Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Санду, Бесконечные независимые системы тождеств ассоциативной алгебры над бесконечным полем характеристики два, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 603–611

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:13:17

УДК 519.48

БЕСКОНЕЧНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВ АССОЦИАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ НАД БЕСКОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВА

Н. И. Санду

Пусть $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{D}$) означает многообразие ассоциативных (соответственно специальных йордановых) алгебр над бесконечным полем характеристики 2, определенное тождеством $((((x_1, x_2), x_3), ((x_4, x_5), x_6)), (x_7, x_8)) = 0$ (соответственно $((x_1 x_2 \cdot x_3)(x_4 x_5 \cdot x_6))(x_7 x_8) = 0$). В работе строятся бесконечные независимые системы тождеств в многообразии $\mathfrak{B}$ (соответственно в $\mathfrak{D}$). Отсюда выводится, что многообразии $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{D}$) содержит континуум различных не конечно базисруемых подмногообразий и что в $\mathfrak{B}$ (соответственно в $\mathfrak{D}$) имеются алгебры с неразрешимой проблемой равенства слов.

Библиография: 16 названий.

В [1] Шпехтом (см. также [2, вопрос 1.164]) сформулирована проблема о конечной базисруемости всякого многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль, которая совсем недавно положительно была решена Кемером [3]. Однако до сих пор не было известно, существуют ли не конечно базисруемые многообразия ассоциативных алгебр? Как отмечается в [4], теперь в этом и состоит проблема Шпехта. Заметим, что в такой формулировке проблема Шпехта поставлена и Мальцевым в [5, вопрос 2.39].

В данной работе строятся неконечно базисруемые многообразия ассоциативных алгебр над бесконечным полем F характеристики 2. Через $(a, b) = ab - ba$ обозначим коммутатор в алгебре, через $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ – коммутатор в группе, через $b^a = a^{-1}ba$ – сопряжение элемента b посредством элемента a в группе. Будем использовать также запись

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k) &= ((a_1, \dots, a_{k-1}), a_k), \\ [a_1, \dots, a_{k-1}, a_k] &= [[a_1, \dots, a_{k-1}], a_k].\end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ означает многообразие ассоциативных F -алгебр, определенное тождеством

$$((x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6), (x_7, x_8)) = 0, \quad (1)$$

$\mathfrak{C}$ (соответственно $\mathfrak{D}$) – многообразие лиевых F -алгебр (соответственно специальных йордановых F -алгебр), определенное тождеством

$$((x_1 x_2 \cdot x_3)(x_4 x_5 \cdot x_6))(x_7 x_8) = 0. \quad (2)$$

Обозначим также

$$\begin{aligned}\mu_k &= ((x, y, z), (x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2k-1}, x_{2k}), (x, y, z)), \\ \nu_k &= (\dots (((((xy)z)(x_1x_2))(x_3x_4)) \dots (x_{2k-1}x_{2k}))((xy)z)).\end{aligned}$$

Доказывается, что в многообразии $\mathfrak{B}$ система тождеств $\{\mu_k = 0 \mid k = 1, 2, \dots\}$ независима, т.е. никакое тождество этой системы не следует из остальных тождеств системы (теорема 1). Как следствие получается, что многообразие $\mathfrak{B}$ содержит континуум различных не конечно базлируемых подмногообразий и что в $\mathfrak{B}$ существуют алгебры с неразрешимой проблемой равенства слов.

Из теоремы 1 также следует, что система тождеств $\{\nu_k = 0 \mid k = 1, 2, \dots\}$ независима в многообразиях $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$. Этим получен отрицательный ответ на вопрос Слинько [2, вопрос 1.129] о конечной базлируемости многообразия разрешимых йордановых алгебр в случае разрешимого индекса 4 многообразия специальных йордановых алгебр над бесконечным полем характеристики 2.

Пусть A – ассоциативная алгебра с единицей 1 и B – ее подалгебра, удовлетворяющая тождеству

$$x^m = 0. \quad (3)$$

Тогда множество элементов $1 - B = \{1 - b \mid b \in B\}$ образуют группу и $(1 - b)^{-1} = 1 + b + b^2 + \dots + b^{m-1}$.

ЛЕММА 1. Пусть A – ассоциативная алгебра с единицей 1 и B – ее подалгебра, удовлетворяющая тождеству (3). Тогда для $u, v \in B$

$$[1 - u, 1 - v] = 1 + (1 + u + \dots + u^{m-1})(1 + v + \dots + v^{m-1})(u, v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}[1 - u, 1 - v] &= (1 - u)^{-1}(1 - v)^{-1}(1 - u)(1 - v) \\ &= (1 - u)^{-1}(1 - v)^{-1}(1 - u)(1 - v) - (1 - u)^{-1}(1 - v)^{-1}(1 - v)(1 - u) + 1 \\ &= 1 + (1 - u)^{-1}(1 - v)^{-1}((1 - u)(1 - v) - (1 - v)(1 - u)) \\ &= 1 + (1 - u)^{-1}(1 - v)^{-1}(1 - u, 1 - v) \\ &= 1 + (1 - u)^{-1}(1 - v)^{-1}(u, v) \\ &= 1 + (1 + u + \dots + u^{m-1})(1 + v + \dots + v^{m-1})(u, v).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть G – группа, F – поле (ассоциативное коммутативное кольцо с единицей) и FG – групповая алгебра (групповое кольцо) группы G . Напомним, что FG – это свободный F -модуль с базисом $\{g \mid g \in G\}$ и произведение для элементов этого базиса определяется как их произведение в группе G . Если H – подгруппа группы G , то через ωH обозначим правый идеал групповой алгебры FG , порожденный множеством $\{1 - h \mid h \in H\}$. Если $H = G$, то ωG называется *фундаментальным идеалом* групповой алгебры FG .

ЛЕММА 2 [6]. Пусть H – подгруппа группы G . Тогда

- 1) если элементы h_i порождают подгруппу H , то элементы $1 - h_i$ порождают правый идеал ωH ;
- 2) $1 - g \in \omega H$ тогда и только тогда, когда $g \in H$;
- 3) H является нормальной подгруппой в G тогда и только тогда, когда ωH – двусторонний идеал алгебры FG ;
- 4) если H – нормальная подгруппа группы G , то $F(G/H) = FG/\omega H$;
- 5) $\omega G = \{\sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \sum_{g \in G} \lambda_g = 0\}$;
- 6) фундаментальный идеал ωG порождается как F -модуль элементами вида $1 - g, g \in G$.

ЛЕММА 3 [7]. Фундаментальный идеал ωG групповой алгебры FG нильпотентен тогда и только тогда, когда G – конечная p -группа и F – поле характеристики p .

Рассмотрим теперь группы A_n, B_n и C_n , построенные в [8]. Группа A_n имеет представление

$$A_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_{2n} \mid a_i^2 = 1, [a_i, a_j, a_k] = 1 \text{ для всех } i, j, k \rangle.$$

Она нильпотентна ступени 2 и имеет показатель 4, а ее коммутант A' является элементарной абелевой 2-группой. Если $u \in A'$, то u можно представить как произведение

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 2n} [a_i, a_j]^{\beta_{ij}},$$

где $\beta_{ij} = 0; 1$. Пусть $\rho(u)$ означает сумму по модулю 2 коэффициентов одночленов

$$x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \dots x_{i_{2n-1}} x_{i_{2n}},$$

где $\{i_1, i_2, \dots, i_{2n}\} = \{1, 2, \dots, 2n\}$, в выражении

$$\prod_{1 \leq i, j \leq 2n} (1 + x_{ij})^{\beta_{ij}}.$$

Если $u \in A_n$, то через $\bar{u}$ обозначим образ u при гомоморфизме $A_n \rightarrow A_n/A'_n$.

Далее, $B_n = \langle b^u, c^k \mid u \in A_n, k \in A_n/A'_n \rangle$, где $b \notin A_n$ и B_n удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} (b^u)^2 &= (c^k)^2 = 1, & [b^u, b^v] &= 1, & \text{если } \bar{u} \neq \bar{v}, \\ [b^u, b^v] c^{\bar{u}\rho(uv^{-1})} &, & \text{если } \bar{u} &= \bar{v}, & [b^u, c^k] &= 1 \end{aligned}$$

для всех $u, v \in A_n, k \in A_n/A'_n$.

Наконец, группа C_n – это полупрямое произведение группы B_n и группы A_n . Из построения группы C_n следует, что C_n является конечной 2-группой.

В группе C_n верны тождества

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_8) = [[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6], [x_7, x_8]] = 1, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \beta_k(x, y, z, u; x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \\ &= [[x, y, z], [x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2k-1}, x_{2k}], [u, y, z]] \\ &\quad \times [[u, y, z], [x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2k-1}, x_{2k}], [x, y, z]] = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \gamma_k(x, y, z, u; x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \\ &= [[x, y, z], [x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2k-1}, x_{2k}], [x, y, u]] \\ &\quad \times [[x, y, u], [x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2k-1}, x_{2k}], [x, y, z]] = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta_k &= \delta_k(x, y, z; x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \\ &= [[x, y, z], [x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2k-1}, x_{2k}], [x, y, z]] = 1, \end{aligned} \quad (7)$$

если $k \neq n$, и верно неравенство

$$[[b, a_1, a_2], [a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}], [b, a_1, a_2]] \neq 1. \quad (8)$$

Тождества (4), (7) и неравенство (8) доказаны в [8]. По построению $C_n/B_n = A_n$ и группа A_n нильпотентна ступени 2. Поэтому для $x, y, z \in C_n$ имеем $[x, y, z] \in B_n$. При доказательстве леммы 2 из [8] показано, что для $p_1, p_2 \in B_n, u_1, u_2, \dots, u_k \in A_n$ верно равенство $[p_1, u_1, u_2, \dots, u_k, p_2] = [p_2, u_1, u_2, \dots, u_k, p_1]$. Подгруппа B_n нормальна в группе C_n . Тогда $[p_2, u_1, u_2, \dots, u_k] \in B_n$ и из определения группы B_n следует, что $[p_2, u_1, u_2, \dots, u_k, p_1]^2 = 1$. Тогда, используя эти равенства, аналогично доказательству тождества (9) из [8] показывается, что в группе C_n верны и тождества (5), (6). Из (4)–(8) вытекает

ЛЕММА 4. *В многообразии групп тождество $\delta_n = 1$ не является следствием системы тождеств $\beta_k = 1, \gamma_k = 1, \delta_k = 1$ при $k \neq n$ и $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_8) = 1$.*

В дальнейшем будем считать, что F – бесконечное поле характеристики 2. Группа C_n является конечной 2-группой, поэтому из леммы 3 следует, что фундаментальный идеал ωC_n нильпотентен. Тогда, как показано перед леммой 1, множество $R_n = 1 - \omega C_n$ образуют группу. Очевидно, что $C_n \subseteq R_n$, поэтому $FC_n \subseteq FR_n$ и $\omega C_n \subseteq \omega R_n$. Но, используя п. 6) леммы 2, легко показать, что $\omega C_n = \omega R_n$. Через r обозначим элементы группы R_n , и пусть K – подгруппа группы R_n , порожденная всеми выражениями

$$\begin{aligned} &\alpha(r_1, r_2, \dots, r_8), \quad \beta_k(r_i, r_j, r_s, r_t; r_1, r_2, \dots, r_{2k}), \\ &\gamma_k(r_i, r_j, r_s, r_t; r_1, r_2, \dots, r_{2k}), \quad \delta_k(r_i, r_j, r_s; r_1, r_2, \dots, r_{2k}) \end{aligned} \quad (9)$$

при $k \neq n$. Очевидно, что подгруппа K нормальна в R_n и что в R_n/K верны тождества (4)–(7). Через d, g_i обозначим образы элементов b, a_i при гомоморфизме $R_n \rightarrow R_n/K = T_n$.

По лемме 4 тождество $\delta_n = 1$ не является следствием системы тождеств (4)–(7). Тогда из (8) следует, что в группе T_n верно неравенство

$$\delta_n(d, g_1, g_2; g_1, g_2, \dots, g_{2k}) \neq 1. \quad (10)$$

Подгруппа K нормальна в R_n . Тогда по п. 3) леммы 2 ωK будет идеалом алгебры ωR_n . Из п. 5) леммы 2 следует, что гомоморфизм $FR_n \rightarrow FR_n/\omega K$ сохраняет сумму

коэффициентов. Поэтому из соотношения $F(R_n/K) \cong FR_n/\omega K$ (п. 5) леммы 2) следует, что $\omega(R_n/K) \cong \omega R_n/\omega K$. Но $\omega R_n = \omega C_n$, и алгебра ωC_n нильпотентна. Тогда и алгебра $\omega(R_n/K) = \omega T_n$ нильпотентна, например, индекса m . Через u_i в дальнейшем будем обозначать элементы группы C_n , а через v_i – образ элементов u_i при гомоморфизме $R_n \rightarrow R_n/K$. Пусть $\alpha_i \in F$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} r_i &= 1 - \alpha_i w_i, & w_i &= 1 - v_i, \\ \{x, y\} &= -(1 + x + \dots + x^{m-1})(1 + y + \dots + y^{m-1})(x, y), \\ \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i\} &= \{\{x_1, \dots, x_{i-1}\}, x_i\}. \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует, что $[r_i, r_j] = 1 - \{\alpha_i w_i, \alpha_j w_j\}$, а отсюда непосредственно получаем, что

$$[r_1, r_2, \dots, r_k] = 1 - \{\alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \dots, \alpha_k w_k\}. \quad (11)$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} \theta(x_1, x_2, \dots, x_8) &= \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}, \{x_7, x_8\}\}, \\ \eta_k(x_s, x_t, x_i, x_j; x_1, x_2, \dots, x_{2k}) &= \{\{x_s, x_i, x_j\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2k-1}, x_{2k}\}, \{x_t, x_i, x_j\}\} \\ &\quad - \{\{x_t, x_i, x_j\}, \{x_s, x_i, x_j\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2k-1}, x_{2k}\}\}, \\ \xi_k(x_s, x_t, x_i, x_j; x_1, x_2, \dots, x_{2k}) &= \{\{x_i, x_j, x_s\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2k-1}, x_{2k}\}, \{x_i, x_j, x_t\}\} \\ &\quad - \{\{x_i, x_j, x_t\}, \{x_i, x_j, x_s\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2k-1}, x_{2k}\}\}, \\ \lambda_k(x_i, x_j, x_s; x_1, x_2, \dots, x_{2k}) &= \{\{x_i, x_j, x_s\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2k-1}, x_{2k}\}, \{x_i, x_j, x_s\}\}. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что в алгебре ωT_n верны равенства

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(\alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \dots, \alpha_8 w_8) = 0, \\ \eta_k &= \eta_k(\alpha_s w_s, \alpha_t w_t, \alpha_i w_i, \alpha_j w_j; \alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \dots, \alpha_{2k} w_{2k}) = 0, \\ \xi_k &= \xi_k(\alpha_s w_s, \alpha_t w_t, \alpha_i w_i, \alpha_j w_j; \alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \dots, \alpha_{2k} w_{2k}) = 0, \\ \lambda_k &= \lambda_k(\alpha_i w_i, \alpha_j w_j, \alpha_s w_s; \alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \dots, \alpha_{2k} w_{2k}) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Действительно, подставляем в (9) $r_i = 1 - \alpha_i(1 - u_i)$, $\alpha_i \in F$, и пусть образ полученного выражения для $\beta_k(r_i, r_j, r_s, r_t; r_1, r_2, \dots, r_{2k})$ при гомоморфизме $R_n \rightarrow R_n/K$ имеет вид $\phi_k \rho_k$. Тогда в группе R_n/K верно равенство $\phi_k \rho_k = 1$ или $\phi_k = \rho_k^{-1}$. Здесь ϕ_k, ρ_k – коммутаторные выражения группы T_n . При помощи тождества $[u, v] = [v, u]^{-1}$ представим ρ_k^{-1} в виде ψ_k , в котором расположение квадратных скобок в ψ_k совпадает с расположением фигурных скобок во втором члене выражения η_k . Расположения скобок в ϕ_k и в первом члене из η_k совпадают. Теперь для ϕ_k, ψ_k применяем равенство (11). Предположим, что $\phi_k = 1 - \bar{\phi}_k$, $\psi_k = 1 - \bar{\psi}_k$. Так как в группе R_n/K верно равенство $\phi_k = \psi_k$, то из соотношения $\omega(R_n/K) \cong \omega R_n/\omega K$ следует, что в алгебре ωT_n верно равенство $\bar{\phi}_k - \bar{\psi}_k = 0$. Но $\bar{\phi}_k - \bar{\psi}_k = \eta_k$. Поэтому в алгебре ωT_n верно равенство $\eta_k = 0$. Аналогично показывается, что в ωT_n верны равенства $\theta = 0$, $\xi_k = 0$, $\lambda_k = 0$.

Пусть теперь $f = f(x_1, x_2, \dots, x_t)$ – один из многочленов

$$\begin{aligned} \theta(x_1, x_2, \dots, x_8), & \quad \eta_k(x_s, x_t, x_i, x_j; x_1, x_2, \dots, x_{2k}), \\ \xi_k(x_s, x_t, x_i, x_j; x_1, x_2, \dots, x_{2k}), & \quad \lambda_k(x_i, x_j, x_s; x_1, x_2, \dots, x_{2k}). \end{aligned}$$

Переходим согласно определению операции $\{\cdot, \cdot\}$ в f к операциям $+$, $\cdot$ и для полученного многочлена естественным образом вводим понятия степени по каждой из переменных x_i , степени и однородности многочлена. Представим f в виде $f = f_0 + f_1 + \dots + f_{r_1}$, где f_i – сумма всех одночленов многочлена f , имеющих степень i по x_1 . Пусть $w_1, w_2, \dots, w_t$ – элементы алгебры ωT_n , определенные выше. Будем сокращенно обозначать $f(w_1, w_2, \dots, w_t)$ через $f(w)$. Если $\alpha \in F$, то

$$f(\alpha w_1, w_2, \dots, w_t) = \alpha^0 f_0(w) + \alpha^1 f_1(w) + \dots + \alpha^{r_1} f_{r_1}(w).$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r_1}$ – произвольные элементы из F . Тогда из (12) получим систему уравнений

$$\alpha_i^0 f_0(w) + \alpha_i^1 f_1 + \dots + \alpha_i^{r_1} f_{r_1}(w) = 0$$

от переменных $f_0(w), f_1(w), \dots, f_{r_1}(w)$. По [9, с. 376] $df_i(w) = 0$, где d – определитель, составленный из строчек $\alpha_i^0, \alpha_i^1, \dots, \alpha_i^{r_1}$. Поле F бесконечное. Поэтому можно выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r_1}$ так, чтобы $d \neq 0$. Поэтому $f_i(w) = 0$. Прделав ту же операцию с многочленами $f_i, i = 0, 1, \dots, r_1$, и переменной x_2 и т. д., в конце концов получим следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть

$$f = f_1(x_1, x_2, \dots, x_t) + \dots + f_i(x_1, x_2, \dots, x_t) + \dots + f_r(x_1, x_2, \dots, x_t)$$

– разложение многочлена f на однородные компоненты $f_i(x_1, x_2, \dots, x_t)$, и пусть $w_1, w_2, \dots, w_t$ – элементы алгебры ωT_n , определенные выше. Тогда

$$f_i(w_1, w_2, \dots, w_t) = 0.$$

В частности, рассматривая однородные компоненты наименьшей степени, получим, что в алгебре ωT_n при $k \neq n$ верны равенства

$$\begin{aligned} &((w_1, w_2, w_3), (w_4, w_5, w_6), (w_7, w_8)) = 0, \\ &((w_i, w_j, w_s), (w_1, w_2), \dots, (w_{2k-1}, w_{2k}), (w_t, w_j, w_s)) \\ &\quad - ((w_i, w_j, w_s), ((w_t, w_j, w_s), (w_1, w_2), \dots, (w_{2k-1}, w_{2k}))) = 0, \\ &((w_i, w_j, w_s), (w_1, w_2), \dots, (w_{2k-1}, w_{2k}), (w_i, w_j, w_t)) \\ &\quad - ((w_i, w_j, w_s), ((w_i, w_j, w_t), (w_1, w_2), \dots, (w_{2k-1}, w_{2k}))) = 0, \\ &((w_i, w_j, w_s), (w_1, w_2), \dots, (w_{2k-1}, w_{2k}), (w_i, w_j, w_s)) = 0. \end{aligned}$$

Согласно п. 6) леммы 2 фундаментальный идеал ωC_n порождается как F -модуль элементами вида $v_i = 1 - u_i$. Поэтому F -модуль ωT_n порождается элементами вида w_i , т.е. любой элемент $h \in \omega T_n$ имеет разложение $h = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_s w_s$. Тогда при помощи последних равенств, используя тождество $(x, y) = -(y, x)$, индукцией по длине s , легко доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 6. В алгебре ωT_n верны тождества (1) и $\mu_k = 0$ при $k \neq n$.

ЛЕММА 7. В фундаментальном идеале ωT_n групповой алгебры FT_n тождество $\mu_n = 0$ не верно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A(Z, r)$ – свободная ассоциативная алгебра над кольцом целых чисел Z от множества свободных порождающих $x_1, x_2, \dots, x_r$. По тереме 5.6 из [10] элементы $y_i = 1 - x_i$ порождают свободную группу S и y_i являются свободными порождающими. (В теореме 5.6 рассматриваются элементы вида $1 + x_i$, однако теорема верна, если рассмотреть и элементы вида $1 - x_i$). Очевидно, что относительно коммутирования $(u, v) = uv - vu$ порождающие элементы произвольной ассоциативной алгебры B над кольцом Q порождают алгебру Ли $L(Q, B)$. В частности, из теоремы 5.9 из [10] следует, что если рассмотреть алгебру $A = A(Z, r)$, то $L(Z, A)$ будет свободной алгеброй Ли над кольцом Z с множеством свободных порождающих $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Обозначим через G подгруппу группы T_n , порожденную элементами $d, g_1, g_2, \dots, g_{2n}$, а через $\Omega(Z, G) = \Omega(G)$ – подалгебру группового кольца ZG , порожденную элементами

$$\bar{d} = 1 - d, \quad \bar{g}_i = 1 - g_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n.$$

Пусть $r = 2n + 1$. Алгебра $A(Z, r)$ свободна со свободными порождающими $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Тогда отображения

$$x_{2n+1} \rightarrow \bar{d}, \quad x_i \rightarrow \bar{g}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n,$$

определяют эпиморфизм алгебр $A(Z, r) \rightarrow \Omega(Z, G)$. В частности, они определяют эпиморфизм алгебр Ли $L(Z, A) \rightarrow L(Z, \Omega G)$ и эпиморфизм групп $S \rightarrow G$, при котором

$$y_{2n+1} \rightarrow d, \quad y_i \rightarrow g_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n.$$

Пусть $G = S/H$. Через S_i, G_i соответственно обозначим члены нижних центральных рядов групп S и G , через $L_i(Z, A)$ – подмодуль свободной алгебры Ли $L(Z, A)$, состоящий из всех однородных элементов степени i , а через $L_i(Z, \Omega G)$ – образ модуля $L_i(Z, A)$ при эпиморфизме $A(Z, r) \rightarrow \Omega(Z, G)$. Пусть $\beta^i(x_{j_1}, \dots, x_{j_i})$ – элемент из $L_i(Z, A)$. По теореме 5.12 из [10] отображение

$$\beta^i(y_{j_1}, \dots, y_{j_i}) S_{i+1} \rightarrow \beta^i(x_{j_1}, \dots, x_{j_i}) \quad (13)$$

является изоморфизмом фактор-группы S_i/S_{i+1} на аддитивную группу $L_i(Z, A)$; при этом расположение скобок β^i означает коммутирование в группе S и умножение в алгебре $L(Z, A)$. Далее, при эпиморфизме $S \rightarrow S/H$ подгруппы S_i и S_{i+1} отображаются на $S_i H/H$ и $S_{i+1} H/H$ соответственно. Тогда по теоремам о гомоморфизмах получаем

$$\begin{aligned} G_i/G_{i+1} &= (S_i H/H)/(S_{i+1} H/H) \cong S_i H/S_{i+1} H \\ &\cong S_i/(S_i \cap H) S_{i+1} \cong (S_i/S_{i+1})/((S_i \cap H) S_{i+1}/S_{i+1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Это означает ввиду (13), что эпиморфизм $A(Z, r) \rightarrow \Omega(Z, G)$ индуцирует эпиморфизм модуля $L_i(Z, A)$ на модуль $L_i(Z, \Omega G)$, ядро M_i которого изоморфно подмодулю из S_i/S_{i+1} , состоящему из тех смежных классов по S_{i+1} , которые определяются элементами из $S_i \cap H$. Далее, из неравенства (8) следует, что $\delta_n(y_{2n+1}, y_1, y_2; y_1, y_2, \dots, y_{2n}) \notin H$. Тогда

$$\mu_n(x_{2n+1}, x_1, x_2; x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \notin M_{2n+6},$$

а так как $L_{2n+6}(Z, A)/M_{2n+6} \cong L_{2n+6}(Z, \Omega G)$, то отсюда следует, что в алгебре $L(Z, \Omega G)$ верно неравенство

$$\mu_n(\bar{d}, \bar{g}_1, \bar{g}_2; \bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_{2n}) \neq 0. \quad (15)$$

В группе C_n выполнены равенства $b^2 = 1$, $a_i^2 = 1$, которые индуцируют равенства $d^2 = 1$, $g_i^2 = 1$ в группе G . Тогда из изоморфизма модулей $G_i/G_{i+1} \cong L_i(Z, \Omega G)$, указанного в (14), следует, что в алгебре $L(Z, \Omega G)$ верны равенства $2\bar{d} = 0$, $2\bar{g}_i = 0$. Алгебры $L(Z, \Omega G)$, $\Omega(Z, G)$ порождаются элементами $\bar{d}$, $\bar{g}_i$. Тогда они являются алгебрами над кольцом Z_2 классов вычетов по модулю 2. Очевидно, что Z_2 является подполем бесконечного поля F характеристики 2. Рассмотрим свободные ассоциативные алгебры $A(Z_2, r)$ и $A(Z, r)$ от множества свободных порождающих $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Алгебра $A(Z_2, r)$ является подалгеброй алгебры $A(Z, r)$, так как обе они обладают одним и тем же линейным базисом одночленов. Более того, по теореме Витта [11, с. 187] $L(Z_2, A)$ и $L(F, A)$ являются свободными алгебрами Ли от множества свободных порождающих $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$ и согласно [12] они обладают одним и тем же линейным базисом, состоящим из слов от переменных $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Поэтому и алгебра $L(Z_2, A)$ является подалгеброй алгебры $L(F, A)$. Далее, при помощи отображений

$$x_{2n+1} \rightarrow \bar{d}, \quad x_i \rightarrow \bar{g}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n,$$

как и в случае кольца Z , определим алгебры $\Omega(Z_2, G)$, $L(Z_2, \Omega G)$, $\Omega F, G)$, $L(F, \Omega G)$. Тогда $\Omega(Z_2, G)$ будет подалгеброй алгебры $\Omega(F, G)$, а $L(Z_2, \Omega G)$ – подалгеброй алгебры $L(F, \Omega G)$. Неравенство (15) верно в алгебре $L(Z_2, G)$. Поэтому оно верно и в алгебре $L(F, G)$, а следовательно, и в алгебре $\Omega(F, G)$. Наконец, из определения последней алгебры следует, что $\Omega(F, G) \subseteq \omega G$, где ωG – фундаментальный идеал групповой алгебры FG . Имеем $G \subseteq T_n$, тогда по п. 1) леммы 2 $\omega G \subseteq \omega T_n$, т.е. $\Omega(F, G) \subseteq \omega T_n$. Следовательно, неравенство (15) верно и в фундаментальном идеале ωT_n групповой алгебры FT_n . Лемма доказана.

Из лемм 6 и 7 непосредственно получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *В многообразии $\mathfrak{B}$ ассоциативных алгебр над бесконечным полем характеристики 2 система тождеств $M = \{\mu_k = 0 \mid k = 1, 2, \dots\}$ независима.*

Различные подмножества из M определяют различные многообразия, тогда из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Многообразие $\mathfrak{B}$ содержит континуум различных не конечно базисруемых подмногообразий.*

Из леммы 3 следует, что все эти подмногообразия локально нильпотентны и локально конечны.

СЛЕДСТВИЕ 2. *В многообразии $\mathfrak{B}$ существует алгебра, определенная перечислимым множеством тождественных соотношений, в которой не разрешима проблема равенства слов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S есть некоторое перечислимое и не разрешимое множество чисел. Рассмотрим алгебру A многообразия $\mathfrak{B}$, определенную тождественными соотношениями $\{\mu_n = 0\}$ при $n \in S$. Очевидно, каждое соотношение алгебры A есть тождественное соотношение. В силу теоремы 1 произвольное тождество из $\{\mu_n = 0\}$

при данном n выполнено в A в том и только том случае, если $n \in S$. Следовательно, в A не разрешима проблема равенства слов.

Известно, что если на аддитивном F -модуле ωT_n ввести умножение $\cdot : x \cdot y = xy + yx$, то полученная алгебра будет специальной йордановой, и так как F – поле характеристики 2, то она будет и лиевой. Тогда из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. *В многообразии $\mathfrak{C}$ (соответственно $\mathfrak{D}$) специальных йордановых (соответственно лиевых) алгебр над бесконечным полем характеристики 2 система тождеств $\{\nu_k = 0 \mid k = 1, 2, \dots\}$ независима.*

Как и в случае следствий 1, 2 отсюда следует

СЛЕДСТВИЕ 4. *Многообразие $\mathfrak{C}$ (соответственно $\mathfrak{D}$) содержит континуум различных не конечно базисуемых подмногообразий, и в $\mathfrak{C}$ (соответственно $\mathfrak{D}$) имеются алгебры, заданные перечислимым множеством тождественных соотношений, в которых не разрешима проблема равенства слов.*

Отметим, что в случае лиевых алгебр следствие 3 не претендует на новизну. Бесконечные системы тождеств для лиевых алгебр над полем характеристики 2 указаны в [13], [14].

Отметим также, что при существенном использовании результатов работы [15] бесконечные системы тождеств ассоциативной алгебры над полем характеристики $p > 0$ другими, комбинаторными методами построены также Беловым [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Specht W. Gesetze in Ringen 1 // Math. Z. 1950. V. 52. P. 557–589.
- [2] Днестровская тетрадь. Новосибирск, 1986.
- [3] Кемер А. Р. Конечная базисуемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 5. С. 597–641.
- [4] Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1987. С. 117–240.
- [5] Коуровская тетрадь. Новосибирск, 1990.
- [6] Залесский А. Е., Михалев А. В. Групповые кольца // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1973. С. 5–118.
- [7] Бовди А. А. Групповые кольца. Ужгород, 1974.
- [8] Vaughan-Lee M. R. Uncountably many varieties of groups // Bull. London Math. Soc. 1970. № 2. P. 280–286.
- [9] Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
- [10] Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [11] Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
- [12] Пиршов А. И. Свободные лиевы кольца // Матем. сб. 1958. Т. 45 (87). С. 113–122.
- [13] Vaughan-Lee M. R. Varieties of Lie algebras // Quart. J. Math. 1970. V. 21. № 83. P. 297–308.
- [14] Vaughan-Lee M. R. Abelian-by-nilpotent varieties of Lie algebras // J. London Math. Soc. 1975. V. 11. № 3. P. 263–266.
- [15] ЩигOLEV В. В. Примеры бесконечно базисуемых T -пространств // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 143–160.
- [16] Белов А. Я. Контрпримеры к проблеме Шпехта // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 13–24.