Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Боровских, Условия знакорегулярности разрывных краевых задач, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 643–655

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 07:04:22

УДК 517.954

УСЛОВИЯ ЗАКОРЕГУЛЯРНОСТИ РАЗРЫВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. В. Боровских

Для многоточечной разрывной краевой задачи с неосциллирующим дифференциальным оператором приводится аналог условий Калафати, обеспечивающих свойство знакорегулярности: число перемен знака у решения не превосходит числа перемен знака у правой части. Свойство знакорегулярности позволяет устанавливать для соответствующей спектральной задачи штурмовские свойства спектра (вещественность, положительность, простота собственных значений, перемежаемость нулей собственных функций и т.д.).

Библиография: 23 названия.

1. Введение. В известном мемуаре [1] Штурм обнаружил следующие замечательные свойства собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов второго порядка специального вида:

- 1) все собственные значения вещественные, положительные, простые;
- 2) i -я (считая с нуля в порядке возрастания собственных значений) собственная функция имеет точно i нулей;
- 3) нули i -й и $(i + 1)$ -й функций перемежаются.

Этот комплекс свойств, называемых сейчас *осцилляционными* [1]–[14], является одним из наиболее полных и емких качественных описаний, характеризующих общие гармонические свойства колебаний (осцилляций) одномерных упругих систем: он означает, что система колеблется “так же”, как однородная струна. Отличия в числовых значениях собственных частот и в виде функций, описывающих формы собственных колебаний, не меняют ни структуру спектра в совокупности, ни “внешнего вида” форм собственных колебаний, определяемого количеством и взаимным расположением узловых точек этих форм.

Основным инструментом обоснования 1)–3) для различных классов спектральных задач вида

$$Ly = \lambda q(x)y, \quad l_i(y) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Результаты, представленные в данной работе, получены при финансовой поддержке Госкомвуза РФ, грант № E00-1.0-154, Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00418, и программы “Университеты России”, проект УР.04.01.047.

(где L – некоторое обыкновенное дифференциальное выражение, l_i – набор функционалов, определяющих краевые условия), являются различные варианты теоремы Келлога–Крейна (см. [2], [6], модификации – [7], [15], [16]) о спектре интегрального оператора

$$(Ky)(x) = \int_a^b K(x, s)q(s)y(s) ds \quad (2)$$

с ядром, удовлетворяющим специальным детерминантным неравенствам. Для ядра $K(x, s)$, являющегося функцией Грина соответствующей (1) краевой задачи

$$Ly = f(x), \quad l_i(y) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

эти неравенства сводятся (с несущественными оговорками – см. [7], [15]) к свойству *знакорегулярности* оператора (2). Это свойство, переформулированное в терминах краевой задачи (3) (мы сохраним за ним тот же термин “знакорегулярность”), состоит в том, что для любой правой части $f(x)$, меняющей знак конечное число раз, соответствующее решение $y(x)$ будет “менее колеблющимся”, чем $f(x)$. Если обозначить число перемен знака функции $f(x)$ через $S(f)$ (точное определение $S(f)$ будет дано чуть позже), а число перемен знака функции $y(x)$ через $S(y)$, то свойство знакорегулярности записывается в виде неравенства

$$S(y) \leq S(f). \quad (4)$$

Обоснование знакорегулярности задачи (3) дает, по существу, ключ к получению свойств 1)–3) задачи (1).

Играя ключевую роль в осцилляционной теории, свойство знакорегулярности представляет и самостоятельный интерес, так как “скрывает” в себе достаточно нетривиальные и тонкие, но совершенно отчетливые свойства. Так, в случае, когда $f(x)$ сохраняет знак (например, $f(x) \geq 0$) неравенство (4) дает теорему о дифференциальном неравенстве – оно означает, что $y(x)$ также сохраняет знак (который к тому же оказывается – см. [7], [15] – не зависящим от выбора $f(x) \geq 0$). Если $f_1(x)$ монотонна (что эквивалентно неравенству $S(f_1(x) + C) \leq 1$ для всех $C \in \mathbb{R}$), то из (4) следует, что для решений $y_1(x)$ и $y_0(x)$ задачи (3) с правой частью $f_1(x)$ и $f_0(x) \equiv 1$ соответственно имеет место неравенство $S(y_1 + Cy_0) \leq 1$ при любом $C \in \mathbb{R}$, а это эквивалентно монотонности отношения y_1/y_0 . Рассмотрение комбинаций из трех функций – константы, линейной и некоторой выпуклой – показывает, что решения задачи (3) наследуют, в некотором смысле, и выпуклость правой части, и так далее.

Настоящая работа посвящена условиям знакорегулярности для *разрывных краевых задач*. Это класс задач, возникающих, например, при моделировании различных систем из последовательно сочлененных упругих элементов (струн, стержней, пружин и т.п.). Под разрывной краевой задачей понимается задача отыскания такой функции $y(x)$, непрерывной и гладкой на $[a, b]$ за исключением конечного набора точек $a < \xi_1 < \dots < \xi_r < b$ (в которых функция может иметь разрывы и скачки производных), что она удовлетворяет при всех $x \neq \xi_i$ некоторому дифференциальному уравнению, в концах отрезка – некоторым краевым условиям, а в точках ξ_i – некоторым условиям согласования, связывающим между собой значения функции и односторонних производных справа и слева от точки разрыва.

2. Идеи и методы. В основе обоснования знакорегулярных свойств краевых задач лежат три ключевых принципа (см. [4], [7]–[10], [13], [17], [18]). Первый – это использование дифференциального оператора, приведенного к факторизованной форме Фробениуса–Пойа [19],

$$Ly = h_n(x) \frac{d}{dx} h_{n-1}(x) \frac{d}{dx} \dots h_1(x) \frac{d}{dx} [h_0(x)y], \quad (5)$$

где $h_i(x)$ – достаточно (для того, чтобы дифференцирование в (5) было классическим) гладкие строго положительные на $[a, b]$ функции¹. Использование этой формы отвечает существу дела: для знакорегулярности двухточечной задачи на отрезке $[a, b]$ необходимо, чтобы оператор был представим в виде (5) как минимум на полуинтервале $[a, b)$ (см. [4]). Поэтому обычно предполагается, что оператор уже задан в виде (5) (формулы преобразования к виду (5), выражающие $h_i(x)$ через вронскианы фундаментальной системы решений, можно найти в [19]).

Форма (5) позволяет применять при исследовании знаковых свойств техники теоремы Ролля (из того, что $u'(x)$ меняет знак k раз следует, что $u(x)$ меняет знак не более $k + 1$ раз – не более одного раза на каждом из $(k + 1)$ промежутков знакопостоянства производной), дающей “элементарное” неравенство $S(u) \leq S(u') + 1$. Последовательное использование в этом неравенстве в качестве $u(x)$ каждой из квазипроизводных

$$D_0 y = h_0(x)y, \quad D_{i+1} y = h_{i+1}(x) \frac{d}{dx} D_i y \quad (6)$$

позволяет приходить, для операторов L вида (5), к неравенствам типа

$$S(y) \leq S(Ly) + n. \quad (7)$$

Второй принцип – использование, для уточнения неравенства (7), идей, лежащих в основе правила Декарта [22, отдел V]. Правило Декарта, в котором число нулей полинома $P_n(x)$ оценивается по разности числа перемен знака в наборе чисел $P_n(a), P'_n(a), \dots, P_n^{(n)}(a)$ и числа перемен знака в наборе чисел $P_n(b), P'_n(b), \dots, P_n^{(n)}(b)$, существенно улучшает “грубую” оценку числа нулей полинома $P_n(x)$ числом n (которая, по существу, идентична (7) – для $y(x) = P_n(x)$ при $Ly \equiv y^{(n)}$). Для полиномов, имеющих только вещественные нули, оценка из правила Декарта точна, так что она является достаточно тонким инструментом, и использование аналогичных соображений позволяет за счет знания числа перемен знака в наборах граничных значений $D_i y(a)$ и $D_i y(b)$ уменьшить правую часть в (7).

Оценку же числа перемен знака в наборах граничных значений $D_i y(a)$ и $D_i y(b)$ удастся сделать, пользуясь одним эффективно проверяемым свойством матриц коэффициентов краевых условий (и условий согласования – в случае разрывной задачи). Здесь ключевую роль играет одна теорема из [6], которую мы процитируем чуть ниже.

Отметим, что основные сложности в обосновании знакорегулярности по указанной схеме порождаются тем фактом, что квазипроизводные решения могут, вообще говоря, обращаться в нуль на концах отрезка, и это создает некоторый “зазор” в трактовке

¹ Оператор допускает такое представление тогда и только тогда, когда фундаментальная система решений уравнения $Ly = 0$ является *системой Чебышева*. Связь между возможностью факторизации и свойствами фундаментальной системы решений является предметом теории, в отечественной литературе называемой *теорией неосцилляции* [20], а в иностранной – *disconjugacy theory* [21].

понятия числа перемен знака в наборах граничных значений $D_i y(a)$ и $D_i y(b)$; для уточнения оценок требуется перебор многочисленных вариантов и подвариантов, так что в конце концов рассуждения “тонут” в этом лабиринте. Основным техническим достижением настоящей работы является удачный выбор обобщения правила Декарта, которое, с одной стороны, точно “вписывается” в упомянутую выше теорему из [6], а с другой – не требует при использовании его в анализе краевой задачи никаких дополнительных оговорок.

Эффективность этого обобщения позволила не только сделать совершенно прозрачными и ясными уже известные условия знакорегулярности для двухточечных задач – условия Калафати [23] (см. также [7]), но и обосновать их аналог для существенно более сложной разрывной краевой задачи.

3. Определения и формулировки. Пусть $\Omega = (a, b) \setminus \{\xi_i\}_{i=1}^r$, где $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_r < b$. Для единообразия будем считать $a = \xi_0$, $b = \xi_{r+1}$. Через $C[\Omega]$ обозначим пространство кусочно-непрерывных функций, допускающих разрывы только первого рода и только в точках ξ_i ; для функции $u(x) \in C[\Omega]$ под $u(\xi_i \pm 0)$ будем понимать соответствующие пределы. Через $C^n[\Omega]$ обозначим пространство функций из $C[\Omega]$, имеющих n производных, также принадлежащих $C[\Omega]$. Можно формально считать, что $C^n[\Omega] = \prod_{i=0}^r C^n[\xi_i, \xi_{i+1}]$.

Пусть L – дифференциальный оператор порядка n вида (5), $D_j y$ – квазипроизводные (6). Предполагая уравнение

$$Ly = f(x) \quad (8)$$

заданным на Ω (т.е. на $[a, b]$ без точек ξ_i), снабдим его в точках a и b краевыми условиями, приведенными к виду

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{kj} (-1)^{j-1} D_{j-1} y(a) = 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (9_a)$$

$$\sum_{j=1}^n \beta_{kj} D_{j-1} y(b) = 0, \quad k = 1, \dots, q \quad (9_b)$$

($p + q = n$), а в каждой точке разрыва ξ_i – условиями согласования, приведенными к виду

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{kj}^{i,-} D_{j-1} y(\xi_i - 0) - \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}^{i,+} (-1)^{j-1} D_{j-1} y(\xi_i + 0) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (10)$$

($i = 1, \dots, r$ – номер точки, в которой задается условие; k – номер условия в серии условий, заданных в этой точке – в каждой серии предполагается заданными точно n условий; j – индекс суммирования и одновременно номер производной, на которую умножается соответствующий коэффициент).

Задачу (8)–(10) мы и будем в дальнейшем называть *разрывной краевой задачей*.

Для описания свойства знакорегулярности введем понятие *числа перемен знака функции*. Это понятие, интуитивно ясное, например, для полиномов, в более тонких ситуациях (когда функция имеет неизолированные нули) требует уточнения в рафинированных терминах.

Интервал $(a_1, a_2) \subset [a, b]$ называется *промежутком знакопостоянства* функции, если на этом интервале функция сохраняет знак и не тождественна нулю.

Говорят, что функция $u(x) \in C[\Omega]$ имеет k перемен знака и пишут $S(u) = k$, если $[a, b]$ может быть разбит на $k + 1$ промежуток знакопостоянства функции так, что на соседних промежутках $u(x)$ имеет разный знак.

Если $u(x)$ имеет конечное число изолированных нулей, то точками единственно возможного разбиения являются те нули, в окрестности которых функция меняет знак (что как раз соответствует интуитивному представлению). Если же функция имеет сплошные нули, то разбиение можно выбирать разными способами, но число перемен знака от этого выбора не зависит. Для $u(x)$, знакопостоянной на всем $[a, b]$, полагается $S(u) = 0$; для $u(x) \equiv 0$ обычно считается $S(u) = -1$ (оно позволяет распространить “элементарное” неравенство $S(u) \leq S(u') + 1$ и на случай $u' \equiv 0$, т.е. $u \equiv \text{const}$). Для тех же $u(x)$, для которых не существует разбиения $[a, b]$ на конечное число промежутков знакопостоянства, считается $S(u) = +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Задачу (8)–(10) будем называть *знакорегулярной*, если она однозначно разрешима и если для любой $f(x)$ и соответствующего решения $y(x)$ выполнено $S(y) \leq S(f)$.

Конечно, содержательным это свойство является только по отношению к тем $f(x)$, для которых $S(f)$ конечно.

Для формулировки основного результата нам понадобится следующее свойство матриц, образованных коэффициентами краевых условий (оно играет ключевую роль для знакорегулярности краевой задачи).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица A размера $k \times n$ ($k \leq n$) называется *знакосогласованной*, если она имеет ранг k и все ненулевые миноры ранга k имеют один и тот же знак.

Основное значение свойства знакосогласованности состоит в том, что оно позволяет оценить число перемен знака у решения $y = (y_1, \dots, y_m)$ линейной системы $Ay = 0$. Для того, чтобы сформулировать эту оценку (которая и является предметом упоминавшейся нами теоремы из [6]), нам понадобится уточнить понятие “число перемен знака” для последовательности чисел.

Пусть $y_0, y_1, \dots, y_m$ – набор ненулевых чисел. Через $S(y_0, y_1, \dots, y_m)$ обозначается число перемен знака в наборе $y_0, y_1, \dots, y_m$. Формально $S(\cdot)$ определяется формулами

$$S(y_0, y_1, \dots, y_m) = S(y_0, y_1) + S(y_1, y_2) + \dots + S(y_{m-1}, y_m) \quad (11)$$

и

$$S(y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } yz < 0, \\ 0, & \text{если } yz > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Мы будем пользоваться, помимо (11), (12), следующими очевидными свойствами $S(\cdot)$:

$$S(y_0, y_1, \dots, y_m) = S(-y_0, -y_1, \dots, -y_m) = S(y_m, y_{m-1}, \dots, y_0), \quad (13)$$

$$S(y_0, y_1) + S(y_0, -y_1) = 1. \quad (14)$$

Пусть теперь $(y_0, y_1, \dots, y_m)$ – набор чисел, среди которых есть и нулевые. Для такого набора появляется возможность варьировать характеристику “число перемен знака”, поскольку нулям можно приписывать как положительный, так и отрицательный

знак: так, например, возможны варианты $S(1, -2, +0, -0, 1) = 4$ или $S(1, -2, -0, -0, 1) = 2$. Максимальное из получаемых таким образом чисел мы обозначим, следуя [6], через S^+ , а минимальное – через S^- . Они реализуются: S^+ – когда нулю приписывается знак, противоположный знаку соседнего (например, левого) элемента в наборе, а S^- – когда знак нуля, наоборот, считается таким же, как знак соседнего элемента. В нашем примере как раз $S^+(1, -2, 0, 0, 1) = 4$, $S^-(1, -2, 0, 0, 1) = 2$.

ТЕОРЕМА 1 [6, гл. 5, § 2, теорема 7]. *Для того, чтобы для любого ненулевого решения $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ системы $Ay = 0$ с $(k \times t)$ -матрицей A ($k \leq t$) было выполнено $S^+(y_1, y_2, \dots, y_m) \geq k$, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была знакосогласована.*

Теперь мы можем сформулировать основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A и B – матрицы коэффициентов краевых условий (9)*

$$A = \|\alpha_{kj}\|_{k=1, \dots, p}^{j=1, \dots, n}, \quad B = \|\beta_{kj}\|_{k=1, \dots, q}^{j=1, \dots, n},$$

$A_i^\pm$ – матрицы, образованные коэффициентами условий согласования (10),

$$A_i^+ = \|\alpha_{kj}^{i,+}\|_{k=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}, \quad A_i^- = \|\alpha_{kj}^{i,-}\|_{k=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n},$$

а A_i – $(n \times 2n)$ -матрицы, образованные столбцами A_i^- , идущими в обратном порядке, а затем столбцами A_i^+ , идущими в прямом порядке.

Задача (8)–(10) является знакорегулярной, если она однозначно разрешима и каждая из матриц A , B , A_i является знакосогласованной.

В случае, когда точки разрыва ξ_i отсутствуют, наша теорема идентична теореме Каляфати [23], [7].

4. Обобщенное правило Декарта. Пусть $y \in C[\Omega]$ и имеет конечное число нулей на $[a, b]$. Через $\sigma y(x \pm 0)$ обозначим знак $y(x)$ справа (слева) от точки x (в формулах, где это необходимо, мы будем знак $\pm$ отождествлять с числом ± 1). Если $x \neq \xi_i$ и $y(x) \neq 0$, то, очевидно, $\sigma y(x + 0) = \sigma y(x - 0) = \text{sign } y(x)$. Если же $x \in \{\xi_i\}_{i=1}^r$, то $\sigma y(x + 0)$ и $\sigma y(x - 0)$, вообще говоря, различны и совпадают со знаками значений $y(x + 0)$ и $y(x - 0)$, если последние не равны нулю. Использование $\sigma y(x \pm 0)$ позволяет нам в случаях, когда $y(x \pm 0) = 0$, приписывать этому нулю вполне определенный знак.

ЛЕММА 1 (обобщенная теорема Ролля). *Пусть $u(x) \in C^1[a, b]$ и $u'(x)$ имеет конечное число нулей. Тогда*

$$S(u) \leq S(u') + 1 - S(\sigma u(a + 0), -\sigma u'(a + 0)) - S(\sigma u(b - 0), \sigma u'(b - 0)). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО по существу сводится к эквиваленту теоремы Ролля: на промежутке, где производная сохраняет знак, функция монотонна и меняет знак не более одного раза. Поэтому в условиях леммы число перемен знака $u(x)$ не превосходит числа промежутков знакопостоянства производной (т.е. $S(u') + 1$). Если при этом справа от точки a знаки $u(x)$ и $u'(x)$ совпадают (что соответствует $S(\sigma u(a + 0), -\sigma u'(a + 0)) = 1$), то на первом промежутке знакопостоянства производной сама функция $u(x)$ знака не меняет. Аналогично последнее слагаемое в (15) учитывает возможность отсутствия перемены знака у функции $u(x)$ на последнем промежутке знакопостоянства производной при совпадении $\sigma u(b - 0)$ и $(-\sigma u'(b - 0))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы 1 сохраняет силу при замене обычной производной на квазипроизводную $Du \equiv h(x)u'$, где $h(x)$ – непрерывная строго положительная функция.

ЛЕММА 2 (обобщенное правило Декарта). Пусть $y(x) \in C^n[a, b]$ и $y^{(n)}(x)$ имеет конечное число нулей. Тогда

$$S(y) \leq S(y^{(n)}) + n - S(\sigma y(a+0), -\sigma y'(a+0), \dots, (-1)^n \sigma y^{(n)}(a+0)) - S(\sigma y(b-0), \sigma y'(b-0), \dots, \sigma y^{(n)}(b-0)). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к сложению формул (15), записанных для $u(x) = y^j(x)$ для j от нуля до $n-1$, и приведением, используя (11) и (13), сумм

$$S(\sigma y(a+0), -\sigma y'(a+0)) + S(\sigma y'(a+0), -\sigma y''(a+0)) + \dots + S(\sigma y^{(n-1)}(a+0), -\sigma y^{(n)}(a+0))$$

и

$$S(\sigma y(b-0), \sigma y'(b-0)) + S(\sigma y'(b-0), \sigma y''(b-0)) + \dots + S(\sigma y^{(n-1)}(b-0), \sigma y^{(n)}(b-0))$$

к соответствующим слагаемым в (16).

Классическое правило Декарта получается из леммы 2 при $y^{(n)} \equiv 1$: в этом случае $S(y^{(n)}) = 0$, а

$$n - S(\sigma y(a+0), -\sigma y'(a+0), \dots, (-1)^n \sigma y^{(n)}(a+0)) = S(\sigma y(a+0), \sigma y'(a+0), \dots, \sigma y^{(n)}(a+0)).$$

Заменой в рассуждениях обычных производных на квазипроизводные $D_i y$, определяемые (6), получается

ЛЕММА 2'. Пусть L – дифференциальный оператор вида (5), $y(x) \in C^n[a, b]$ и $Ly(x) \equiv D_n y(x)$ имеет конечное число нулей. Тогда

$$S(y) \leq S(Ly) + n - S(\sigma y(a+0), -\sigma D_1 y(a+0), \dots, (-1)^n \sigma D_n y(a+0)) - S(\sigma y(b-0), \sigma D_1 y(b-0), \dots, \sigma D_n y(b-0)). \quad (16')$$

5. Теорема Калафати. Как следует из формулы (16'), знакорегулярность задачи (8)–(10) в случае, когда точки разрыва ξ_i отсутствуют, наверняка обеспечивается неравенством

$$S(\sigma y(a+0), -\sigma D_1 y(a+0), \dots, (-1)^n \sigma D_n y(a+0)) + S(\sigma y(b-0), \sigma D_1 y(b-0), \dots, \sigma D_n y(b-0)) \geq n. \quad (17)$$

Знакогласованность матриц A и B позволяет в силу теоремы 1 немедленно получить неравенства

$$S^+(y(a+0), -D_1 y(a+0), \dots, (-1)^n D_n y(a+0)) \geq S^+(y(a+0), -D_1 y(a+0), \dots, (-1)^{n-1} D_{n-1} y(a+0)) \geq p (= \text{rang } A), \quad (18)$$

$$S^+(y(b-0), D_1 y(b-0), \dots, D_n y(b-0)) \geq S^+(y(b-0), D_1 y(b-0), \dots, D_n y(b-0)) \geq q (= \text{rang } B) \quad (19)$$

(напомним, что $p + q = n$).

Удача же оказывается в том, что для всех $y(x) \in C^n[a, b]$, для которых $D_n y(a)$ и $D_n y(b)$ отличны от нуля,

$$S(\sigma y(a+0), -D_1 \sigma y(a+0), \dots, (-1)^n \sigma D_n y(a+0)) \quad (20)$$

в точности совпадает с

$$S^+(y(a+0), -D_1 y(a+0), \dots, (-1)^n D_n y(a+0)) \quad (20')$$

(и аналогично – в точке b). Действительно, если все $D_j y(a) \neq 0$, то и (20), и (20') – это просто число перемен знака в наборе $(y(a), -D_1 y(a), \dots, (-1)^n D_n y(a))$. Если же среди $D_j y(a)$ есть нулевые, то для любой последовательности нулей в наборе производных

$$D_k y(a) = \dots = D_{l-1} y(a) = 0, \quad D_l y(a) \neq 0$$

знаки $\sigma D_j y(a+0)$ всех квазипроизводных $D_j y$ ($j = k, \dots, l$) будут, очевидно, совпадать со знаком $D_l y(a)$. Поэтому соответствующая часть

$$\dots (-1)^k \sigma D_k y(a+0), \dots, (-1)^l \sigma D_l y(a+0) \dots$$

набора в (20) будет состоять из чередующихся плюс-минус единиц, а это как раз соответствует определению S^+ в (20').

Доказательство теоремы Калафати (теоремы 2 для случая, когда точки разрыва отсутствуют) теперь оказывается совсем простым. Для $f \in C[a, b]$, имеющей конечное число нулей и не обращающейся в нуль в точках a и b , неравенство $S(y) \leq S(f)$ ($= S(D_n y)$) следует из (16'), (17), где (17) обосновывается знаковсогласованностью матриц краевых условий (формулы (18), (19) с учетом совпадения (20) и (20')).

Для всех же остальных $f(x) \in C[a, b]$ знакорегулярность обосновывается методом возмущений: к $f(x)$ добавляется многочлен $\epsilon P(x)$, где $P(x)$ выбирается меняющим знак синхронно с $f(x)$ и не обращающимся в нуль в точках a и b . В этом случае $S(f + \epsilon P) = S(f)$; для соответствующих решений y_ϵ получаем $S(y_\epsilon) \leq S(f + \epsilon P) = S(f)$, и предельный переход дает нам неравенство $S(y) \leq S(f)$ благодаря полунепрерывности снизу функционала $S(y)$ (см. [7]): из $y_\epsilon(x) \rightarrow y(x)$ поточечно на $[a, b]$ следует

$$S(y) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} S(y_\epsilon).$$

6. Правило Декарта с разрывами. Для доказательства теоремы 2 в случае наличия точек разрыва ξ_i нам, естественно, понадобятся аналоги лемм 1 и 2, учитывающие возможность разрывов в точках ξ_i . Чтобы сформулировать эти аналоги, нам понадобится ряд дополнительных понятий.

Введем в рассмотрение *циклическое* и *антициклическое* число перемен знака в наборе $(y_0, y_1, \dots, y_m)$, обозначая их через $S_o(y_0, y_1, \dots, y_m)$ и $S_\mu(y_0, y_1, \dots, y_m)$ соответственно и определяя как

$$S_o(y_0, y_1, \dots, y_m) = S(y_0, y_1) + S(y_1, y_2) + \dots + S(y_{m-1}, y_m) + S(y_m, y_0), \quad (21)$$

$$S_\mu(y_0, y_1, \dots, y_m) = S(y_0, y_1) + S(y_1, y_2) + \dots + S(y_{m-1}, y_m) + S(y_m, -y_0). \quad (22)$$

Названия оправдываются тем, что

$$S_o(y_0, y_1, \dots, y_m) = S_o(y_m, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}),$$

$$S_\mu(y_0, y_1, \dots, y_m) = S_\mu(-y_m, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}).$$

Эти формулы означают, что элементы в наборе можно переставлять “по кругу” с сохранением $S_o(S_\mu)$, изменяя при этом, в случае S_μ , знак у переставляемого элемента.

ЛЕММА 3. Пусть $u(x) \in C^1[\Omega]$ и $u'(x)$ имеет конечное число нулей на Ω . Тогда

$$S(u) \leq S(u') + 2r + 1 - S(\sigma u(a+0), -\sigma u'(a+0)) - S(\sigma u(b-0), \sigma u'(b-0)) - \sum_{i=1}^r S_o(\sigma u'(\xi_i - 0), \sigma u(\xi_i - 0), -\sigma u(\xi_i + 0), \sigma u'(\xi_i + 0)). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сложением формул (15), записанных для каждого $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, с учетом

$$S(v|_{[a,b]}) = \sum_{i=0}^r S(v|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]}) + \sum_{i=1}^r S(\sigma v(\xi_i - 0), \sigma v(\xi_i + 0))$$

(для $v(x) = u(x)$ и $v(x) = u'(x)$), получаем

$$S(u) \leq S(u') + r + 1 - S(\sigma u(a+0), -\sigma u'(a+0)) - S(\sigma u(b-0), \sigma u'(b-0)) - \sum_{i=1}^r S(\sigma u'(\xi_i - 0), \sigma u(\xi_i - 0)) - \sum_{i=1}^r S(-\sigma u'(\xi_i + 0), \sigma u(\xi_i + 0)) - \sum_{i=1}^r S(\sigma u'(\xi_i + 0), \sigma u'(\xi_i - 0)) + \sum_{i=1}^r S(\sigma u(\xi_i - 0), \sigma u(\xi_i + 0)). \quad (24)$$

Оказалось естественным заменить каждую

$$S(\sigma u(\xi_i - 0), \sigma u(\xi_i + 0))$$

на

$$1 - S(\sigma u(\xi_i - 0), -\sigma u(\xi_i + 0))$$

(формула (14)) и, воспользовавшись свойством

$$S(\sigma u(\xi_i + 0), -\sigma u'(\xi_i + 0)) = S(-\sigma u(\xi_i + 0), \sigma u'(\xi_i + 0))$$

(формула (13)), объединить

$$\sum_{i=1}^r S(\sigma u'(\xi_i - 0), \sigma u(\xi_i - 0)) + \sum_{i=1}^r S(\sigma u'(\xi_i + 0), -\sigma u(\xi_i + 0)) + \sum_{i=1}^r S(\sigma u'(\xi_i + 0), \sigma u'(\xi_i - 0)) + \sum_{i=1}^r S(\sigma u(\xi_i - 0), -\sigma u(\xi_i + 0))$$

в

$$S_o(\sigma u'(\xi_i - 0), \sigma u(\xi_i - 0), -\sigma u(\xi_i + 0), \sigma u'(\xi_i + 0)),$$

получив тем самым из (24) формулу (23). Лемма доказана.

Как нетрудно понять, далее нам придется суммировать формулы (23) для всех производных функции $y(x) \in C^n[\Omega]$, поэтому отметим следующее правило суммирования $S_o(\cdot)$:

$$S_o(y_1, y_0, -z_0, z_1) + S_o(y_2, y_1, -z_1, z_2) + \dots + S_o(y_m, y_{m-1}, -z_{m-1}, z_m) = m-1 + \begin{cases} S_o(y_m, y_{m-1}, \dots, y_0, -z_0, z_1, \dots, (-1)^m z_{m-1}, (-1)^{m+1} z_m), & m = 2l+1, \\ S_\mu(y_m, y_{m-1}, \dots, y_0, -z_0, z_1, \dots, (-1)^m z_{m-1}, (-1)^{m+1} z_m), & m = 2l. \end{cases} \quad (25)$$

Формула (25) проверяется непосредственно – разложением каждого слагаемого на “атомы” по формулам (21), (22), заменой каждой пары $S(y_i, z_i) + S(y_i, -z_i)$ на 1 и последующим объединением оставшихся слагаемых в $S_o(S_\mu)$. Нам представляется более наглядным описать рекуррентный процесс с помощью формул

$$\begin{aligned} S_o(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0, -z_0, z_1, \dots, (-1)^k z_{k-1}, (-1)^{k+1} z_k) + S_o(y_{k+1}, y_k, -z_k, z_{k+1}) \\ = 1 + S_\mu(y_{k+1}, y_k, \dots, y_0, -z_0, z_1, \dots, (-1)^{k+1} z_k, (-1)^{k+2} z_{k+1}), \\ S_\mu(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0, -z_0, z_1, \dots, (-1)^k z_{k-1}, (-1)^{k+1} z_k) + S_o(y_{k+1}, y_k, -z_k, z_{k+1}) \\ = 1 + S_o(y_{k+1}, y_k, \dots, y_0, -z_0, z_1, \dots, (-1)^{k+1} z_k, (-1)^{k+2} z_{k+1}). \end{aligned}$$

Доказательство этих формул также основывается на разложении и использовании (14), но сами формулы определяют закон “наращивания” количества элементов y_j, z_j в наборе; при таком “наращивании” антициклическое число перемен знака, оказывается, играет ту же роль, что и циклическое: они переходят друг в друга при “подклеивании” к ним “элементарного” цикла.

ЛЕММА 4. Пусть $y(x) \in C^n[\Omega]$ и $y^{(n)}(x)$ имеет конечное число нулей. Тогда

$$\begin{aligned} S(y) \leq S(y^{(n)}) + n + r(n+1) - S(\sigma y(a+0), -\sigma y'(a+0), \dots, (-1)^n \sigma y^{(n)}(a+0) \\ - S(\sigma y(b-0), \sigma y'(b-0), \dots, \sigma y^{(n)}(b-0)) \\ - \sum_{i=1}^r S_{o\mu}(\sigma y^{(n)}(\xi_i - 0), \dots, \sigma y(\xi_i - 0), -\sigma y(\xi_i + 0), \dots, (-1)^{n+1} \sigma y^{(n)}(\xi_i + 0)) \end{aligned} \quad (26)$$

(в последнем слагаемом через $S_{o\mu}$ обозначено S_o при $n = 2l+1$ и S_μ – при $n = 2l$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается сложением формул (23) для $u(x) = y^{(j)}(x)$ (с $j = 0, \dots, n-1$) и использованием (25) (при этом слагаемое $2r \cdot n$ уменьшается в силу (25) на величину $r(n-1)$ и от него остается $r(n+1)$).

Так же, как и в случае лемм 1, 2, утверждения лемм 3, 4 остаются полностью справедливыми при замене обычных производных функции $y(x)$ на квазипроизводные $D_i y(x)$, определяемые формулами (6). Так получается

ЛЕММА 4'. Пусть L – дифференциальный оператор вида (5) на Ω , $y(x) \in C^n[\Omega]$ и $Ly(x)$ имеет конечное число нулей. Тогда

$$\begin{aligned} S(y) \leq S(Ly) + n + r(n+1) - S(\sigma y(a+0), -\sigma D_1 y(a+0), \dots, (-1)^n \sigma D_n y(a+0)) \\ - S(\sigma y(b-0), \sigma D_1 y(b-0), \dots, \sigma D_n y(b-0)) \\ - \sum_{i=1}^r S_{o\mu}(\sigma D_n y(\xi_i - 0), \dots, \sigma y(\xi_i - 0), -\sigma y(\xi_i + 0), \dots, (-1)^{n+1} \sigma D_n y(\xi_i + 0)). \end{aligned} \quad (26')$$

7. Доказательство теоремы 2 в случае наличия точек разрыва ξ_i . Рассмотрим сначала случай, когда $f(= Ly \equiv D_n y) \in C[\Omega]$ имеет конечное число нулей и не обращается в нуль в точках $\xi_i \pm 0$. Тогда в силу знаковогласованности матриц A и B дословным повторением рассуждений п. 5 получаем в силу теоремы 1

$$S(\sigma y(a+0), -\sigma D_1 y(a+0), \dots, (-1)^n \sigma D_n y(a+0)) + S(\sigma y(b-0), \sigma D_1 y(b-0), \dots, \sigma D_n y(b-0)) \geq p+q=n. \quad (27)$$

Кроме того, из знаковогласованности каждой из матриц A_i следует опять же в силу теоремы 1, что

$$\begin{aligned} & S(\sigma D_n y(\xi_i-0), \dots, \sigma y(\xi_i-0), -\sigma y(\xi_i+0), \dots, (-1)^{n+1} \sigma D_n y(\xi_i+0)) \\ &= S^+(D_n y(\xi_i-0), \dots, y(\xi_i-0), -y(\xi_i+0), \dots, (-1)^{n+1} D_n y(\xi_i+0)) \\ &\geq S^+(D_{n-1} y(\xi_i-0), \dots, y(\xi_i-0), -y(\xi_i+0), \dots, (-1)^n D_{n-1} y(\xi_i+0)) \geq n, \end{aligned} \quad (28)$$

так как фигурирующий в последней строке вектор как раз является решением системы с матрицей A_i . Покажем, что из (28) следует

$$S_{\sigma\mu}(\sigma D_n y(\xi_i-0), \dots, \sigma y(\xi_i-0), -\sigma y(\xi_i+0), \dots, (-1)^{n+1} \sigma D_n y(\xi_i+0)) \geq n+1. \quad (29)$$

Пусть, например, $n = 2l$ (для $n = 2l+1$ доказательство аналогичное). Тогда

$$\begin{aligned} & S_{\mu}(\sigma D_n y(\xi_i-0), \dots, \sigma y(\xi_i-0), -\sigma y(\xi_i+0), \dots, (-1)^{n+1} \sigma D_n y(\xi_i+0)) \\ &= S(\sigma D_n y(\xi_i-0), \dots, \sigma y(\xi_i-0), -\sigma y(\xi_i+0), \dots, (-1)^{n+1} \sigma D_n y(\xi_i+0)) \\ &\quad + S(\sigma D_n y(\xi_i+0), \sigma D_n y(\xi_i-0)) \end{aligned} \quad (30)$$

(в последнем слагаемом $(-1)^{n+1}$ заменена в силу $n = 2p$ на (-1) и общий минус в силу (13) опущен). Первое слагаемое в правой части (30) не меньше n в силу (28). Если неравенство строгое, то уже это слагаемое не меньше $n+1$ и (29) выполнено. Если же первое слагаемое в правой части (30) в точности равно n , то первый и последний элементы в соответствующем наборе (это $\sigma D_n y(\xi_i-0)$ и $(-1)^{n+1} \sigma D_n y(\xi_i+0) = -\sigma D_n y(\xi_i+0)$) имеют одинаковый знак (n четно). Но тогда уже последнее слагаемое оказывается ненулевым:

$$S(\sigma D_n y(\xi_i+0), \sigma D_n y(\xi_i-0)) = 1,$$

и неравенство (29) опять выполнено.

Итак, знаковогласованность A_i , A и B обеспечивают неравенства (27) и (29), учет которых в (28') дает

$$S(y) \leq S(Ly) = S(f).$$

Таким образом, обосновано утверждение теоремы 2 в случае, когда $f(x)$ имеет конечное число нулей и не обращается в нуль в точках $\xi_i \pm 0$.

В случае же произвольной $f(x)$, имеющей конечное число перемен знака, утверждение теоремы 2 обосновывается использованием, как и в п. 5, возмущений $f_{\epsilon}(x) = f(x) + \epsilon P(x)$, где $P(x)$ – кусочно-полиномиальная функция, меняющая знак синхронно с $f(x)$ и не обращающаяся в нуль в точках $\xi_i \pm 0$. Этим замечанием завершается доказательство теоремы 2.

8. Естественные обобщения. Предъявленная техника обоснования знакорегулярности допускает перенос на более сложные ситуации. Так, вполне понятно ее использование в случае, когда число условий согласования в каждой точке не точно совпадает с порядком уравнения, а меняется от точки к точке. Здесь для различных классов задач можно получать аналоги теоремы 2, обосновывая, с использованием знаковогласованности матриц краевых условий, “итоговое” неравенство

$$\begin{aligned} & S(\sigma y(a+0), -\sigma y'(a+0), \dots, (-1)^n \sigma y^{(n)})(a+0) \\ & + S(\sigma y(b-0), \sigma y'(b-0), \dots, \sigma y^{(n)})(b-0) \\ & + \sum_{i=1}^r S_{\sigma\mu}(\sigma y^{(n)}(\xi_i-0), \dots, \sigma y(\xi_i-0), -\sigma y(\xi_i+0), \dots, (-1)^{n+1} \sigma y^{(n)}(\xi_i+0)) \\ & \geq n + r(n+1). \end{aligned}$$

Более нетривиальным является распространение теоремы 2 на задачи с переменным порядком дифференциального оператора (на каждом $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ свой). Здесь для обоснования соответствующего результата придется вместо схемы лемм 3, 4 использовать другую: сначала просуммировать неравенства (15) для разных производных на каждом промежутке в отдельности, а затем уже “склеить” их в точках ξ_i .

Отметим, наконец, что рассуждения в доказательстве теоремы 2 (пп. 5, 7) не изменяются, если расширить класс краевых условий, допуская в условиях (9), (10) суммирование по порядку производных не до $n-1$, а до n . Это соответствует постановке спектральных задач (1), в которых спектральный параметр входит не только в правую часть дифференциального уравнения, но и в краевые условия и в условия согласования в виде слагаемых типа $\lambda \kappa_k^{i,\pm} y(\xi_i \pm 0)$, которые можно интерпретировать как

$$\lambda \kappa_k^{i,\pm} y(\xi_i \pm 0) = \lambda q(\xi_i \pm 0) y(\xi_i \pm 0) \frac{\kappa_k^{i,\pm}}{q(\xi_i \pm 0)} = \frac{\kappa_k^{i,\pm}}{q(\xi_i \pm 0)} (Ly)(\xi_i \pm 0) = \alpha_{kn}^{i,\pm} (D_n y)(\xi_i \pm 0)$$

с $\alpha_{kn}^{i,\pm} = \kappa_k^{i,\pm} / q(\xi_i \pm 0)$. Такие задачи возникают, например, при изучении механических систем, содержащих как точечные, так и распределенные массы.

Автор искренне благодарит Ю. В. Покорного, открывшего ему богатство и красоту осцилляционной теории и А. А. Шкаликова за чрезвычайно полезные и интересные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sturm C. *Memorè sur les èquations differentielles linèaires du second ordre* // J. Math. Pures Appl. 1836. V. 1. P. 373–444.
- [2] Kellogg O. D. *Orthogonal Function Sets Arising from Integral Equations* // Amer. J. Math. 1918. № 40. P. 145–154.
- [3] Kellogg O. D. *Interpolation Properties of Orthogonal Sets of Solutions of Differential Equations* // Amer. J. Math. 1918. № 40. P. 220–234.
- [4] Крейн М. Г. Несимметрические осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1939. Т. 25. № 8. С. 643–646.
- [5] Крейн М. Г. Осцилляционные теоремы для обыкновенных дифференциальных операторов произвольного порядка // Докл. АН СССР. 1939. Т. 25. № 9. С. 717–720.
- [6] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

- [7] Левин А. Ю., Степанов Г. Д. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака // Сиб. матем. ж. 1976. Т. 17. №3. С. 606–625; Т. 17. №4. С. 813–830.
- [8] Покорный Ю. В. О спектре интерполяционной краевой задачи // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 198–199.
- [9] Покорный Ю. В. О неклассической задаче Валле-Пуссена // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. №6. С. 1018–1027.
- [10] Покорный Ю. В., Лазарев К. П. Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. №4. С. 658–670.
- [11] Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле-Пуссена // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. №11. С. 1861–1872.
- [12] Покорный Ю. В., Шурупова И. Ю. Об осцилляционных свойствах спектра краевой задачи с функцией Грина, меняющей знак // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. №11. С. 1521–1526.
- [13] Тептин А. Л. Об осцилляционности ядра, связанного с функцией Грина одной многоточечной задачи // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №2. С. 358–360.
- [14] Боровских А. В., Лазарев К. П., Покорный Ю. В. Об осцилляционных спектральных свойствах разрывных краевых задач // Докл. РАН. 1994. Т. 335. №4. С. 409–412.
- [15] Боровских А. В., Покорный Ю. В. Системы Чебышева–Хаара в теории разрывных ядер Келлога // УМН. 1994. Т. 49. №3. С. 3–42.
- [16] Боровских А. В., Лазарев К. П., Покорный Ю. В. О ядрах Келлога в разрывных задачах // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. Т. 211. М.: Наука, 1995. С. 102–120.
- [17] Дерр В. Я. О знаке функции Грина обобщенной задачи Валле-Пуссена // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь: ПермПИ, 1986. С. 35–41.
- [18] Степанов Г. Д. Эффективные критерии сильной знакорегулярности и осцилляционное свойство функций Грина двухточечных краевых задач // Матем. сб. 1997. Т. 188. №11. С. 121–159.
- [19] Polya G. On the mean-value theorem corresponding to a given homogeneous differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. V. 24. P. 312–324.
- [20] Левин А. Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // УМН. 1969. Т. 24. №2. С. 43–96.
- [21] Hartman P. On disconjugacy criteria // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24. №2. P. 374–381.
- [22] Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. II. М.: Наука, 1978.
- [23] Калафати П. Д. О функциях Грина обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. №6. С. 535–539.