Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Старовойтов, О совпадении наименьших равномерных уклонений функции от полиномов и рациональных дробей, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 612–617

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:03:25

УДК 517.51

О СОВПАДЕНИИ НАИМЕНЬШИХ РАВНОМЕРНЫХ УКЛОНЕНИЙ ФУНКЦИИ ОТ ПОЛИНОМОВ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

А. П. Старовойтов

Для заданной невозрастающей последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных действительных чисел, которая стремится к нулю, найдены необходимые и достаточные условия на последовательность $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которой существует непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция f такая, что $R_{n_k, m_k}(f) = E_{n_k}(f) = a_{n_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $E_n(f)$ и $R_{n, m}(f)$ – наилучшие равномерные приближения функции f полиномами степени не выше n и рациональными функциями вида $r_{n, m}(x) = p_n(x)/q_m(x)$ соответственно.

Библиография: 10 названий.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Пусть $C[a, b]$ – банахово пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественнозначных функций с равномерной нормой. Обозначим через $\mathcal{R}_m^n$ множество всех рациональных функций с вещественными коэффициентами, степень числителя которых не выше n , а степень знаменателя не выше m . В частности, $\mathcal{P}_n = \mathcal{R}_0^n$ и $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n^n$ – соответственно множества всех полиномов и рациональных функций степени не выше n . Для функции $f \in C[a, b]$ рассмотрим ее наименьшие равномерные отклонения от рациональных дробей из $\mathcal{R}_m^n$, т.е.

$$R_{n, m} = R_{n, m}(f) = \inf\{\|f - r\| : r \in \mathcal{R}_m^n\},$$

где $\|g\| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Тогда величины

$$E_n = E_n(f) = R_{n, 0}(f) \quad \text{и} \quad R_n = R_n(f) = R_{n, n}(f)$$

являются соответственно наименьшими отклонениями функции f от полиномов и рациональных дробей степени не выше n . Поскольку очевидны включения

$$\mathcal{P}_{n+1} \supset \mathcal{P}_n, \quad \mathcal{R}_m^{n+1} \supset \mathcal{R}_m^n, \quad \mathcal{R}_{m+1}^n \supset \mathcal{R}_m^n,$$

то из свойств точной нижней грани получим, что

$$0 \leq R_{n+1} \leq R_n \leq R_{n, m+1} \leq R_{n, m} \leq E_n \leq E_{n-1}$$

при $m = 0, 1, \dots, n-1$; $n = 1, 2, 3, \dots$.

В силу теоремы Вейерштрасса отсюда следует, что последовательность $\{E_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ стремится к нулю, не возрастая. Отмеченные свойства наименьших полиномиальных отклонений характеризуют их полностью. Именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА БЕРНШТЕЙНА [1]. Если невозрастающая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных действительных чисел сходится к нулю, то существует функция $f \in C[a, b]$, для которой

$$E_n(f) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Аналог этой теоремы для рациональных приближений получен лишь частично. Именно, для любой невозрастающей и сходящейся к нулю последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ Долженко [2] построил такую непрерывную функцию f , для которой при $n_k = 9^k$ справедливы равенства

$$R_{n_k}(f) = E_{n_k}(f) = a_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

В связи с этим возник вопрос, насколько плотной в $\mathbb{N}$ может быть последовательность $\{n_k\}$, для которой при любом выборе последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ с указанными выше свойствами найдется функция $f \in C[a, b]$, удовлетворяющая равенствам (1)?

Бозм [3] показал, что если равенства $R_n(f) = E_n(f)$ выполняются при всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то $f(x) = AT_k(x) + B$, где T_k – некоторый многочлен Чебышева для отрезка $[a, b]$, а A, B – постоянные. Это означает, что последовательность $\{n_k\}$ из (1) является некоторым собственным подмножеством $\mathbb{N}$. Позже было установлено [4, гл. 7, § 2, равенство (2.12)], что с помощью метода Долженко последовательность $n_k = 9^k$ в (1) можно заменить на $n_k = 3^k$. Окончательный результат был получен Пекарским [5]. Именно, последовательность $n_k = 2^k - 1$ является самой “медленной последовательностью”, для которой имеют место равенства (1).

В данной работе рассматривается следующая

ЗАДАЧА. Насколько плотной в $\mathbb{N}$ может быть последовательность $\{n_k\}$, для которой при любом выборе последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ с указанными выше свойствами найдется функция $f \in C[a, b]$, удовлетворяющая равенствам

$$R_{n_k, m_k}(f) = E_{n_k}(f) = a_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots? \quad (2)$$

Ответ на поставленный вопрос дают следующие теоремы 1 и 2.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательности $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ неотрицательных целых чисел удовлетворяют условию

$$n_{k+1} \geq n_k + m_k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда существует такая функция $f \in C[a, b]$, для которой

$$R_{n_k, m_k}(f) = E_{n_k}(f) = a_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для функции $f \in C[a, b]$ и некоторых наборов $\{m_j\}_{j=0}^k$, $\{n_j\}_{j=0}^k$ целых неотрицательных чисел $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_k$ имеют место соотношения:

$$E_{n_0} > E_{n_1} > \dots > E_{n_k}, \quad (3)$$

$$R_{n_j, m_j} = E_{n_j}, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (4)$$

Тогда найдется набор $\{n'_j\}_{j=0}^k$ таких целых неотрицательных чисел, что $n'_j \leq n_j$ и

$$n'_{j+1} \geq n'_j + m_j + 1 \quad \text{при } j = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Положив в теоремах 1 и 2 $m_k = n_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, получим упомянутый выше результат Пекарского.

СЛЕДСТВИЕ 1 [5]. Для последовательности $n_k = 2^k - 1$ существует непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f , для которой выполняются соотношения (1). Обратно, если для функции $f \in C[a, b]$ и некоторого набора целых неотрицательных чисел $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_k$ выполняются соотношения

$$E_{n_0} > E_{n_1} > \dots > E_{n_k}, \quad R_{n_j} = E_{n_j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k,$$

то $n_k \geq 2^k - 1$.

Рассмотрим случай, когда $m_k = m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где m — фиксированное целое неотрицательное число.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого фиксированного целого неотрицательного числа m существует такая функция $f \in C[a, b]$, что

$$R_{(m+1)k, m} = E_{(m+1)k} = a_{(m+1)k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, при $m = 1$ найдется такая функция $f \in C[a, b]$, что

$$R_{2k, 1} = E_{2k} = a_{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Отметим, что ранее Назаренко [6] построил пример функции f из класса Харди H_2 , для которой имеют место левые равенства (5) в случае наименьших уклонений f от рациональных дробей и полиномов в метрике пространства H_2 .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и для некоторого набора целых чисел $0 \leq n_0 < n_1 < \dots < n_k$ выполняются соотношения

$$E_{n_0} > E_{n_1} > \dots > E_{n_k}, \quad R_{n_j, m} = E_{n_j}, \quad j = 0, 1, \dots, k,$$

то $n_k \geq (m+1)k$.

Таким образом, когда рассматриваются наилучшие диагональные рациональные приближения, самая “медленная последовательность” $\{n_k\}$, удовлетворяющая (2) вместе с некоторой функцией $f \in C[a, b]$, растет с точностью до константы как геометрическая прогрессия $\{2^k\}_{k=0}^\infty$. В случае m -й строки ее рост совпадает с ростом арифметической прогрессии $\{(m+1)k\}_{k=0}^\infty$.

2. Доказательство основных результатов. Перейдем к доказательству теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Введем вспомогательную последовательность $\{a'_n\}_{n=0}^\infty$:

$$a'_n = \begin{cases} a_n, & \text{если } n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1, \\ a_{n_k}, & \text{если } n = n_k, n_k + 1, \dots, n_{k+1} - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Из теоремы Бернштейна следует существование функции f , для которой $E_n = a'_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$. Покажем, что эта функция является искомой, т.е.

$$R_{n_k, m_k}(f) = E_{n_k}(f) = a_{n_k} \quad \text{при } k = 0, 1, 2, \dots$$

Действительно, пусть $p_{n_k} \in \mathcal{P}_{n_k}$ есть многочлен наилучшего приближения функции f . Поскольку

$$E_{n_k} = E_{n_k+1} = \dots = E_{n_{k+1}-1} = a_{n_k},$$

то p_{n_k} будет элементом наилучшего приближения и в $\mathcal{P}_{n_{k+1}-1}$. Ввиду теоремы Чебышева разность $f - p_{n_k}$ имеет на $[a, b]$ по крайней мере $(n_{k+1} - 1) + 2 = n_{k+1} + 1$ точек альтернанса. Далее, применим теорему Ахиезера [7], которая дает критерий дробки наилучшего приближения. Именно, p_{n_k} будет элементом наилучшего приближения в $\mathcal{R}_{m_k}^{n_k}$, если разность $f - p_{n_k}$ имеет по крайней мере $n_k + m_k + 2$ точек альтернанса. Нужно количество точек имеется, поскольку из неравенства $n_{k+1} \geq n_k + m_k + 1$ следует, что $n_{k+1} + 1 \geq n_k + m_k + 2$. Отсюда

$$E_{n_k} = \|f - p_{n_k}\| = R_{n_k, m_k} = a_{n_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема доказана.

С помощью рассуждений, применяемых при доказательстве теоремы 1, легко получить следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любого фиксированного целого неотрицательного числа n и любого сколь угодно большого натурального t существует такая функция $f \in C[a, b]$, для которой

$$R_{n, m}(f) = E_n(f).$$

В частности, для $n = 0$ при сколь угодно большом t существует такая функция $f \in C[a, b]$, для которой

$$R_{0, m}(f) = E_0(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно положить

$$a'_k = \begin{cases} a_k, & \text{если } k = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \\ a_n, & \text{если } k = n, n + 1, \dots, n + t, \\ a_{n+k}, & \text{если } k = n + t + 1, n + t + 2, \dots, \end{cases}$$

а затем воспользоваться теоремой Бернштейна.

Следствие 4 показывает, что, во-первых, для некоторых функций из пространства $C[a, b]$ аппроксимация дробями вида

$$\left\{ \frac{1}{p_m(x)} : p_m \in \mathcal{P}_m \right\}$$

не эффективна, во-вторых, расширение множества аппроксимирующих функций с $\mathcal{P}_n$ до $\mathcal{R}_m^n$ для любого сколь угодно большого m не дает выигрыша в скорости аппроксимации на всем пространстве $C[a, b]$. В случае, когда $n = m$, данное явление в поведении наименьших уклонений функций из $C[a, b]$ при приближении множествами $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{R}_n$ было обнаружено и детально исследовано Гончаром и Долженко (см., например, [2], [8]).

Следующее утверждение для приближений в L_p получено в [9]. В более общей ситуации оно встречается в [6].

ЛЕММА. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и для некоторых натуральных чисел n и m $R_{n,m} = E_n < E_{n-1}$. Тогда

$$E_n = E_{n+1} = \dots = E_{n+m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_k \in \mathcal{P}_k$ — элемент наилучшего приближения f . Так как $E_n < E_{n-1}$, то $\deg p_n = n$ и $n \leq \deg p_{n+m} \leq n + m$. Обозначим соответственно через φ и ψ остаток и частное при делении многочлена $p_{n+m} - p_n$ на многочлен p_n . Тогда $\varphi \in \mathcal{P}_{n-1}$, $\psi \in \mathcal{P}_m$ и

$$(\psi + 1)p_n + \varphi = p_{n+m}. \quad (6)$$

Для достаточно малых $\lambda > 0$ рассмотрим функцию

$$r_{n,m} = \frac{p_n + \lambda\varphi}{1 - \lambda\psi},$$

принадлежащую множеству $\mathcal{R}_m^n$. Из (6) при $\lambda \rightarrow 0$ вытекают равенства

$$\begin{aligned} r_{n,m} &= (p_n + \lambda\varphi)(1 + \lambda\psi + o(\lambda)) \\ &= (1 - \lambda)p_n + \lambda[(\psi + 1)p_n + \varphi] + o(\lambda) \\ &= (1 - \lambda)p_n + \lambda p_{n+m} + o(\lambda). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_{n,m}(f) &\leq \|f - r_{n,m}\| \leq (1 - \lambda)\|f - p_n\| + \lambda\|f - p_{n+m}\| + o(\lambda) \\ &\leq E_n - \lambda(E_n - E_{n+m}) + o(\lambda). \end{aligned}$$

Если теперь $E_{n+m} < E_n$, то из последнего неравенства получим, что $R_{n,m} < E_n$. Это противоречит условию. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Построим набор таких целых неотрицательных чисел $n'_j \leq n_j$, $n'_0 < n'_1 < \dots < n'_k$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$1) R_{n'_j, m_j} = E_{n'_j}, j = 0, 1, 2, \dots, k;$$

$$2) E_{n'_k} < \dots < E_{n'_1} < E_{n'_0}.$$

Для этого в качестве n'_0 возьмем наименьшее число $n'_0 \geq 0$, для которого $R_{n'_0, m_0} = E_{n'_0}$. Ясно, что $n'_0 \leq n_0$. Если $n'_0 > 0$, то можно считать, что $E_{n'_0} < E_{n'_0-1}$. В противном случае

$$R_{n'_0, m_0} = E_{n'_0} = E_{n'_0-1} \leq R_{n'_0-1, m_0} \leq E_{n'_0-1}$$

и n'_0 можно заменить $n'_0 - 1$. Определим теперь наименьшее $n'_1 > n'_0$, для которого $R_{n'_1, m_1} = E_{n'_1} < E_{n'_0}$. Из условий (3) и (4) очевидно, что $n'_1 \leq n_1$ и можно считать, что $E_{n'_1} < E_{n'_1-1}$. В противном случае

$$R_{n'_1, m_1} = E_{n'_1} = E_{n'_1-1} \leq R_{n'_1-1, m_1} \leq E_{n'_1-1}.$$

Отсюда следует, что

$$R_{n'_1-1, m_1} = E_{n'_1-1} = E_{n'_1} < E_{n'_0}$$

и n'_1 можно заменить на $n'_1 - 1$. Далее, по индукции определяются $n'_2, n'_3, \dots, n'_k$. Поскольку

$$R_{n'_j, m_j} = E_{n'_j} < E_{n'_j-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k,$$

то на основании леммы получаем, что $n'_{j+1} \geq n'_j + m_j + 1$. Теорема доказана.

Отметим, что близкие вопросы, относящиеся к теоремам Бернштейна и Долженко, затрагиваются также в работах [6], [9], [10].

В заключение автор выражает благодарность профессору А. А. Пекарскому за полезные обсуждения полученных результатов и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: ЛГУ, 1977.
- [2] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313–320.
- [3] Boehm В. Functions, whose best rational Chebyshev approximations are polynomials // Numer. Math. 1964. V. 6. № 3. P. 235–242.
- [4] Lorentz G., v. Golitschek M., Makavoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [5] Пекарский А. А. О случаях совпадения наилучших равномерных полиномиальных и рациональных приближений // J. Technical University at Plovdiv. 1996. V. 2. "Fund. Sci. and Appl." P. 41–44.
- [6] Назаренко М. А. Некоторые свойства рациональных аппроксимаций. // Дисс. . . к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1997.
- [7] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [8] Гончар А. А. Обратные теоремы о наилучших приближениях на замкнутых множествах // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 1. С. 25–28.
- [9] Вячеславов Н. С., Рамазанов А. К. О степени рациональных функций наилучшего приближения в $L_p(R^m)$ // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 37–45.
- [10] Пекарский А. А. Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-матем. 1994. № 1. С. 23–26.