Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, О типичном изменении спектральных свойств при возмущении оператором ранга один, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 590–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:43:29

УДК 512.643+517.983

О ТИПИЧНОМ ИЗМЕНЕНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ОПЕРАТОРОМ РАНГА ОДИН

С. В. Савченко

В работе показано, что при возмущении типичным оператором ранга один у фиксированного собственного значения пропадает одна жорданова клетка максимального порядка, а порядки остальных не изменяются. Построены теория возмущений первого порядка для новых собственных значений и нулевые приближения к соответствующим им собственным векторам.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Пусть A и B – любые две квадратные матрицы одинакового порядка N . Существует большое количество работ (соответствующую литературу см. в [1] и [2]), в которых строится теория возмущений для собственных значений $A + \varepsilon B$, не входящих в спектр A (здесь ε – параметр возмущения). Однако если геометрическая кратность собственного значения λ матрицы A больше ранга r матрицы B , то λ должно остаться в спектре новой матрицы $C = A + B$. Как при переходе от A к $A + B$ изменится часть жордановой формы, соответствующая λ ? Как ни странно, в литературе отсутствует ответ на этот естественный вопрос (это прямо подтверждает недавний обзор [3]). В нашей работе мы даем его для типичного возмущения B ранга один. Равенство $r = 1$ означает, что оператор B имеет вид $(\cdot, \xi)\eta$, где ξ и η – некоторые векторы из пространства $\mathbb{C}^N$. Типичность изменения спектральных свойств при переходе от A к $A + B$ должна заключаться в его справедливости для почти всех η и ξ (например, по мере Лебега; можно также рассматривать компоненты векторов η и ξ как независимые непрерывно распределенные случайные величины). Оказывается, такое изменение действительно существует и позволяет определить новые порядки жордановых клеток собственного значения λ по старым. Это утверждение содержится в теореме 1, которая является основным результатом нашей работы. В ее доказательстве читатель также найдет алгоритм построения жорданова базиса матрицы C , использующий жорданов базис матрицы A и вектор ξ .

Несмотря на то, что предварительная формулировка основного результата является вероятностной, в тексте статьи утверждение теоремы 1 носит чисто алгебраический характер. Мы явно выписываем уравнение конической поверхности второго порядка на координаты векторов ξ и η , вне которой типичный переход имеет место. Его вывод использует методы функционального анализа, точнее, резольвентную технику. Необходимые сведения о ней читатель найдет в п. 2. Там же с ее помощью получено неравенство, связывающее алгебраические кратности λ как собственного значения матриц A и $A + B$. В п. 3 читатель увидит, что именно достижение равенства в этом неравенстве означает

типичный переход от A к $A + B$ и, таким образом, типичное изменение спектральных свойств является в определенном смысле и экстремальным.

Использование разложения резольвенты в ряд Лорана позволяет также построить теорию возмущения первого порядка для новых собственных значений матрицы $A + \varepsilon B$ (для тех, которые не принадлежат спектру A). Это сделано в п. 4 для любого (не обязательно, типичного) оператора B ранга один. Аналогичные разложения были получены в статье [4], которая уточняет результаты работ [5]–[7] при определенных условиях на матрицу B . Они совпадают с нашими, если и только если существует всего одна жорданова клетка максимального порядка для собственного значения λ в жордановой форме A . В противном случае теорема Лидского не применима. Существует сравнительно небольшое число работ, в которых строится теория возмущений первого порядка для матриц B специального вида, не удовлетворяющих условиям Лидского. Мы упомянем только [8]–[10] среди них. Их результаты также мало связаны с нашими.

Если собственное значение μ не принадлежит спектру A , то последовательное применение резольвенты матрицы A к вектору η позволяет получить все векторы соответствующей жордановой цепочки матрицы C (см. лемму 5). На этом простом факте основано разложение новых собственных векторов в ряд по параметру возмущения ε . В Приложении читатель также найдет алгоритм построения жордановой цепочки транспонированной матрицы C^T , дуальной к выбранной нами жордановой цепочке матрицы C . Мы приводим его здесь, потому что именно такая пара жордановых цепочек необходима для различных спектральных разложений возмущенного оператора $A + B$.

В заключение скажем несколько слов о возмущении оператором произвольного ранга r . Наши результаты для $r = 1$ позволяют определить каким будет типичное изменение спектральных свойств в общем случае. Его описание можно найти в нашем тексте после доказательства теоремы 1. Уравнению для соответствующей критической поверхности будет посвящена отдельная работа автора.

2. Некоторые определения и вспомогательные результаты. Изложение нашей работы основано на следующем тождестве, которое хорошо известно и может быть найдено, например, в доказательстве теоремы 5.1 [11]. Для полноты изложения мы приводим здесь свое короткое доказательство (в [11] оно отсутствует). Везде в дальнейшем мы будем предполагать, что $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ для любых двух векторов $x = \{x_i\}_{i=1}^N$ и $y = \{y_i\}_{i=1}^N$, и будем обозначать через E единичную матрицу.

ЛЕММА 1. Пусть A – произвольная матрица, $B = (\cdot, \xi)\eta$ – оператор ранга один и $C = A + B$. Тогда

$$\det(zE - C) = (1 - ((zE - A)^{-1}\eta, \xi)) \det(zE - A). \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что точка z не принадлежит спектру матрицы A . В этом случае

$$\det((zE - C)(zE - A)^{-1}) = \det((zE - A - B)(zE - A)^{-1}) = \det(E - B(zE - A)^{-1}).$$

Ранг оператора $B(zE - A)^{-1}$ равен единице. Понятно, что только $\alpha\eta$ может быть собственным вектором для единственно возможного ненулевого собственного значения оператора $B(zE - A)^{-1} = ((zE - A)^{-1}, \xi)\eta$. Но

$$B(zE - A)^{-1}\eta = ((zE - A)^{-1}\eta, \xi)\eta.$$

Поэтому спектром оператора $E - B(zE - A)^{-1}$ является $1 - ((zE - A)^{-1}\eta, \xi)$, $1, \dots, 1$ и, следовательно, его детерминант равен $1 - ((zE - A)^{-1}\eta, \xi)$. Лемма доказана.

По определению вектор ζ является *корневым вектором* матрицы A , соответствующим собственному значению λ , если существует такое число m , что $(A - \lambda E)^m \zeta = 0$. Пространство $L_A(\lambda)$ всех таких векторов называется *корневым подпространством* матрицы A , соответствующим собственному значению λ . Его *индексом* $\text{ind}_A(\lambda)$ является наименьшее число q , для которого $(A - \lambda E)^q \zeta = 0$ при любом $\zeta \in L_A(\lambda)$. Можно показать, что индекс равен порядку полюса резольвенты матрицы A в точке $z = \lambda$. Ее разложение в сумму простейших дробей может быть найдено, например, в [1]. Так как вариант этой книги, переведенный на русский язык, не содержит соответствующего вывода, то мы также приводим его здесь.

ЛЕММА 2. Пусть A — произвольная матрица и $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ — ее различные собственные значения. Обозначим через $Q_{-1,i}$, где $1 \leq i \leq d$, проектор на корневое подпространство матрицы A для собственного значения λ_i вдоль прямой суммы всех других ее корневых подпространств и положим

$$Q_{-m,i} = (A - \lambda_i E)^{m-1} Q_{-1,i}.$$

Пусть $q_i = \text{ind}_A(\lambda_i)$, где $i = 1, \dots, d$. Тогда

$$(zE - A)^{-1} = \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^{q_i} Q_{-m,i} (z - \lambda_i)^{-m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ — любое собственное значение матрицы A и q — его индекс. Предположим, что точка z не принадлежит спектру матрицы A . Так как $(A - \lambda E)Q_{-m} = Q_{-m-1}$ и $(A - \lambda E)^q Q_{-1} = 0$, то справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (zE - A) \sum_{m=1}^q Q_{-m} (z - \lambda)^{-m} &= (zE - \lambda E + \lambda E - A) \sum_{m=1}^q Q_{-m} (z - \lambda)^{-m} \\ &= (z - \lambda) \sum_{m=1}^q Q_{-m} (z - \lambda)^{-m} - (A - \lambda E) \sum_{m=1}^q Q_{-m} (z - \lambda)^{-m} \\ &= Q_{-1} + \sum_{m=1}^{q-1} Q_{-m-1} (z - \lambda)^{-m} - \sum_{m=1}^{q-1} Q_{-m-1} (z - \lambda)^{-m} = Q_{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(zE - A) \sum_{i=1}^d \sum_{m=1}^{q_i} Q_{-m,i} (z - \lambda_i)^{-m} = \sum_{i=1}^d Q_{-1,i} = E.$$

Лемма доказана.

Любое собственное значение λ матрицы A является нулем $\det(zE - A)$. Его порядок $n_A(\lambda)$ называется *алгебраической кратностью* λ . Можно показать, что число $n_A(\lambda)$ равно размерности корневого подпространства $L_A(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – произвольная матрица, $B = (\cdot, \xi)\eta$ – оператор ранга один и $C = A + B$. Тогда

$$n_C(\lambda) \geq n_A(\lambda) - \text{ind}_A(\lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $p_{A, \xi, \eta}(\lambda)$ порядок полюса первого множителя в (1) в точке $z = \lambda$ (если эта точка является нулем порядка m , то мы будем считать, что $p_{A, \xi, \eta}(\lambda) = -m$). В силу леммы 1 справедливо равенство $n_C(\lambda) = n_A(\lambda) - p_{A, \xi, \eta}(\lambda)$. Таким образом, мы должны только показать, что $p_{A, \xi, \eta}(\lambda) \leq \text{ind}_A(\lambda)$ при любых ξ и η .

Положим $q = \text{ind}_A(\lambda)$. В силу леммы 2 резольвента матрицы A имеет следующий вид: в некоторой достаточно малой окрестности точки $z = \lambda$:

$$(zE - A)^{-1} = \sum_{m=1}^q Q_{-m}(z - \lambda)^{-m} + R(z). \quad (2)$$

Здесь Q_{-1} – проектор на подпространство $L_A(\lambda)$ вдоль прямой суммы всех других корневых подпространств матрицы A , $Q_{-m} = (A - \lambda E)^{m-1}Q_{-1}$ и $R(z)$ – операторная функция, аналитическая в некоторой окрестности точки $z = \lambda$. Используя (2), получаем разложение функции $((zE - A)^{-1}\eta, \xi)$ в ряд Лорана:

$$((zE - A)^{-1}\eta, \xi) = \sum_{m=1}^q (Q_{-m}\eta, \xi)(z - \lambda)^{-m} + R_*(z), \quad (3)$$

где $R_*(z)$ – функция, аналитическая в некоторой окрестности точки $z = \lambda$. Теперь очевидно, что порядок полюса функции $((zE - A)^{-1}\eta, \xi)$ в точке $z = \lambda$ не больше чем q . Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как мы увидим ниже, верхней оценки $n_C(\lambda)$, использующей только спектральные характеристики матрицы A , не существует.

Множество собственных векторов матрицы A для собственного значения λ образует собственное подпространство в $L_A(\lambda)$. Его размерность $g_A(\lambda)$ называется *геометрической кратностью* λ .

ЛЕММА 3. Пусть A – произвольная матрица, $B = (\cdot, \xi)\eta$ – оператор ранга один и $C = A + B$. Тогда

$$g_A(\lambda) - 1 \leq g_C(\lambda) \leq g_A(\lambda) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_k$ – собственные векторы матрицы A , соответствующие собственному значению λ . Предположим сначала, что $(\xi_i, \xi) = 0$ для любого $i = 1, \dots, k$. Тогда все ξ_i , где $i = 1, \dots, k$, являются также собственными векторами матрицы C , соответствующими собственному значению λ . Если хотя бы одно из этих скалярных произведений не равно нулю, скажем, $(\xi_k, \xi) \neq 0$, то векторы

$$\xi_1 - \alpha_1 \xi_k, \dots, \xi_i - \alpha_i \xi_k, \dots, \xi_{k-1} - \alpha_{k-1} \xi_k,$$

где α_i выбрано так, чтобы $(\xi_i - \alpha_i \xi_k, \xi) = 0$, принадлежат собственному подпространству матрицы C , соответствующему собственному значению λ . Таким образом, справедливость левой части неравенства доказана. Поменяв местами матрицы C и A , получим справедливость правой части неравенства. Лемма доказана.

3. О типичном изменении спектральных свойств фиксированного собственного значения возмущаемой матрицы. Из доказательства следствия 1 вытекает, что равенство $n_C(\lambda) = n_A(\lambda) - \text{ind}_A(\lambda)$ справедливо тогда и только тогда, когда $(Q_{-q}\eta, \xi) \neq 0$ (см. (3)). Уравнение $(Q_{-q}\eta, \xi) = 0$ определяет некоторую поверхность второго порядка в пространстве, координатами которого являются координаты векторов ξ и η (здесь мы рассматриваем матрицу A и, следовательно, матрицу, отвечающую проектору Q_{-q} , как фиксированные матрицы). Любая такая поверхность (с ненулевыми коэффициентами) имеет лебегову меру нуль. Другими словами, скалярное произведение $(Q_{-q}\eta, \xi)$ не равно нулю для почти всех векторов ξ и η (здесь мы рассматриваем ξ и η как векторы, координаты которых являются случайными величинами). Таким образом, ситуация, когда алгебраическая кратность понижается на порядок самой большой жордановой клетки, типична для возмущения оператором ранга один.

ЛЕММА 4. Пусть $\xi_n^{(p)}$, где $n = 1, \dots, n_p$, $p = 1, \dots, k$, – жорданов базис корневого подпространства $L_A(\lambda)$ (здесь $(A - \lambda E)\xi_n^{(p)} = \xi_{n-1}^{(p)}$ при $n = 1, \dots, n_p$ и $\xi_0^{(p)} = 0$). Предположим, что $n_1 \leq \dots \leq n_l = n_{l+1} = \dots = n_k = q$, и выберем собственные векторы $\eta_1^{(l)}, \dots, \eta_1^{(k)}$, принадлежащие самым длинным жордановым цепочкам транспонированной матрицы $A^\top$ для собственного значения λ и удовлетворяющие условию $(\eta_1^{(p)}, \xi_{n_p'}^{(p')}) = \delta_{pp'}$, где $p, p' = l, \dots, k$ и $\delta_{pp'}$ – символ Кронекера (этими условиями они определяются однозначно). Тогда условие $(Q_{-q}\eta, \xi) \neq 0$ может быть переписано в виде

$$\sum_{p=l}^k (\xi_1^{(p)}, \xi)(\eta_1^{(p)}, \eta) \neq 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n' \leq q - 1$ и $p', p = l, \dots, k$ имеем

$$(\eta_1^{(p)}, \xi_{n'}^{(p')}) = (\eta_1^{(p)}, (A - \lambda E)\xi_{n'+1}^{(p')}) = ((A^\top - \lambda E)\eta_1^{(p)}, \xi_{n'+1}^{(p')}) = 0,$$

потому что $(A^\top - \lambda E)\eta_1^{(p)} = 0$ при $p = l, \dots, k$. Пусть $\eta_q^{(l)}, \dots, \eta_q^{(k)}$ – любые векторы, для которых $(A^\top - \lambda E)^{q-1}\eta_q^{(p)} = \eta_1^{(p)}$ при $p = l, \dots, k$. Тогда при $p = l, \dots, k$ и $p' = 1, \dots, l - 1$ справедливо равенство

$$(\eta_1^{(p)}, \xi_{n'}^{(p')}) = ((A^\top - \lambda E)^{q-1}\eta_q^{(p)}, \xi_{n'}^{(p')}) = (\eta_q^{(p)}, (A - \lambda E)^{q-1}\xi_{n'}^{(p')}) = 0,$$

потому что $(A - \lambda E)^{q-1}\xi_{n'}^{(p')} = 0$ при таком выборе p' . Кроме того, так как ограничение $A - \lambda E$ на любое корневое подпространство $L_A(\mu)$, отличное от $L_A(\lambda)$ (т.е. $\mu \neq \lambda$), является обратимым преобразованием, то для любого $\zeta \in L_A(\mu)$ найдется такой вектор $\zeta' \in L_A(\mu)$, что $\zeta = (A - \lambda E)\zeta'$. В этом случае

$$(\eta_1^{(p)}, \zeta) = (\eta_1^{(p)}, (A - \lambda E)\zeta') = ((A^\top - \lambda E)\eta_1^{(p)}, \zeta') = 0.$$

Таким образом, мы можем представить проектор Q_{-1} в виде суммы

$$Q_{-1} = \sum_{p=l}^k (\eta_1^{(p)}, \cdot) \xi_{n_p}^{(p)} + \tilde{Q}_{-1},$$

где $(A - \lambda E)^{q-1} \tilde{Q}_{-1} = 0$. Так как $Q_{-q} = (A - \lambda E)^{q-1} Q_{-1}$, то $Q_{-q} = \sum_{p=l}^k (\eta_1^{(p)}, \cdot) \xi_1^{(p)}$. Поэтому

$$(Q_{-q} \eta, \xi) = \sum_{p=l}^k (\xi_1^{(p)}, \xi) (\eta_1^{(p)}, \eta).$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для оператора $B = (\cdot, \xi) \eta$ ранга один условие (4) равносильно неравенству $\sum_{p=l}^k (B \xi_1^{(p)}, \eta_1^{(p)}) \neq 0$. При $l = k$ оно совпадает с условием Лидского (1.6) его работы [4].

Следующая теорема утверждает, что при выполнении условия $(Q_{-q} \eta, \xi) \neq 0$ жорданова структура для собственного значения λ новой матрицы C однозначно определяется по жордановой структуре λ как собственного значения возмущаемой матрицы A . Перед тем как сформулировать ее, напомним, что если $n_1 \leq \dots \leq n_k$ – последовательность порядков жордановых клеток для собственного значения λ матрицы A , то $n_A(\lambda) = n_1 + \dots + n_k$ и $\text{ind}_A(\lambda) = n_k$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – произвольная матрица, $B = (\cdot, \xi) \eta$ – оператор ранга один и $C = A + B$. Предположим, что для собственного значения λ матрицы A имеет место равенство

$$n_C(\lambda) = n_A(\lambda) - \text{ind}_A(\lambda).$$

Тогда если $n_1 \leq \dots \leq n_k$ – порядки его жордановых клеток, то $n_1, \dots, n_{k-1}$ являются порядками жордановых клеток матрицы C , соответствующих собственному значению λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k = 1$ очевиден. Предположим, что $k \geq 2$. В силу леммы 4 хотя бы одно из скалярных произведений $(\xi_1^{(l)}, \xi), \dots, (\xi_1^{(k)}, \xi)$ не равно нулю. Без ограничения общности мы можем считать, что справедливо неравенство $(\xi_1^{(k)}, \xi) \neq 0$. Для любого $p = 1, \dots, k-1$ построим цепочку векторов $\xi_1^{(p)'}, \dots, \xi_{n_p}^{(p)'}$, для которой

$$(C - \lambda E) \xi_n^{(p)'} = \xi_{n-1}^{(p)'} \quad \text{при } n = 1, \dots, n_p, \quad \text{где } \xi_0^{(p)'} = 0,$$

из жордановой цепочки $\xi_1^{(p)}, \dots, \xi_{n_p}^{(p)}$ корневого подпространства $L_A(\lambda)$.

Пусть $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_{n_p}^{(p)}$ – такая последовательность чисел, что $\alpha_n^{(p)}$ определяется по $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(p)}$ как единственное решение уравнения

$$\left(\xi_n^{(p)} - \sum_{h=1}^{n-1} \alpha_h^{(p)} \xi_{n-h+1}^{(k)} - \alpha_n^{(p)} \xi_1^{(k)}, \xi \right) = 0$$

(при $n = 1$ мы считаем, что сумма $\sum_{h=1}^{n-1}$ равна нулю). Тогда вектор

$$\xi_n^{(p)'} = \xi_n^{(p)} - \sum_{h=1}^n \alpha_h^{(p)} \xi_{n+1-h}^{(k)}$$

удовлетворяет при любом $n = 1, \dots, n_p$ условию $(\xi_n^{(p)'}, \xi) = 0$. Кроме того, при любом таком n имеем

$$(A - \lambda E)\xi_n^{(p)'} = (A - \lambda E)\left(\xi_n^{(p)} - \sum_{h=1}^n \alpha_h^{(p)} \xi_{n+1-h}^{(k)}\right) = \xi_{n-1}^{(p)} - \sum_{h=1}^{n-1} \alpha_h^{(p)} \xi_{n-h}^{(k)} = \xi_{n-1}^{(p)'}$$

Поэтому,

$$(C - \lambda E)\xi_n^{(p)'} = (A - \lambda E)\xi_n^{(p)'} + (\xi_n^{(p)'}, \xi)\eta = (A - \lambda E)\xi_n^{(p)'} = \xi_{n-1}^{(p)'}$$

и, следовательно, цепочка $\xi_1^{(p)'}, \dots, \xi_{n_p}^{(p)'}$ является искомой. Всего мы получаем $k - 1$ таких цепочек $\xi_1^{(p)'}, \dots, \xi_{n_p}^{(p)'}$, где $p = 1, \dots, k - 1$. Их длины равны $n_1, \dots, n_{k-1}$. По построению, все они состоят из линейно независимых корневых векторов матрицы C , соответствующих собственному значению λ . Но мы не можем утверждать пока, что каждая из них является жордановой цепочкой матрицы C .

В силу условия $n_C(\lambda) = n_A(\lambda) - \text{ind}_A(\lambda)$ алгебраическая кратность собственного значения λ матрицы C равна $n_1 + \dots + n_{k-1}$. Поэтому число векторов в построенных цепочках равно размерности корневого подпространства матрицы C для собственного значения λ . Отсюда следует, что все векторы $\xi_1^{(p)'}, \dots, \xi_{n_p}^{(p)'}$, где $p = 1, \dots, k - 1$, образуют базис и, следовательно, в силу своей формы – жорданов базис подпространства $L_C(\lambda)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уже условие $n_C(\lambda) = n_A(\lambda) - \text{ind}_A(\lambda) + 1$ не определяет однозначно порядки новых жордановых клеток при знании порядков жордановых клеток $n_1 \leq \dots \leq n_k$ матрицы A для λ . Теперь возможны, например, следующие варианты: $n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_{k-1}$ при некотором $i \leq k - 1$ или $n_1, \dots, n_{k-1}, 1$.

Таким образом, ситуация, когда исчезает одна жорданова клетка максимального порядка, а порядки остальных остаются без изменений, имеет место для возмущения *типичным* оператором ранга один. Теорема 1 позволяет также определить типичное изменение спектральных свойств фиксированного собственного значения λ матрицы A при добавлении оператора $B = \sum_{i=1}^r (\cdot, \xi_i)\eta_i$ произвольного ранга r (здесь $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_r$ – любые две системы линейно независимых векторов). Оно состоит в следующем: “пропадут” r самых больших по размеру жордановых клеток, а порядки остальных не изменятся. Другими словами, если $n_1 \leq \dots \leq n_k$ – ряд порядков жордановых клеток для собственного значения λ исходной матрицы A , то $n_1, \dots, n_{k-r}$ будет рядом порядков жордановых клеток для λ как собственного значения новой матрицы C , полученной из A добавлением *типичного* оператора ранга r (т.е. для почти всех $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_r$).

Мы уже несколько раз употребили слово “типичный”. Для того чтобы не запутаться, необходимо четко представлять, что оно означает в каждом конкретном случае, и в определенной степени относиться к нему с осторожностью. Например, в [12] и [13] мы определили типичное изменение спектральных свойств фиксированного собственного значения матрицы при добавлении к ней нового столбца η и новой строки ξ . Под типичностью изменения спектральных свойств здесь мы подразумевали его выполнение для почти всех векторов ξ и η (по $2N$ -мерной мере Лебега или по любой другой мере, относительно которой координаты ξ и η являются независимыми непрерывно распределенными случайными величинами). Оказалось, что оно является таким же, как и в

утверждении теоремы 1: пропадает одна самая большая по размеру жорданова клетка, а порядки остальных не изменяются.

Чтобы прокомментировать эту ситуацию будем считать, что первая строка и первый столбец матрицы A состоят из одних нулей. Если $\xi \neq e_1$ и $\eta \neq e_1$, где e_1 – вектор, первая координата которого равна единице, а все остальные – нулю, то добавление столбца η и строки ξ является оператором ранга 2. В силу сказанного выше при возмущении типичным оператором ранга 2 новым рядом порядков жордановых клеток будет $n_1, \dots, n_k - 2$, а не $n_1, \dots, n_k - 2, n_k - 1$. Разрешение полученного “противоречия” содержится в следующем простом замечании: добавление новой строки и нового столбца не является типичным оператором ранга 2. Дело в том, что в соответствующем представлении $(\cdot, \xi_1)\eta_1 + (\cdot, \xi_2)\eta_2$ для такого преобразования векторы ξ_1 и η_2 фиксированы и совпадают с e_1 (при этом $\xi_1 = \xi, \eta_2 = \eta$). Мера Лебега всех таких $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$, в $4N$ -мерном пространстве равна нулю. Поэтому при добавлении новой строки и нового столбца изменение спектральных свойств не обязано быть таким же как при возмущении типичным оператором ранга 2.

Справедливость равенства $n_C(\lambda) = n_A(\lambda) - \text{ind}_A(\lambda)$ может быть доказана во многих случаях. Мы остановимся на матрицах с неотрицательными элементами. По теореме Перрона каждая такая матрица M имеет неотрицательное собственное значение $\lambda(M)$, совпадающее со спектральным радиусом M (см. [14, глава 13]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть A – произвольная матрица с неотрицательными элементами, ξ и η – векторы с положительными координатами, $B = (\cdot, \xi)\eta$ – оператор ранга один и $C = A + B$. Расположим по возрастанию порядки жордановых клеток, соответствующих собственному значению Перрона $\lambda(A)$ матрицы A : $n_1 \leq \dots \leq n_k$. Тогда интервал $(\lambda(A), \lambda(C))$ не содержит точек спектра матрицы C и точка $\lambda(A)$ является собственным значением матрицы C , если и только если $k \geq 2$. В этом случае $n_1, \dots, n_{k-1}$ – порядки жордановых клеток для $\lambda(A)$ как собственного значения матрицы C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$(zE - A)^{-1} = z^{-1}E + z^{-2}A + \dots + z^{-n-1}A^n + \dots,$$

то при любом положительном $z > \lambda(A)$ матрица $(zE - A)^{-1}$ имеет неотрицательные элементы. Используя (2) при $\lambda = \lambda(A)$, отсюда нетрудно вывести, что такой же будет матрица, отвечающая проектору Q_{-q} , где $q = \text{ind}_A(\lambda(A))$ (этот факт хорошо известен, впервые упоминается в [15] и успешно используется, например, в [16]). По условию координаты векторов ξ и η положительны, а оператор Q_{-q} не равен нулю по определению числа q . Поэтому $(Q_{-q}\eta, \xi) > 0$ и, следовательно, при $\lambda = \lambda(A)$ имеем $n_C(\lambda) = n_A(\lambda) - \text{ind}_A(\lambda)$ со всеми вытекающими отсюда следствиями (см. теорему 1).

По условию элементы матрицы C положительны. В этом случае мы можем утверждать, что $\lambda(A) < \lambda(C)$ (см. [14, глава 13, лемма 2]). В силу тождества (1) это строгое неравенство означает, что любое собственное значение матрицы C из интервала $(\lambda(A), \lambda(C)]$ должно быть нулем функции $1 - ((zE - A)^{-1}\eta, \xi)$. В частности, это справедливо для простого собственного значения $\lambda(C)$, т.е. $1 - ((\lambda(C)E - A)^{-1}\eta, \xi) = 0$. Используя неотрицательность элементов всех степеней матрицы A , а также положительность координат векторов ξ и η , нетрудно показать, что функция $1 - ((zE - A)^{-1}\eta, \xi)$ строго возрастает на интервале $(\lambda(A), \infty)$. Поэтому $1 - ((zE - A)^{-1}\eta, \xi) < 0$ при

$z \in (\lambda(A), \lambda(C))$ и, следовательно, интервал $(\lambda(A), \lambda(C))$ свободен от точек спектра матрицы C . Следствие доказано.

4. Теория возмущений для новых собственных значений и собственных векторов. Рассмотрим матрицу $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$. Пусть $p(\varepsilon) = n_A(\lambda) - n_{C(\varepsilon)}(\lambda)$. Положим $C = C(1)$ и $p = p(1)$. Так как

$$\det(zE - C(\varepsilon)) = (1 - \varepsilon((zE - A)^{-1}\eta, \xi)) \det(zE - A), \quad (5)$$

то $p(\varepsilon) = p$ при любом $\varepsilon \neq 0$, если $p \geq 1$. В противном случае существует такое ε_0 , что $p(\varepsilon) = 0$ для каждого $\varepsilon \neq \varepsilon_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – произвольная матрица, $B = (\cdot, \xi)\eta$ – оператор ранга один и $C(\varepsilon) = A + \varepsilon B$. Рассмотрим произвольное собственное значение λ матрицы A . Предположим, что $p = n_A(\lambda) - n_C(\lambda) \geq 1$. Тогда для любого достаточно малого ε существуют ровно p простых собственных значений $\lambda_k(\varepsilon)$, где $k = 1, \dots, p$, в достаточно малой окрестности точки $z = \lambda$ и каждый из них допускает следующее разложение:

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda + (Q_{-p}\eta, \xi)^{1/p} e^{-2\pi i k/p} \varepsilon^{1/p} + \sum_{d=2}^{\infty} \varepsilon^{d/p} a_d^{(k)}, \quad (6)$$

где $Q_{-p} = (A - \lambda E)^{p-1} Q_{-1}$, Q_{-1} – проектор на корневое подпространство $L_A(\lambda)$, $a_d^{(k)}$ – некоторые коэффициенты (можно считать $a_1^{(k)} = (Q_{-p}\eta, \xi)^{1/p} e^{-2\pi i k/p}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(\lambda)$ – такая окрестность точки $z = \lambda$, что внутри ее нет других точек спектра матрицы A . Если параметр ε возмущения достаточно мал, то сумма алгебраических кратностей собственных значений матрицы $C(\varepsilon)$, находящихся в $U(\lambda)$, равна $n_A(\lambda)$. Таким образом, в $U(\lambda)$ содержится ровно $p = n_A(\lambda) - n_{C(\varepsilon)}(\lambda)$ собственных значений матрицы $C(\varepsilon)$, которые не принадлежат спектру возмущаемой матрицы A . В силу (5) все они являются корнями уравнения (см. также (3))

$$1 - \varepsilon((zE - A)^{-1}\eta, \xi) = 1 - \varepsilon \sum_{m=1}^q (Q_{-m}\eta, \xi)(z - \lambda)^{-m} - \varepsilon R_*(z) = 0. \quad (7)$$

Положим $a_{-m} = (Q_{-m}\eta, \xi)$. В силу определения числа p мы можем утверждать, что $a_{-m} = 0$ при $m > p$ и $a_{-p} \neq 0$. Поэтому (7) может быть переписано в следующем виде:

$$1 - \varepsilon((zE - A)^{-1}\eta, \xi) = 1 - \varepsilon \sum_{m=1}^p a_{-m}(z - \lambda)^{-m} - \varepsilon R_*(z) = 0. \quad (8)$$

Положим $u = \varepsilon^{1/p}$ и $w = u/(z - \lambda)$. Тогда (8) примет вид уравнения $P(w, u) = 0$, где

$$P(w, u) = 1 - \sum_{m=1}^p a_{-m} u^{p-m} w^m - u^p R_*(w, u).$$

Уравнение $P(w, 0) = 1 - a_{-p} w^p = 0$ имеет p простых корней $a_{-p}^{-1/p} e^{2\pi i k/p}$, где $a_{-p}^{-1/p}$ – некоторое фиксированное решение уравнения $w^p = a_{-p}^{-1}$ и $k = 1, \dots, p$. В силу аналитического варианта теоремы о неявной функции (см., например, [17, с. 666–670]) существуют ровно p функций $w_k(u)$, аналитических в некоторой окрестности точки $u = 0$,

для которых $w_k(0) = a_{-p}^{-1/p} e^{2\pi i k/p}$ и $P(w_k(u), u) = 0$. В свою очередь, это значит, что при достаточно малых ε в окрестности $U(\lambda)$ можно найти p простых собственных значений $\lambda_k(\varepsilon)$, где $k = 1, \dots, p$, матрицы $C(\varepsilon)$, отличных от λ , и каждый из них допускает разложение (6). Предложение доказано.

Перед тем, как написать нулевые приближения для собственных векторов, соответствующих собственным значениям $\lambda_k(\varepsilon)$, мы получим выражения для них в более общем случае.

ЛЕММА 5. Пусть A – произвольная матрица, $B = (\cdot, \xi)\eta$ – оператор ранга один и $C = A + B$. Предположим, что некоторое собственное значение μ матрицы C не принадлежит спектру матрицы A . Тогда $g_C(\mu) = 1$ и соответствующая жорданова цепочка векторов матрицы C может быть выбрана в следующем виде:

$$(A - \mu E)^{-1}\eta, \dots, (A - \mu E)^{-q}\eta,$$

где $q = n_C(\mu) = \text{ind}_C(\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 имеем $g_C(\mu) = 1$ (напомним, что по условию $g_A(\mu) = 0$). Проверим, что векторы $(A - \mu E)^{-1}\eta, \dots, (A - \mu E)^{-q}\eta$ действительно образуют жорданову цепочку матрицы C для собственного значения μ . В силу леммы 1 точка $z = \mu$ является нулем порядка $q = n_C(\mu)$ функции $1 - ((zE - A)^{-1}\eta, \xi)$. В частности, $1 - ((\mu E - A)^{-1}\eta, \xi) = 0$ и, следовательно,

$$(C - \mu E)(A - \mu E)^{-1}\eta = (A - \mu E)(A - \mu E)^{-1}\eta + ((A - \mu E)^{-1}\eta, \xi)\eta = \eta + (-1)\eta = 0.$$

Таким образом, $(A - \mu E)^{-1}\eta$ является собственным вектором матрицы C для собственного значения μ .

Кроме того, при $m = 1, \dots, q - 1$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} ((zE - A)^{-1}\eta, \xi) \Big|_{z=\mu} = (-1)^m m! ((\mu E - A)^{-m-1}\eta, \xi) = 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (C - \mu E)(A - \mu E)^{-m-1}\eta &= (A - \mu E)(A - \mu E)^{-m-1}\eta + ((A - \mu E)^{-m-1}\eta, \xi)\eta \\ &= (A - \mu E)^{-m}\eta. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Выберем собственный вектор $\eta^{(k)}(\varepsilon)$, соответствующий собственному значению $\lambda_k(\varepsilon)$, в следующем виде:

$$\eta^{(k)}(\varepsilon) = -\varepsilon^{p'/p} (A - \lambda_k(\varepsilon)E)^{-1}\eta.$$

Здесь $p' = \max\{m : Q_{-m}\eta \neq 0\}$. Очевидно, $p' \geq p$ (мы напоминаем, что $p = \max\{m : (Q_{-m}\eta, \xi) \neq 0\}$). Используя (2) и (6), мы получаем следующее разложение:

$$\eta^{(k)}(\varepsilon) = a_{-p}^{-p'/p} e^{2\pi i p' k/p} Q_{-p'}\eta + \sum_{d=1}^{\infty} \eta_d^{(k)} \varepsilon^{d/p}.$$

В частности, при $p = \text{ind}_A(\lambda) = q$ имеем

$$\eta^{(k)}(\varepsilon) = a_{-q}^{-1} Q_{-q}\eta + \sum_{d=1}^{\infty} \eta_d^{(k)} \varepsilon^{d/q}.$$

Отметим, что в этом случае корневое подпространство $L_{A+\varepsilon B}(\lambda)$ не зависит от $\varepsilon \neq 0$. Поэтому при достаточно малых ε полученные выше результаты дают полное описание изменения жорданова базиса матрицы $A + \varepsilon B$ вблизи собственного значения λ .

Приложение: построение пары дуальных жордановых цепочек для нового собственного значения μ . Вернемся к нашей более общей проблеме описания корневых векторов. Выше мы показали, что векторы

$$(A - \mu E)^{-1}\eta, \dots, (A - \mu E)^{-q}\eta$$

образуют жорданову цепочку матрицы C для ее собственного значения μ , если μ не принадлежит спектру матрицы A . Здесь $q = n_C(\mu) = \text{ind}_C(\mu)$. Аналогичное утверждение справедливо и для транспонированной матрицы $C^\top = A^\top + (\cdot, \eta)\xi$:

$$(A^\top - \mu E)^{-1}\xi, \dots, (A^\top - \mu E)^{-q}\xi$$

является жордановой цепочкой матрицы $C^\top$ для ее собственного значения μ . Но эти векторы не обязаны образовывать систему, дуальную к системе векторов $(A - \mu E)^{-q}\eta, \dots, (A - \mu E)^{-1}\eta$ (напомним, что именно дуальная система используется в различных спектральных представлениях). Следующее утверждение позволяет построить такую систему.

Предложение 2. Пусть A — произвольная матрица, $B = (\cdot, \xi)\eta$ — оператор ранга один и $C = A + B$. Предположим, что собственное значение μ матрицы C не принадлежит спектру матрицы A . Положим $q = n_C(\mu)$ и рассмотрим систему таких векторов $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_q$, что $\xi_1 = (A^\top - \mu E)^{-1}\xi$ и для любого $k \geq 2$ вектор ξ_k определяется по следующему правилу:

$$\xi_k = (A^\top - \mu E)^{-k}\xi - \alpha_1\xi_{k-1} - \dots - \alpha_m\xi_{k-m} - \dots - \alpha_{k-1}\xi_1,$$

где

$$\alpha_m = \frac{(\xi, (A - \mu E)^{-q-m-1}\eta)}{(\xi, (A - \mu E)^{-q-1}\eta)}.$$

Тогда векторы $\xi_q, \dots, \xi_1$, деленные на $(\xi, (A - \mu E)^{-q-1}\eta)$, образуют жорданову цепочку матрицы $C^\top$ для μ , которая дуальна жордановой цепочке $(A - \mu E)^{-1}\eta, \dots, (A - \mu E)^{-q}\eta$ матрицы C для того же самого собственного значения μ .

Доказательство. Случай $q = 1$ тривиален. Поэтому мы будем предполагать, что $q \geq 2$. Доказательство проведем индукцией по k . Вектор $(A^\top - \mu E)^{-1}\xi$ ортогонален любому вектору $(A - \mu E)^{-m}\eta$, где $m = 1, \dots, q - 1$, потому что

$$((A^\top - \mu E)^{-1}\xi, (A - \mu E)^{-m}\eta) = (\xi, (A - \mu E)^{-m-1}\eta) = 0$$

для такого m . По условию $((A^\top - \mu E)^{-1}\xi, (A - \mu E)^{-q}\eta) = (\xi, (A - \mu E)^{-q-1}\eta) \neq 0$. Поэтому $(\xi_1, (A - \mu E)^{-m}\eta) = (\xi, (A - \mu E)^{-q-1}\eta)\delta_{1, q-m+1}$. Кроме того, $(C^\top - \mu E)\xi_1 = \xi_0$ (здесь и везде в дальнейшем $\xi_0 = 0$). Таким образом, мы можем рассматривать случай $k = 1$ как базу индукции.

Предположим, что мы уже показали справедливость равенств $(C^\top - \mu E)\xi_p = \xi_{p-1}$ при $p = 1, \dots, k$ и $(\xi_p, (A - \mu E)^{-m}\eta) = (\xi, (A - \mu E)^{-q-1}\eta)\delta_{p, q-m+1}$, где $p = 1, \dots, k$ и $m = 1, \dots, q$. Тогда

$$(C^\top - \mu E)\xi_{k+1} = (A^\top - \mu E)^{-k}\xi - \alpha_1\xi_{k-1} - \dots - \alpha_{k-1}\xi_1 = \xi_k$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}(\xi_{k+1}, (A - \mu E)^{-m} \eta) &= (\xi_{k+1}, (C - \mu E)(A - \mu E)^{-m-1} \eta) \\&= ((C^T - \mu E) \xi_{k+1}, (A - \mu E)^{-m-1} \eta) \\&= (\xi_k, (A - \mu E)^{-m-1} \eta) = (\xi, (A - \mu E)^{-q-1} \eta) \delta_{k, q-m}\end{aligned}$$

при $m \leq q - 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned}(\xi_{k+1}, (A - \mu E)^{-q} \eta) &= ((A^T - \mu E)^{-k-1} \xi - \alpha_1 \xi_k - \dots - \alpha_k \xi_1, (A - \mu E)^{-q} \eta) \\&= ((A^T - \mu E)^{-k-1} \xi, (A - \mu E)^{-q} \eta) - \alpha_k (\xi_1, (A - \mu E)^{-q} \eta) \\&= (\xi, (A - \mu E)^{-q-k-1} \eta) - \alpha_k (\xi, (A - \mu E)^{-q-1} \eta) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\xi_{k+1}, (A - \mu E)^{-m} \eta) = (\xi, (A - \mu E)^{-q-1} \eta) \delta_{k+1, q-m+1}$$

и, следовательно, шаг индукции сделан. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Используя доказательство леммы 4, нетрудно понять, что жорданова цепочка для C^T , построенная в предложении 2, принадлежит жорданову базису этой матрицы, дуальному любому (но фиксированному) жорданову базису матрицы C , содержащему жорданову цепочку $(A - \mu E)^{-1} \eta, \dots, (A - \mu E)^{-q} \eta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Построение, изложенное выше, также пригодно в случае, когда собственное значение μ принадлежит спектру матрицы A , но обе вектор-функции $(zE - A)^{-1} \eta$ и $(zE - A^T)^{-1} \xi$ определены в точке $z = \mu$. Действительно, вектор-функция $(zE - A)^{-1} \eta$ аналитична в точке $z = \mu$, если и только если вектор η принадлежит прямой сумме всех корневых подпространств матрицы A , отличных от $L_A(\mu)$. В этом случае вектор η ортогонален пространству $L_{A^T}(\mu)$ и, следовательно, $L_{A^T}(\mu)$ является подпространством $L_{C^T}(\mu)$ и ограничение C^T на $L_{A^T}(\mu)$ совпадает с действием A^T на нем. Аналогичное утверждение справедливо для вектор-функции $(zE - A^T)^{-1} \xi$: она аналитична в точке $z = \mu$, если и только если вектор ξ принадлежит прямой сумме корневых подпространств матрицы A^T , отличных от $L_{A^T}(\mu)$. В этом случае вектор ξ ортогонален пространству $L_A(\mu)$ и, следовательно, $L_A(\mu)$ является подпространством $L_C(\mu)$ и ограничение C на $L_A(\mu)$ совпадает с действием A на нем. Если оба эти условия на η и ξ выполнены, то

$$(A - \mu E)^{-1} \eta, \dots, (A - \mu E)^{-q} \eta \quad \text{и} \quad (A^T - \mu E)^{-1} \xi, \dots, (A^T - \mu E)^{-q} \xi$$

являются жордановыми цепочками длины $q = n_C(\mu) - n_A(\mu)$ матриц C и C^T соответственно (обе эти цепочки соответствуют собственному значению μ). Кроме того, векторы $\xi_q, \dots, \xi_1$, деленные на $(\xi, (A - \mu E)^{-q-1} \eta)$, образуют дуальную систему к системе векторов

$$(A - \mu E)^{-1} \eta, \dots, (A - \mu E)^{-q} \eta.$$

В качестве остальных жордановых цепочек матрицы C для собственного значения μ можно взять жордановы цепочки матрицы A из жорданова базиса подпространства $L_A(\mu)$. Таким образом, если $n_1, \dots, n_k$ – порядки жордановых клеток для собственного значения μ матрицы A , то $n_1, \dots, n_k, n_C(\mu) - n_A(\mu)$ – порядки жордановых клеток для μ , как собственного значения матрицы C .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin: Springer, 1980.
- [2] Baumgartel H. Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators. Basel: Birkhäuser, 1985.
- [3] Moro J., Dopico F. M. First order eigenvalue perturbation theory and the Newton diagram // Proceedings of the Applied Mathematics and Scientific Computing Meeting AMSC, 2001. Kluwer, 2002.
- [4] Лидский В. Б. К теории возмущений несамосопряженных операторов // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 1. С. 52–60.
- [5] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 3–80.
- [6] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Основные положения о дефектных и корневых числах и индексах линейных операторов // УМН. 1957. Т. 12. № 2. С. 43–118.
- [7] Гельфанд И. М., Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. 1955. Т. 10. № 1. С. 3–40.
- [8] Moro J., Burke J. V., Overton M. L. On the Lidskii–Vishik–Lyusternik perturbation theory for eigenvalues of matrices with arbitrary Jordan structure // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997. V. 18. P. 793–817.
- [9] Ma Y., Edelman A. Nongeneric eigenvalue perturbations of Jordan blocks // Linear Algebra Appl. 1998. V. 273. P. 45–63.
- [10] Jeannerod C.-P. On some nongeneric perturbations of an arbitrary Jordan structure. Preprint.
- [11] Крейн М., Гохберг И. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
- [12] Savchenko S. V. On the Perron roots of principal submatrices of co-order one of irreducible nonnegative matrices // Linear Algebra Appl. 2003. V. 361. P. 257–277.
- [13] Савченко С. В. О спектральных свойствах неразложимой неотрицательной матрицы и ее главных подматриц копорядка один // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 191–192.
- [14] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [15] Karlin S. Positive operators // J. Math. Mech. 1959. V. 8. P. 907–937.
- [16] Hartwig R. E., Neumann M., Rose N. J. An algebraic-analytic approach to nonnegative basis // Linear Algebra Appl. 1990. V. 133. P. 77–88.
- [17] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: Физматгиз, 1950.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: sav@icp.ac.ru

Поступило
07.08.2002