{L}^3}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{(q\tau)}, \quad 1 \leq q \leq Q.$$

Оценим $T_1(\alpha; N, H)$. Согласно соотношению (4) и лемме 5, имея в виду, что если $\alpha \in E_{12}$ и $H = 2N^{3/4}\mathcal{L}^{5/2}$, то $m = 2\lambda q(N_1 + H_1) \pm \|2\lambda q(N_1 + H_1)\| = 0$, найдем

$$T_1\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) \ll \frac{H}{q\sqrt{N}} |S(a, q)\gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1)| + HN^{-1/2}\mathcal{L}^{-2},$$

где

$$\gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1) = \int_0^1 e(\lambda(N_1 + H_1 - 2H_1u)^2) du.$$

Применяя к оценке интеграла $\gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1)$ лемму 1, полагая $f(t) = \lambda(N_1 + H_1 - 2H_1t)^2$ и имея в виду, что $f'(t) \geq \mathcal{L}^2$, находим

$$T_1\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) \ll HN^{-1/2}\mathcal{L}^{-2}.$$

Таким образом,

$$I_{12} \ll \max_{\alpha \in E_{12}} |T_1(\alpha, N, H)| \int_0^1 |S_1(\alpha; N, H)|^2 d\alpha \ll H^2 N^{-1/2} \mathcal{L}^{-3}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 11. P. 501–516.
- [2] Рахмонов З. Х. Средние значения функции Чебышева в коротких интервалах // Тр. международной конференции “Современные проблемы математики и механики” посвященной 175-летию П. Л. Чебышева. М.: МГУ, 1996. С. 125–189.
- [3] Рахмонов З. Х. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН РТ. 2000. Т. 43. № 3.
- [4] Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.
- [5] Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1976.
- [6] Zhan Tao. On representation of a large odd integer as a sum of three almost primes // Acta Math. Sinica. 1991. V. 7. № 3. P. 259–272.

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан
E-mail: zarullo@ac.tajik.net

Поступило
18.09.2001
Исправленный вариант
24.06.2002