Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Г. В. Рыжаков, О сильной резольвентной сходимости шредингеровской эволюции к квантовой стохастике, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 762–781

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 06:58:38

УДК 517.958

О СИЛЬНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ СХОДИМОСТИ ШРЕДИНГЕРОВСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ К КВАНТОВОЙ СТОХАСТИКЕ

А. М. Чеботарев, Г. В. Рыжаков

В статье доказана сильная сходимость шредингеровской эволюции к квантовой стохастике для класса гамильтонианов, включающего модель квантового детектора гравитационных волн. Доказано, что сильным резольвентным пределом последовательности самосопряженных гамильтонианов является симметричная краевая задача в фоковском пространстве и что для предельной эволюции частичного следа по смешанному состоянию не существует единого уравнения типа уравнения Линдблада. Напротив, каждая компонента смешанного состояния в пределе порождает собственный закон эволюции.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Начиная с экспериментов Резерфорда по рассеянию α -частиц на тонкой золотой фольге, в квантовых измерениях используются макроскопические пучки квантовых частиц, взаимодействующие с микроскопическими квантовыми системами таким образом, что параметры пучка, доступные для измерения с помощью классических приборов до и после рассеяния, содержат информацию о состоянии квантовой системы. Одним из примеров макроскопического квантового пучка, используемого в интерферометрических измерениях микроскопических смещений, является пучок когерентных фотонов, создаваемый лазером. Длина оптического пути фотонов намного больше области взаимодействия с квантовой системой, поэтому такое взаимодействие может быть описано как изменение фазы и амплитуды исходного пучка, происходящее в пределе в одной точке, лежащей на его оптическом пути.

В качестве примера мы рассмотрим модель квантового детектора гравитационных волн. Он состоит из источника когерентного излучения и оптической интерферометрической системы. Осциллятор взаимодействует с падающей гравитационной волной и его смещения создают фазовые сдвиги волн когерентного излучения, наблюдаемые как изменения интенсивности сигнала от фотодетектора. Математическая модель измерительного прибора выглядит следующим образом.

Пусть $\Gamma^S = \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ – симметричное фоковское пространство со скалярным произведением

$$(\phi, \psi) = \bar{\phi}_0 \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx \bar{\phi}_n(x) \psi_n(x), \quad \phi_0, \psi_0 \in \mathbb{C}, \quad \phi_n, \psi_n \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Рис. 1. Фрагмент интерферометра типа LIGO

Пространство Γ^S является гильбертовым пространством состояний пучка фотонов.

Амплитуда вероятности числа фотонов в луче, распространяющемся вдоль оптического пути со скоростью c , описывается нормированным симметричным фоковским вектором $\psi_t \in \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$:

$$\psi_t = \{\psi_0(t), \psi_1(x_1 + ct), \psi_2(x_1 + ct, x_2 + ct), \dots\},$$

а координаты x вдоль оптической оси выбраны таким образом, чтобы зеркало в невозмущенном состоянии находилось в начале координат. С точностью до нормировки функция $P_N(x, t) = |\psi_N(x + ct)|^2$ является плотностью вероятности в N -частичном подпространстве. Так как функции $\psi_N(x)$ симметричны относительно перестановок компонент вектора $x = \{x_1, \dots, x_N\}$, вероятность $P_n(B, t)$ обнаружить ровно n частиц на множестве $B \subseteq \mathbb{R}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} P_n(B, t) &= \sum_{N=n}^{\infty} C_N^n \int_{B^n} \int_{(\mathbb{R} \setminus B)^{N-n}} dx P_N(x, t) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \sum_{N=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} dx P_N(x, t) \prod_{k=1}^N (\lambda I_B(x_k) + I_{\mathbb{R} \setminus B}(x_k)) \Big|_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

Поэтому среднее значение числа частиц на множестве B в момент времени t равно

$$\begin{aligned} N(B, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(B, t) = \frac{d}{d\lambda} e^{\frac{d}{d\lambda}} \sum_{N=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} dx P_N(x, t) \prod_{k=1}^N (\lambda I_B(x_k) + I_{\mathbb{R} \setminus B}(x_k)) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} dx P_N(x, t) \prod_{k=1}^N (1 + \lambda I_B(x_k)) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} dx |\psi_N(x + ct)|^2 \sum_{k=1}^N I_B(x_k) = \left(\psi_t, \int_{\mathbb{R}} I_B(x) a^\dagger(x) a(x) dx \Psi_t \right)_{\Gamma^S}, \end{aligned}$$

где $I_B(x)$ – индикаторная функция множества B . Последнее равенство следует из определения операторов рождения и уничтожения в фоксовском пространстве G^S . Таким образом, оператор

$$\hat{N}(B) = \int_{\mathbb{R}} I_B(x) a^\dagger(x) a(x) dx, \quad \hat{N}(B) \psi_N(x) = \sum_{k=1}^N I_B(x_k) \psi_N(x), \quad x = (x_1, \dots, x_N),$$

интерпретируется как оператор числа частиц на множестве B .

Пространством состояний квантового осциллятора является гильбертово пространство ℓ_2 , а гамильтониан свободного осциллятора равен $\hbar\Omega b^\dagger b$, где Ω – собственная частота осциллятора, а $b^\dagger, b$ – соответственно операторы рождения и уничтожения, действующие в ℓ_2 . Свободная эволюция пучка фотонов и осциллятора описывается уравнением Шрёдингера

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t = \{-i\hbar c \nabla + \hbar\Omega b^\dagger b\} \Psi_t,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, и $(\nabla \psi)_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \psi_n(x_1, \dots, x_n)$. Чтобы описать взаимодействие излучения с осциллятором, рассмотрим силу, создаваемую в точке x потоком падающих в единицу времени $N(x)$ фотонов на зеркало, перемещающееся вдоль оптической оси. Она равна импульсу $p = N(x) \hbar \omega / c$, передаваемому фотонами зеркалу за единицу времени, где ω – частота лазерного излучения, x – координата осциллятора. Таким образом, классическая и квантованная потенциальная энергия зеркала равны соответственно

$$E(x) = \frac{\hbar \omega}{c} \int_0^x dy N(y), \quad \hat{E} = \frac{\hbar \omega}{c} \int_0^{g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}}} dy a^\dagger(y) a(y),$$

где $\hat{x} = g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}}$ – каноническое квантование координаты x осциллятора, g – постоянная. Если на осциллятор действует внешняя сила $f(t)$, то полный оператор энергии запишется в следующем виде:

$$\hat{H} = \hbar\Omega b^\dagger b - ic\hbar \nabla + \frac{\hbar \omega}{c} \int_0^{g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}}} a^\dagger(x) a(x) dx + g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} f(t). \quad (1.1)$$

Оператор $\hat{x} = g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}}$ является самосопряженным, поэтому гамильтониан (1.1) может быть корректно выражен через интеграл по спектральному семейству оператора $\hat{x}$.

Решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (1.1) неизвестно, а приближенное, которое может быть построено аналитически, является нетривиальным. Такое приближение оправдано, если плотность числа фотонов мало меняется на интервалах, сравнимых с амплитудой колебаний осциллятора. В этом случае с целью регуляризации сингулярных возмущений рассмотрим последовательность функций $\{g_\alpha(x)\}_{\alpha \in (0,1]}$ такую, что при $\alpha \rightarrow 0$ существует слабый предел $g_\alpha(x) \rightarrow \delta(x)$ и

$$g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x) a^\dagger(x) a(x) dx \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} a^\dagger(0) a(0) \approx \int_0^g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} a^\dagger(x) a(x) dx.$$

Формально гамильтониан (1.1) может быть аппроксимирован сингулярно возмущенным оператором

$$\hat{H}_s = \hbar \Omega b^\dagger b - i c \hbar \nabla + g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} \left(\hbar \omega a^\dagger(0) a(0) + f(t) \right), \quad (1.2)$$

главная часть которого $g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} a^\dagger(0) a(0)$ равна нулю на плотном подмножестве, состоящем из линейной оболочки элементов $\Psi(v) \otimes h$, где

$$\Psi(v) = \left\{ 1, \frac{v(x_1)}{\sqrt{1!}}, \frac{v(x_1)v(x_2)}{\sqrt{2!}}, \dots \right\} \in \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$$

— экспоненциальный вектор, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R})$, $v(0) = 0$, $h \in (I + b^\dagger b)^{-1} l_2$. Поэтому гамильтониан (1.2) является *сингулярно возмущенным* оператором [1]. Как будет показано ниже, сильный резольвентный предел последовательности самосопряженных операторов

$$\hat{H} = \hbar \Omega b^\dagger b - i c \hbar \nabla + \hbar \omega g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x) a^\dagger(x) a(x) dx + g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} f(t)$$

отличается от (1.2); он равен замыканию оператора

$$C = \hbar \Omega b^\dagger b - i c \hbar \nabla + g \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}} f, \quad (1.3)$$

заданного на области определения, состоящей из функций, принадлежащих $\mathcal{D}_W = \Gamma^S(W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \otimes (I + b^\dagger b)^{-1} l_2$ и удовлетворяющих краевому условию

$$A_- \Psi = W A_+ \Psi, \quad W = e^{i g \omega \frac{b^\dagger + b}{\sqrt{2}}}, \quad (1.4)$$

где $A_\pm \Psi(v) \stackrel{\text{def}}{=} v(\pm 0) \Psi(v)$, $\forall v \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Множество $\mathcal{D}_W$ содержит линейную оболочку векторов $\psi(\hat{v}_\varepsilon) \otimes h$, $h \in (I + b^\dagger b)^{-1} l_2$,

$$\hat{v}_\varepsilon(x) = v(x) \left(1 - \xi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) + c \xi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (I_{(-\infty, 0)}(x) W + I_{(0, \infty)}(x)),$$

где $v \in L_2(\mathbb{R})$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\xi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $c \in \mathbb{C}$. Поскольку $\hat{v}_\varepsilon(-0) = W\hat{v}_\varepsilon(+0)$, очевидно, что эти функции принадлежат $\mathscr{D}_W$ и удовлетворяют краевому условию (1.4) и $\psi(\hat{v}_\varepsilon) \rightarrow \psi(v)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку множество экспоненциальных векторов тотально в Γ^S , а $(I + b^\dagger b)^{-1} l_2$ плотно в l_2 , то множество $\mathscr{D}_W$ плотно в $\mathfrak{H} = \Gamma^S \otimes l_2$.

В разделе 2 показано, что существует унитарная группа $U_t = e^{it\hat{C}}$, порождаемая самосопряженным оператором $\hat{C} = C^{**}$, унитарно эквивалентна разрешающему оператору квантового стохастического дифференциального уравнения

$$du_t = u_t \left((W - I)\Lambda(dt) + \left(i\Omega b^\dagger b + ig \frac{b^\dagger + b}{\hbar\sqrt{2}} f(t) \right) dt \right), \quad u_t = e^{-ct\nabla} U_t, \quad (1.5)$$

с процессом числа частиц

$$\Lambda(T) = \int_T dt a^\dagger(ct) a(ct) = \int_T dt e^{ct\nabla} a^\dagger(x) a(x) e^{-ct\nabla} \Big|_{x=0}.$$

Среднее значение этого оператора совпадает со средним числом фотонов, взаимодействующих с зеркалом за время T . Уравнения (1.3), (1.4) дают правильную формулу квантования сдвига фазы, вытекающую из известной формулы светового давления. В общем случае оператор W можно рассматривать как оператор рассеяния макроскопического тока на квантовой системе.

2. Сильная резольвентная сходимость в фоковском пространстве: гамильтонианы с коммутирующими операторными коэффициентами. Пусть $\mathscr{H}$ – гильбертово пространство, $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ – симметричное фоковское пространство и $\mathfrak{H} = \mathscr{H} \otimes \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$ – их тензорное произведение. Для $g \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ через

$$A^\dagger(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int dx g(x) a^\dagger(x) \quad \text{и} \quad A(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int dx g(x) a(x)$$

обозначим стандартные операторы рождения и уничтожения, действующие в $\Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$, $\Lambda(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int dx g(x) a^\dagger(x) a(x)$. Рассмотрим уравнение Шрёдингера $\partial\psi_t/\partial t = i\mathbf{H}\psi_t$ с гамильтонианом

$$\mathbf{H} = H_0 \otimes I - i \otimes \nabla + H_{\text{int}}, \quad H_{\text{int}} = K \otimes \Lambda(g) + R \otimes A^\dagger(g) + R^* \otimes A(g), \quad (2.1)$$

имеющим некоторую плотную область определения $\mathscr{D}_{\mathbf{H}} \subset \mathfrak{H}$. Для простоты в этом разделе предполагается, что операторы H_0 , K , R принадлежат множеству замкнутых операторов $\mathscr{C}(\mathscr{H})$ и попарно коммутируют, т.е. имеют общее спектральное семейство E_λ и общую плотную область определения $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$. Более точно, пусть

$$H_0 = \int \nu_\lambda dE_\lambda, \quad K = \int \lambda dE_\lambda, \quad R = \int \rho_\lambda e^{i\Phi_\lambda} dE_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где ν_λ , ρ_λ и Φ_λ – измеримые вещественные функции, соответствующие операторам H_0 , K и R такие, что операторы H_0 и K являются самосопряженными, а R – нормальным.

Обозначим через $\hat{P}_t^\lambda = e^{i\hat{\delta}t}$ однопараметрическую группу унитарных операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с генератором $\hat{\delta} = -i\partial_x + \lambda g(x)$, т.е.

$$\hat{P}_t^\lambda f(x) = f(x+t)e^{i\lambda \int_0^t ds g(x+t-s)}.$$

Унитарная группа $U_t = \exp\{i\mathbf{H}t\}$ может быть построена явно путем преобразования гамильтониана (2.1) к канонической форме или переходом к представлению взаимодействия, порождаемому оператором $-I \otimes i\nabla + K \otimes \Lambda(g)$. Следующее утверждение описывает действие U_t на когерентные векторы $\psi(v) \in \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}))$, $v \in L_2(\mathbb{R})$, при этом $U_t\psi(v)$ является оператором, действующим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$: $(U_t\psi(v))h = U_t(\psi(v) \otimes h)$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Унитарная однопараметрическая группа $U_t = \exp\{it\mathbf{H}\}$ действует по правилу*

$$U_t\psi(v) = \int dE_\lambda \psi(v_t^\lambda) \exp\left\{i\nu_\lambda t + i\rho_\lambda e^{-i\Phi_\lambda} \int_0^t (g, v_s^\lambda) ds\right\}, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} v_t^\lambda(x) &= \hat{P}_t^\lambda v(x) + i\rho_\lambda e^{i\Phi_\lambda} \int_0^t \hat{P}_{t-s}^\lambda g(x) ds \\ &= e^{i\lambda \int_0^t ds g(x+t-s)} v(x+t) + i\rho_\lambda e^{i\Phi_\lambda} \int_0^t g(x+t-s) e^{i\lambda \int_0^s d\tau g(x+s-\tau)} ds. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямые вычисления нетрудно установить групповое свойство, слабую непрерывность и унитарность семейства U_t . Благодаря групповому свойству сильная непрерывность следует из слабой, а генератор группы достаточно вычислить при $t = 0$ в слабом смысле, используя правило дифференцирования экспоненциальных векторов:

$$\left(\psi(w), \frac{d}{dt} \psi(v_t)\right)_{\Gamma^S} = (\psi(w), A^\dagger(v_t') \psi(v_t))_{\Gamma^S} = (\psi(w), \psi(v_t))_{\Gamma^S} \frac{d}{dt} (w, v_t)_{L_2}.$$

По определению семейства $v_t^\lambda(x)$ имеем

$$\begin{aligned} (w, v_t^\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} dx \overline{w(x)} \left(e^{i\lambda \int_0^t ds g(x+t-s)} v(x+t) \right. \\ &\quad \left. + i\rho_\lambda e^{i\Phi_\lambda} \int_0^t d\tau e^{i\lambda \int_0^{t-\tau} ds g(x+t-\tau-s)} g(x+t-\tau) \right). \end{aligned}$$

Простые вычисления показывают, что генератор равен $i\mathbf{H}$: члены $iH_0 + iR^* \otimes A(g)$ получаются при дифференцировании экспоненты в (2.2), а члены $\nabla + iK \otimes \Lambda(g) + R \otimes A^\dagger(g)$ возникают при дифференцировании $\psi(v_t)$ согласно приведенной выше формуле. В унитарно-эквивалентном представлении такие вычисления подробно проделаны в [2], [3].

Пусть $g \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ – положительная функция с единичной L_1 -нормой, и пусть $g_\alpha(x) = \alpha^{-1}g(\alpha^{-1}x)$; нетрудно видеть, что $g_\alpha(x) \rightarrow \delta(x)$ слабо при $\alpha \rightarrow 0$ на множестве непрерывных ограниченных функций $C(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\widehat{P}_t^{(\alpha, \lambda)}$ – однопараметрическая унитарная группа в $L_2(\mathbb{R})$ с генератором $-i\nabla + \lambda g_\alpha(x)$, и пусть I_T – проектор, который действует в $L_2(\mathbb{R})$ как оператор умножения на индикаторную функцию $I_T(x)$ борелевского множества T . Тогда при $\alpha \rightarrow 0$ существуют следующие пределы:

$$1) \lim \int_0^t ds (g_\alpha, \widehat{P}_s^{(\alpha, \lambda)} g_\alpha) = \begin{cases} \frac{e^{i\lambda} - 1 - i\lambda}{(i\lambda)^2}, & t > 0; \\ \frac{1 - i\lambda - e^{-i\lambda}}{(i\lambda)^2}, & t < 0 \end{cases};$$

$$2) w\text{-}\lim \int_0^t ds \widehat{P}_s^{(\alpha, \lambda)} g_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{e^{i\lambda} - 1}{i\lambda} I_{(-t, 0)}(x), & t > 0; \\ -\frac{e^{-i\lambda} - 1}{i\lambda} I_{(t, 0)}(x), & t < 0 \end{cases};$$

$$3) \lim \int_0^t ds (g_\alpha, \widehat{P}_s^{(\alpha, \lambda)} v) = \begin{cases} \frac{e^{i\lambda} - 1}{i\lambda} \int_0^t dx v(x), & t > 0; \\ \frac{1 - e^{-i\lambda}}{i\lambda} \int_t^0 dx v(x), & t < 0 \end{cases};$$

$$4) u\text{-}\lim \widehat{P}_t^{(\alpha, \lambda)} v(x) = \begin{cases} e^{i\lambda I_{(-t, 0)}(x)} v(x+t), & t > 0; \\ e^{-i\lambda I_{(0, -t)}(x)} v(x+t), & t < 0 \end{cases}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левые части формул 1)–4) записаны в обозначениях, соответствующих случаю $t > 0$. В случае $t < 0$ пределы интегрирования и аргументы индикаторных функций изменяются в соответствии с принятыми правилами: нижний предел интегрирования меньше верхнего, левый конец интервала меньше правого.

Для краткости мы рассмотрим случай $t > 0$, поскольку в случае $t < 0$ все формулы выводятся аналогично. Докажем первое утверждение леммы. Из определения g_α следует

$$\begin{aligned} \int_0^t ds (g_\alpha, \widehat{P}_s^{(\alpha, \lambda)} g_\alpha) &= \frac{1}{\alpha^2} \int_{\mathbb{R}} dx g\left(\frac{x}{\alpha}\right) \int_0^t ds g\left(\frac{x+s}{\alpha}\right) e^{\frac{i\lambda}{\alpha} \int_0^s d\tau g\left(\frac{x+\tau}{\alpha}\right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^{t/\alpha} ds g(x) g(x+s) e^{i\lambda \int_0^s d\tau g(x+\tau)}. \end{aligned}$$

Так как $g \in L_1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, последний интеграл ограничен абсолютно интегрируемой функцией на $\mathbb{R}^2$:

$$\left| g(x) g(x+s) I_{(0, t/\alpha)}(s) e^{i\lambda \int_0^s d\tau g(x+\tau)} \right| \leq g(x) g(x+s)$$

при любом α . Таким образом, можно применить теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла: последний интеграл сходится к явно вычисляемому повторному интегралу

$$\int_{\mathbb{R}} dx g(x) \int_0^\infty ds g(x+s) e^{i\lambda \int_0^s d\tau g(x+\tau)} = (e^{i\lambda} - 1 - i\lambda)(i\lambda)^{-2},$$

поскольку по предположению $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \|g\|_{L_1} = 1$.

Доказательство второго утверждения следует из формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_0^t ds g\left(\frac{x+s}{\alpha}\right) e^{\frac{i\lambda}{\alpha} \int_0^s d\tau g\left(\frac{x+\tau}{\alpha}\right)} &= \frac{1}{i\lambda} \int_0^t d e^{\frac{i\lambda}{\alpha} \int_0^s d\tau g\left(\frac{x+\tau}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{i\lambda} \left(e^{\frac{i\lambda}{\alpha} \int_0^t d\tau g\left(\frac{x+\tau}{\alpha}\right)} - 1 \right) \rightarrow \frac{1}{i\lambda} (e^{i\lambda I_{(-t,0)}(x)} - 1) = \frac{1}{i\lambda} (e^{i\lambda} - 1) I_{(-t,0)}(x). \end{aligned}$$

Чтобы доказать третье соотношение, запишем скалярное произведение следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^t ds (g_\alpha, \hat{P}_s^{(\alpha,\lambda)} v) &= \int_{\mathbb{R}} dx v(x) \int_0^t ds \frac{1}{\alpha} g\left(\frac{x-s}{\alpha}\right) e^{\frac{i\lambda}{\alpha} \int_0^s d\tau g\left(\frac{x-\tau}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}} dx v(x) \int_0^t d e^{\frac{i\lambda}{\alpha} \int_0^s d\tau g\left(\frac{x-\tau}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}} dx v(x) \left(e^{\frac{i\lambda}{\alpha} \int_0^t d\tau g\left(\frac{x-\tau}{\alpha}\right)} - 1 \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}} dx (e^{i\lambda I_{(0,t)}(x)} - 1) v(x) = \frac{1}{i\lambda} (e^{i\lambda} - 1) \int_0^t dx v(x). \end{aligned}$$

Доказательство последнего соотношения следует из сильной сходимости последовательности унитарных полугрупп $\hat{P}_t^{(\alpha,\lambda)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow +0} e^{i\lambda I_{(-t,0)}(x)} e^{t\nabla}$. Лемма доказана.

Лемма 2.1 позволяет перейти к пределу в формуле (2.2) при $\alpha \rightarrow +0$. Пределы 1)–4) соответствуют переходу к пределу в четырех компонентах решения (2.2), зависящих от α . Подставляя 1)–4) в (2.2), получаем предельное семейство операторов $U_t = \exp\{i\mathbf{H}t\} = s\text{-}\lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp\{i\mathbf{H}_\alpha t\}$ при $t > 0$:

$$U_t \psi(v) = \int dE_\lambda \exp\left\{ (iH_\lambda - h_\lambda)t + \rho_\lambda e^{-i\Phi_\lambda} \frac{1}{\lambda} (e^{i\lambda} - 1) \int_0^t v(x) dx \right\} \psi(v_t^\lambda), \quad (2.3)$$

где $H_\lambda = \nu_\lambda + \rho_\lambda^2 (\sin \lambda - \lambda) / \lambda^2 \leq \nu_\lambda$, $h_\lambda = \rho_\lambda^2 (1 - \cos \lambda) / \lambda^2 \geq 0$, и $v_t^\lambda(x) = e^{i\lambda I_{(-t,0)}(x)} \times v(x+t) + \rho_\lambda e^{i\Phi_\lambda} I_{(-t,0)}(x) (e^{i\lambda} - 1) / \lambda$, $e^{i\lambda I_{(-t,0)}(x)} = (e^{i\lambda} - I) I_{(-t,0)}(x) + I$. Положим $W_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\lambda}$ и $L_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \rho_\lambda e^{i\Phi_\lambda} (e^{i\lambda} - 1) / \lambda$; эти функции являются спектральными плотностями операторов $W = e^{iK}$ и $L = (e^{iK} - I) K^{-1} R$, $-L^* W = R^* (e^{iK} - I) K^{-1}$. В таких обозначениях функция $\rho_\lambda e^{-i\Phi_\lambda} \frac{1}{\lambda} (e^{i\lambda} - 1)$ соответствует оператору $R^* K^{-1} (W - I) = -L^* W$, h_λ соответствует оператору $L^* L / 2$, а H_λ соответствует оператору

$$H = H_0 - R^* \frac{K - \sin K}{K^2} R.$$

Поэтому действие предела унитарных групп $U_t^{(\alpha)}$ может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} U_t \psi(v) &= \psi\left((W I_{(-t,0)}(x) + I_{\mathbb{R} \setminus (-t,0)}(x)) v(x+t) \right. \\ &\quad \left. + L I_{(-t,0)}(x) \right) e^{(iH - L^* L / 2)t - L^* W \int_0^t v(s) ds}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При $t < 0$ получаем предельное семейство операторов, действующих по правилу

$$U_t \psi(v) = \psi \left((W^* I_{(0, -t)}(x) + I_{\mathbb{R} \setminus (0, -t)}(x)) v(x+t) - W^* L I_{(0, -t)}(x) \right) e^{(iH + L^* L/2)t + L^* \int_t^0 v(s) ds}. \quad (2.5)$$

Прямыми вычислениями на тотальном множестве когерентных векторов проверяется, что $U_{-t} U_t = I$ для любых $t \in \mathbb{R}$ и $(U_t \psi(w) \otimes g, U_t \psi(v) \otimes h)_{\mathfrak{H}} = (\psi(w), \psi(v))_{\Gamma S}(g, h)_{\mathcal{H}}$ для всех $v, w \in L_2(\mathbb{R})$, $g, h \in \mathcal{H}$, поэтому семейство операторов U_t является унитарным. Групповые свойства семейства операторов U_t следуют из явного представления (2.4), (2.5).

Для каждого фиксированного t лемма 2.1 обеспечивает слабую сходимость $U_t^{(\alpha)} \rightarrow U_t$ при $\alpha \rightarrow +0$. Так как нормы групп $U_t^{(\alpha)}$ и U_t равны единице, из слабой сходимости следует сильная [4]. Таким образом, семейство гамильтонианов

$$\mathbf{H}_\alpha = H_0 \otimes I - I \otimes i\nabla + K \otimes \Lambda(g_\alpha) + R \otimes A^\dagger(g_\alpha) + R^* \otimes A(g_\alpha), \quad (2.6)$$

сходится в смысле сильной резольвентной сходимости к некоторому самосопряженному оператору $\mathbf{H}$, являющемуся генератором унитарной группы U_t [4], однако операторная реализация этого генератора не очевидна.

Найдем предельный генератор $\mathbf{H}$. Для этого введем два сингулярных оператора уничтожения, которые действуют на экспоненциальных векторах следующим образом:

$$A_\pm \psi(v) \stackrel{\text{def}}{=} v(\pm 0) \psi(v), \quad v \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Формулы (2.4), (2.5) показывают, что аргумент $\hat{v}_t$ экспоненциального вектора ψ действует как операторозначная функция от $x \in \mathbb{R}$ в $\mathcal{H}$, причем при любом $t \in \mathbb{R}$ эта функция испытывает скачок в точках $x = -t$ и $x = 0$, даже если $v(x)$ — гладкая функция. При $t > 0$ из (2.4) имеем

$$A_+ U_t \psi(v) = v(t) U_t \psi(v), \quad A_- U_t \psi(v) = (W v(t) + L) U_t \psi(v), \quad W = e^{iK}.$$

При $t < 0$ аналогичное соотношение получаем из (2.5):

$$A_+ U_t \psi(v) = W^* (v(t) - L) U_t \psi(v), \quad A_- U_t \psi(v) = v(t) U_t \psi(v).$$

Таким образом, для всех $t \in \mathbb{R}$ векторы из области значений унитарной группы U_t удовлетворяют *граничному условию*

$$(A_- - W A_+ - L) \psi = 0. \quad (2.7)$$

В случае ограниченных операторозначных коэффициентов плотным в $\mathfrak{H}$ подмножеством, удовлетворяющим краевому условию (2.7), является линейная оболочка векторов вида $\psi(\hat{v}_\varepsilon) \otimes h$, где

$$\hat{v}_\varepsilon(x) = v(x) \left(1 - \xi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) + \xi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (I_{(-\infty, 0)}(x) (Wc + L) + c I_{(0, \infty)}(x)), \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

$v \in W_2^1(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{H}$, $c \in \mathbb{C}$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\xi(x) = 1$ при $|x| < 1$. Это условие описывает операторозначные скачки фазы и амплитуды поля при отражении фотонов от зеркала в точке $x = 0$, где происходит сингулярное взаимодействие между электромагнитным полем и квантовой системой. Дифференцируя явное представление группы и учитывая, что $(\partial/\partial t + \partial/\partial x)I_{(-t,0)}(x) = 0$ при $x \neq 0$, получаем

$$\begin{aligned} -i \frac{d}{dt} U_t \psi(v) &= \left(H + \frac{iL^*L}{2} - i\nabla + iL^*WA_+ \right) U_t \psi(v), & t > 0, \\ -i \frac{d}{dt} U_t \psi(v) &= \left(H - \frac{iL^*L}{2} - i\nabla + iL^*A_- \right) U_t \psi(v), & t < 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

для $\psi \in \Gamma^S(W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})) \otimes \mathcal{D}$. Нетрудно видеть, что с учетом граничного условия (2.7) правые части формул (2.8) совпадают. Таким образом, доказано следующее утверждение, описывающее весьма нетривиальную связь операторных коэффициентов семейства гамильтонианов (2.6) и сильного резольвентного предела этой последовательности.

ТЕОРЕМА 2.2. *Сильным резольвентным пределом семейства операторов*

$$\mathbf{H}_\alpha = H_0 - i\nabla + K\Lambda(g_\alpha) + RA^\dagger(g_\alpha) + R^*A(g_\alpha), \quad g_\alpha(x) \rightarrow \delta(x), \quad (2.9)$$

является оператор $\mathbf{H} = H + iL^*L/2 - i\nabla + iL^*WA_+ = H - iL^*L/2 - i\nabla + iL^*A_-$, где

$$H = H_0 - R^*(K - \sin K)K^{-2}R, \quad W = e^{iK}, \quad L = -i(W - I)K^{-1}R,$$

заданный на подмножестве векторов из $\Gamma^S(W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})) \otimes \mathcal{D}$, удовлетворяющих однородному граничному условию $(A_- - WA_+ - L)\psi = 0$.

Как было показано в [2] в случае ограниченных операторных коэффициентов (не обязательно коммутирующих), граничное условие (2.6) обеспечивает симметричность оператора $\mathbf{H}$. Область определения операторов $\mathbf{H}$ с неограниченными операторными коэффициентами H_0, K, R описана в [5]. Важно также отметить, что сильный резольвентный предел семейства операторов (2.5) зависит от способа слабой аппроксимации сингулярного возмущения $a^\dagger(0)a(0)$. Если вместо использованной выше физически мотивированной аппроксимации $\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x)a^\dagger(x)a(x)dx$ рассмотреть последовательность

$$\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x)a^\dagger(x)dx \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(y)a(y)dy,$$

имеющую тот же слабый предел, то, как показано в [2], в утверждении леммы 2.1 и теоремы 2.2 изменится выражение для унитарного оператора W ; в этом случае он равен $W = (K - 2i)(K + 2i)^{-1}$.

Закончим раздел выводом квантового стохастического дифференциального уравнения и квантового уравнения Лиувилля (quantum master equation или master Markov equation), связанного с унитарной группой U_t . Сначала рассмотрим унитарный коцикл

$u(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-t\nabla} U_{t-s} e^{s\nabla}$, и найдем слабое дифференциальное уравнение для семейства $u_t = u(t, 0)$. Заметим, что $e^{-t\nabla} I_{(-t, 0)}(x) = I_{(0, t)}(x)$ при $t > 0$; таким образом,

$$\begin{aligned} u_t \psi(v) &= \psi(\hat{v}_t) e^{(iH - L^* L/2)t - L^* W \int_0^t v(s) ds}, \\ \hat{v}_t &= ((W - I)I_{(0, t)}(x) + I)v(x) + LI_{(0, t)}(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как для производной экспоненциального вектора $\psi(\hat{v}_t)$ выполнены соотношения

$$\frac{d}{dt}(\psi(w), \psi(\hat{v}_t))_{\Gamma S} = (w, \hat{v}_t')_{L_2} (\psi(w), \psi(\hat{v}_t))_{\Gamma S}, \quad (w, \hat{v}_t')_{L_2} = (W - I)\overline{w}(t)v(t) + L\overline{w}(t),$$

а дифференцирование экспоненты в (2.10) дает множитель $iH - L^* L/2 - L^* W v(t)$, мы получаем уравнение

$$(\psi(w), du_t \psi(v))_{\Gamma S} = (\psi(w), (u_{t+dt} - u_t)\psi(v))_{\Gamma S} = (\psi(w), u_t M(dt)\psi(v))_{\Gamma S},$$

где

$$\begin{aligned} (\psi(w), M(dt)\psi(v))_{\Gamma S} &= ((iH - L^* L/2) + L\overline{w}(t) - L^* W v(t) \\ &\quad + (W - I)\overline{w}(t)v(t))(\psi(w), \psi(v))_{\Gamma S} dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что $(\psi(w), \Lambda(dt)\psi(v))_{\Gamma S} = \overline{w(t)}v(t)(\psi(w), \psi(v))_{\Gamma S} dt$ и

$$\begin{aligned} (\psi(w), A(dt)\psi(v))_{\Gamma S} &= v(t)(\psi(w), \psi(v))_{\Gamma S} dt, \\ (\psi(w), A^\dagger(dt)\psi(v))_{\Gamma S} &= \overline{w(t)}(\psi(w), \psi(v))_{\Gamma S} dt, \end{aligned}$$

стохастический дифференциал $M(dt)$ может быть записан в стандартной форме Хадсона–Партасарати [6]–[8]:

$$M(dt) = \left(iH - \frac{L^* L}{2} \right) dt - L^* W A(dt) + L A^\dagger(dt) + (W - I)\Lambda(dt) \quad (2.11)$$

с коэффициентами H, K, R из теоремы 2.2. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.3. *С точностью до унитарной эквивалентности, порождаемой операторами сдвига $e^{t\nabla}$, семейство унитарных разрешающих операторов (2.2) сходится в сильном смысле к решению квантового стохастического дифференциального уравнения $du_t = u_t M(dt)$, $t > 0$, $u|_{t=0} = I$, со стохастическим дифференциалом (2.11).*

Аналогичные вычисления при $t < 0$ для оператора эволюции (2.2) дают следующее выражение для стохастического дифференциала: $M(dt) = -((W^* - I)\Lambda(dt) - W^* L A^\dagger(dt) + L^* A(dt) - (iH + L^* L/2)dt)$, т.е. $iM(-dt) = (iM(dt))^*$, что означает эквивалентность перехода к сопряженной эволюции изменению направления отсчета времени в уравнении Хадсона–Партасарати, рассматриваемому как уравнение Шрёдингера,

а краевое условие (2.7) устанавливает связь между “прошлым” и “будущим” значением фазы в точке разрыва: $A(dt_-)\Psi_t = (WA(dt_+) + Ldt)\Psi_t$; при этом фотоны, не достигшие зеркала, находятся в абсолютном будущем относительно фотонов, приобретающих сдвиг фазы в результате взаимодействия с зеркалом. Следовательно, наличие или отсутствие процесса измерения интенсивности излучения с помощью фотодетектора не может влиять на эволюцию состояний квантового осциллятора.

Более интересным выводом, который можно сделать, анализируя точное решение (2.4), касается квантового уравнения марковской эволюции (которое также называют квантовым уравнением Лиувилля, уравнением Горини–Сударшана–Коссаковского–Линдблада, квантовым кинетическим уравнением, master Markov equation [9], [10]). Как мы увидим, чистые состояния электромагнитного поля, отвечающие различным экспоненциальным векторам, порождают различные операторы эволюции наблюдаемых квантовой системы из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. В результате оказывается, что хотя не существует общего марковского уравнения в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, порождаемого суперпозицией чистых состояний поля, но эволюция наблюдаемых из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ равна суперпозиции эволюций относительно соответствующих набору чистых состояний.

Действительно, нетрудно видеть, что при $t > 0$

$$P_t(B) \stackrel{\text{def}}{=} (U_t \psi(v), BU_t \psi(v))_{\Gamma S} = B_t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} d^k x \left(\prod_k \hat{v}_t(x_k) \right)^* B_t \left(\prod_k \hat{v}_t(x_k) \right), \quad (2.12)$$

где $\hat{v}_t(x_k) = (Wv(x_k+t)+L)I_{(-t,0)}(x_k)+v(x+t)I_{\mathbb{R} \setminus (-t,0)}(x_k)$ и для эрмитова оператора $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ имеем $B_t = (\exp\{(iH-L^*L/2)t-L^*W \int_0^t v(s) ds\})^* B (\exp\{(iH-L^*L/2)t-L^*W \int_0^t v(s) ds\})$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} dx \hat{v}_t^*(x) B \hat{v}_t(x) &= \frac{d}{dt} \left(W^* B W \int_0^t |v(x)|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re} L^* B W \int_0^t v(x) dx + B \int_{\mathbb{R} \setminus (0,t)} |v(x)|^2 dx + L^* B L t \right) \\ &= (Wv(t) + L)^* B (Wv(t) + L) - |v(t)|^2 B, \\ \frac{d}{dt} B_t &= -G_t^* B_t - B_t G_t, \quad G_t = iH - \frac{L^*L}{2} - L^*Wv(t) - \frac{|v(t)|^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для генератора $\mathcal{L}_t(\cdot)$ вполне положительной эволюции имеет вид, зависящий от аргумента экспоненциального вектора: $\mathcal{L}_t(B) = \Phi_t(B) - G_t^* B - BG_t$, $\Phi_t(B) = (Wv(t) + L)^* B (Wv(t) + L)$, $G_t = iH - L^*L/2 - L^*Wv(t) - |v(t)|^2/2$.

Более общий результат, не предполагающий коммутативность операторов K , L , R , можно получить, используя следующую формулу интегрирования по частям (см. [5]) для фоковских векторов $\Gamma^S(W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$, удовлетворяющих краевому условию (2.7):

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(\psi, B \nabla \varphi)_{\Gamma S} &= (A_- \psi, BA_- \varphi)_{\Gamma S} - (A_+ \psi, BA_+ \varphi)_{\Gamma S} \\ &= ((L + WA_+) \psi, B(L + WA_+) \varphi)_{\Gamma S} - (A_+ \psi, BA_+ \varphi)_{\Gamma S}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

ТЕОРЕМА 2.4. *Предположим, что начальное состояние электромагнитного поля имеет вид смешанного состояния $\rho = \sum_n \rho_n$, $\rho_n = r_n |\psi(v_n)\rangle\langle\psi(v_n)|$, $\text{Tr} \rho = 1$, и пусть U_t – унитарная группа, удовлетворяющая уравнению (2.8) с произвольными ограниченными операторными коэффициентами K , R , L и краевому условию (2.7). Тогда среднее по состоянию поля (частичный след относительно ортогонального базиса в фоксовском пространстве)*

$$\begin{aligned} P_t(B) &= \text{Tr}_{\Gamma S} \{ (\rho \otimes I) U_t^* (I \otimes B) U_t \} \\ &= \sum_n r_n \text{Tr}_{\Gamma S} \{ (\rho_n \otimes I) U_t^* (I \otimes B) U_t \} = \sum_n r_n P_t^{(n)}(B) \end{aligned}$$

является суперпозицией решений квантовых уравнений Лиувилля $\frac{d}{dt} P_t^{(n)}(B) = P_t^{(n)}(\mathcal{L}_t^{(n)}(B))$, генераторы которых в форме Линдблада имеют вид

$$\mathcal{L}_t^{(n)}(B) = \Phi_t^{(n)}(B) - (G_t^{(n)})^* B - B G_t^{(n)}, \quad G_t^{(n)} = iH - \frac{1}{2} \Phi_t^{(n)}(I),$$

где $\Phi_t^{(n)}(B) = (L + W v_n(t))^ B (L + W v_n(t))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу принципа суперпозиции, доказательство достаточно провести для одного слагаемого $\rho_n = |\psi(v_n)\rangle\langle\psi(v_n)|$. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $v_n \in W_2^1(\mathbb{R})$. Тогда из (2.13) и равенства $A_+ U_t \Psi(v_n) = v(t) U_t \Psi(v_n)$ следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_t^{(n)}(B) &= \frac{d}{dt} (U_t \psi(v_n), B U_t \psi(v_n))_{\Gamma S} = 2 \text{Re} (\nabla U_t \psi(v_n), B U_t \psi(v_n))_{\Gamma S} \\ &\quad + \text{Re} ((iH - L^* L/2 + L^* W A_+) U_t \psi(v_n), B U_t \psi(v_n))_{\Gamma S} \\ &= (U_t \psi(v_n), (L + W v_n(t))^* B (L + W v_n(t)) U_t \psi(v_n))_{\Gamma S} \\ &\quad - (U_t \psi(v_n), |v_n(t)|^* B U_t \psi(v_n))_{\Gamma S} v_n(t) \\ &\quad + \text{Re} (U_t \psi(v_n), B (iH - L^* L/2 + L^* W v_n(t)) U_t \psi(v_n))_{\Gamma S} \\ &= (U_t \psi(v_n), \mathcal{L}_t^{(n)}(B) U_t \psi(v_n))_{\Gamma S}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Сильный резольвентный предел: гамильтониан с некоммутирующими коэффициентами. Построим точное решение ψ_t задачи Коши для уравнения Шрёдингера

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \psi_t = \mathbf{H}_t^\alpha \psi_t, \quad \psi_t = U_{t,0}^\alpha \psi,$$

с гамильтонианом

$$\mathbf{H}_t^\alpha = H_0 + H_{\text{int}}, \quad H_0 = \Omega b^\dagger b - i\nabla, \quad H_{\text{int}} = \mu(b^\dagger + b) \left(\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x) a^\dagger(x) a(x) dx + f_t \right). \quad (3.1)$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты H_0 и H_{int} не коммутируют, а гамильтониан $\mathbf{H}_t^\alpha$ является регуляризацией сингулярного гамильтониана (1.2) при $\hbar = 1$, $c = 1$, $\mu =$

$\hbar\omega g/\sqrt{2}$, $f_t = (g/\mu\sqrt{2})f(t)$. В представление взаимодействия, порожаемом оператором H_0 , уравнение Шрёдингера для $\varphi_t = e^{-iH_0 t}\psi_t$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = ie^{-iH_0 t}H_{\text{int}}e^{iH_0 t}\varphi_t = i\mu(b_t^\dagger + b_t)F_t^\alpha\varphi_t, \quad F_t^\alpha = \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x-t)a^\dagger(x)a(x)dx + f_t,$$

где $b_t = be^{i\Omega t}$, $b_t^\dagger = b^\dagger e^{-i\Omega t}$, а операторы F_s^α и F_τ^α коммутируют при различных τ и s . Поэтому разрешающий оператор в представлении взаимодействия может быть получен в виде произведения трех экспонент:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= V_{(0,t)}^\alpha \varphi, \quad V_T^\alpha = e^{-\mu^2 C_T^\alpha} e^{i\mu b^\dagger \bar{\beta}_T^\alpha} e^{i\mu b \beta_T^\alpha}, \\ \beta_T^\alpha &= \int_T ds e^{i\Omega s} F_s^\alpha, \quad \bar{\beta}_T^\alpha = \int_T ds e^{-i\Omega s} F_s^\alpha, \\ C_T^\alpha &= \frac{1}{2} \int_T ds F_s^\alpha \int_T d\tau e^{i|\Omega(s-\tau)|} F_\tau^\alpha, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $T \subseteq \mathbb{R}_+$ – любое борелевское множество. Операторы V^α сохраняют n -частичные подпространства фоковского пространства, что значительно упрощает обоснование слабых предельных переходов.

Оператор $e^{-\mu^2 C_T^\alpha}$ коммутирует с остальными сомножителями в (3.2) и, более того, нетрудно видеть, что

$$\bar{\beta}_T^\alpha \beta_T^\alpha = \bar{C}_T^\alpha + C_T^\alpha, \quad \beta_T^\alpha \bar{\beta}_S^\alpha + C_T^\alpha + C_S^\alpha = C_{S \cup T}^\alpha, \quad (3.3)$$

где T и S – непересекающиеся борелевские множества такие, что $t > s$ для любых $t \in T$, $s \in S$. Отсюда следует, что

$$C_T^\alpha - \frac{\bar{\beta}_T^\alpha \beta_T^\alpha}{2} = \frac{C_T^\alpha - \bar{C}_T^\alpha}{2} = i \operatorname{Im} C_T^\alpha = \frac{i}{2} \int_T \int_T ds d\tau F_s^\alpha F_\tau^\alpha \sin |\Omega(\tau - s)|.$$

Поэтому разрешающие операторы V_T и U_t могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} V_T &= e^{-\mu^2 C_T^\alpha} e^{i\mu b^\dagger \bar{\beta}_T^\alpha} e^{i\mu b \beta_T^\alpha} = \exp\{i\mu(b^\dagger \bar{\beta}_T^\alpha + b \beta_T^\alpha) - i\mu^2 \operatorname{Im} C_T^\alpha\}, \\ U_t &= e^{iH_0 t} e^{-\mu^2 C_{(0,t)}^\alpha} e^{i\mu b^\dagger \bar{\beta}_{(0,t)}^\alpha} e^{i\mu b \beta_{(0,t)}^\alpha} \\ &= e^{iH_0 t} \exp\{i\mu(b^\dagger \bar{\beta}_{(0,t)}^\alpha + b \beta_{(0,t)}^\alpha) - i\mu^2 \operatorname{Im} C_{(0,t)}^\alpha\}. \end{aligned}$$

Правые части обеих формул являются композициями унитарных операторов, поэтому U_t и V_T – семейства унитарных операторов. Покажем, что в случае $f_t = \text{const}$ семейство U_t является группой.

Заметим, что в силу известных коммутационных соотношений [11] справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} e^{-is\Omega b^\dagger b} b e^{is\Omega b^\dagger b} &= b e^{is\Omega}, \quad e^{\bar{\nu} b^\dagger + \nu b} e^{\mu b^\dagger + \bar{\mu} b} = e^{(\nu+\mu)b^\dagger + (\bar{\nu}+\bar{\mu})b} e^{(\nu\bar{\mu} - \mu\bar{\nu})/2}, \\ e^{-s\nabla} a^\dagger(x)a(x)e^{s\nabla} &= a^\dagger(x+s)a(x+s). \end{aligned}$$

Поэтому выполнены равенства

$$\begin{aligned} e^{-iH_0s} b \beta_T^\alpha e^{iH_0s} &= b \beta_{T+s}^\alpha, \quad e^{-iH_0s} C_T^\alpha e^{iH_0s} = C_{T+s}^\alpha, \\ e^{i\bar{\beta}_T^\alpha b^\dagger + i\beta_T^\alpha b} e^{i\bar{\beta}_S^\alpha b^\dagger + i\beta_S^\alpha b} &= e^{i\bar{\beta}_{T \cup S}^\alpha b^\dagger + i\beta_{T \cup S}^\alpha b} e^{(\bar{\beta}_S^\alpha \beta_T^\alpha - \bar{\beta}_T^\alpha \beta_S^\alpha)/2}, \\ \frac{d}{dt} e^{i(\beta_t b + \bar{\beta}_t b^\dagger)} &= \left\{ i(\beta'_t b + \bar{\beta}'_t b^\dagger) + \frac{1}{2}(\bar{\beta}_t \beta'_t - \beta_t \bar{\beta}'_t) \right\} e^{i(\beta_t b + \bar{\beta}_t b^\dagger)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Полагая $T = (s, s+t)$, $S = (0, s)$ и используя первые два равенства (3.4), получаем групповое свойство семейства U_t :

$$\begin{aligned} U_s U_t &= e^{iH_0(t+s)} e^{i\mu(b^\dagger \bar{\beta}_{(s,t+s)}^\alpha + b \beta_{(s,t+s)}^\alpha) - i\mu^2 \text{Im } C_{(s,t+s)}^\alpha} e^{i\mu(b^\dagger \bar{\beta}_{(0,s)}^\alpha + b \beta_{(0,s)}^\alpha) - i\mu^2 \text{Im } C_{(0,s)}^\alpha} \\ &= e^{i(t+s)H_0} e^{i\mu(b^\dagger \bar{\beta}_{(0,t+s)}^\alpha + b \beta_{(0,t+s)}^\alpha)} \\ &\quad \times e^{-i\mu^2 \text{Im}(C_{(0,s)}^\alpha + C_{(s,t+s)}^\alpha) + \mu^2(\beta_{(0,s)}^\alpha \bar{\beta}_{(s,t+s)}^\alpha - \beta_{(s,t+s)}^\alpha \bar{\beta}_{(0,s)}^\alpha)/2} = U_{t+s}. \end{aligned}$$

Обозначим через π_n проектор на n -частичное подпространство симметричного пространства Фока Γ^S и напомним правила действия оператора числа частиц:

$$\begin{aligned} \pi_n \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x-t) a^\dagger(x) a(x) dx \psi(x) &= \sum_{k=1}^n g_\alpha(x_k - t) \psi_n(x_1, \dots, x_n), \\ \pi_n \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(y-t) a^\dagger(y) a(y) dy \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(z-s) a^\dagger(z) a(z) dz \psi(x) \\ &= \sum_{k,j=1}^n g_\alpha(x_k - t) g_\alpha(x_j - s) \psi_n(x), \\ \pi_n e^{\int_{\mathbb{R}} a^\dagger(y) a(y) dy} \int_{\mathbb{R}} R(y, z) a^\dagger(z) a(z) dz \psi(x) &= \psi_n(x_1, \dots, x_n) e^{\sum_{k,j=1}^n R(x_k, x_j)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

С помощью этих соотношений нетрудно убедиться, что если $\alpha \rightarrow 0$ и $g_\alpha \rightarrow \delta(x)$, то существуют пределы в n -частичных подпространствах, которые при $t > 0$ принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \beta_T^\alpha &\xrightarrow{w} \beta_T \stackrel{\text{def}}{=} \int dx I_{(0,t)}(x) e^{i\Omega x} (a^\dagger(x) a(x) + f_x), \\ e^{i\mu b \beta_T^\alpha} \psi_n(x) \otimes \varphi(r) &\xrightarrow{w} e^{i\mu r \left\{ \sum_{k=1}^n e^{i\Omega x_k} I_T(x_k) + \int_T ds e^{i\Omega s} f_s \right\}} \psi_n(x_1, \dots, x_n) \otimes \varphi(r), \\ C_T^\alpha &\xrightarrow{w} C_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy I_T(x) I_T(y) (a^\dagger(x) a(x) + f_x) (a^\dagger(y) a(y) + f_y) \sin |\Omega(x-y)|, \\ e^{-i\mu^2 \text{Im } C_T^\alpha} \psi_n(x) &\xrightarrow{w} e^{-i\mu^2 \text{Im } C_T} \psi_n(x) = \exp \left\{ -\frac{i\mu^2}{2} \left(\int_T ds f_s \int_T d\tau f_\tau \sin |\Omega(\tau-s)| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{k=1}^n I_T(x_k) \int_T ds f_s \sin |\Omega(s-x_k)| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k,j=1}^n I_T(x_k) I_T(x_j) \sin |\Omega(x_j-x_k)| \right) \right\} \psi_n(x), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\varphi(r)$ – экспоненциальный вектор в ℓ_2 ($b\varphi(r) = r\varphi(r) \forall r \in \mathbb{C}$). Переходя к слабому пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в n -частичных подпространствах, мы видим, что существуют слабые пределы семейств унитарных операторов, которые сами являются унитарными операторами:

$$\begin{aligned} V_T &= w\text{-}\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\mu^2 C_T^\alpha} e^{i\mu b^\dagger \bar{\beta}_T^\alpha} e^{i\mu b \beta_T^\alpha} = \exp\{i\mu(b^\dagger \bar{\beta}_T + b\beta_T) - i\mu^2 \operatorname{Im} C_T\}, \\ U_t &= w\text{-}\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{iH_0 t} e^{-\mu^2 C_{(0,t)}^\alpha} e^{i\mu b^\dagger \bar{\beta}_{(0,t)}^\alpha} e^{i\mu b \beta_{(0,t)}^\alpha} \\ &= e^{iH_0 t} \exp\{i\mu(b^\dagger \bar{\beta}_{(0,t)} + b\beta_{(0,t)}) - i\mu^2 \operatorname{Im} C_{(0,t)}\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

и унитарный коцикл

$$u_{(t,s)} \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\Omega b^\dagger b t} V_{(s,t)} e^{-i\Omega b^\dagger b s} = e^{i\Omega b^\dagger b t} e^{i\mu(b^\dagger \bar{\beta}_{(s,t)} + b\beta_{(s,t)}) - i\mu^2 \operatorname{Im} C_{(s,t)}} e^{-i\Omega b^\dagger b s}. \quad (3.8)$$

Сильная сходимость к пределу следует из слабой сходимости операторов в n -частичных подпространствах и очевидной унитарности слабых пределов. Сильная непрерывность унитарной группы по времени следует из слабой непрерывности. Свойство коцикличности семейства $u_{(t,\tau)} u_{(\tau,s)} = u_{(t,s)}$ следует из правила коммутации

$$e^{i(\nu b^\dagger + \bar{\nu} b)} e^{i(\mu b^\dagger + \bar{\mu} b)} = e^{i(\nu + \mu)b^\dagger + i(\bar{\nu} + \bar{\mu})b} e^{-i \operatorname{Im} \bar{\nu} \bar{\mu}} \quad (3.9)$$

и второго соотношения (3.3), которое остается справедливым для предела операторов (3.4).

Выведем эволюционное уравнение и краевое условие для семейства операторов U_t . Согласно (3.7)

$$(U_t \psi(v))_n(x) = \exp\{i\Omega b^\dagger b t\} \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{i\mu \hat{S}_n(x,t) - \frac{i\mu^2}{2} \Phi_n(x,t)} \prod_1^n v(x_k + t),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\hat{S}_n(x,t) = b(\beta_n(x,t) + \phi(t)) + b^\dagger(\bar{\beta}_n(x,t) + \bar{\phi}(t))$,

$$\begin{aligned} \beta_n(x,t) &= \sum_{k=1}^n e^{i\Omega(x_k+t)} I_{(-t,0)}(x_k), \quad \phi(t) = \int_0^t f_s e^{i\Omega s} ds, \\ \Phi_n(x,t) &= \int_0^t \int_0^t ds d\tau f_s f_\tau \sin |\Omega(\tau - s)| \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^n I_{(-t,0)}(x_k + t) \int_0^t ds f_s \sin |\Omega(x_k + t - s)| \\ &\quad + \sum_{k,j=1}^n I_{(-t,0)}(x_k + t) I_{(-t,0)}(x_j + t) \sin |\Omega(x_j - x_k)|. \end{aligned}$$

Обозначим $\nabla_n = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}$. Нетрудно видеть, что выполнены следующие равенства:

$$(\partial_t - \nabla_n)(\beta_n(x, t) + \phi(t)) = \phi'(t) = f_t e^{i\Omega t}, \quad (\partial_t - \nabla_n) \prod_1^n v(x_k + t) = 0, \quad (3.10)$$

$$(\partial_t - \nabla_n)I_{(-t, 0)}(x) = 0, \quad (\partial_t - \nabla_n)\Phi_n(x, t) = 2\phi_n(x, t), \quad x \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \phi_n(x, t) &= \left(\int_0^t f_s \sin \Omega(t-s) ds - 2 \sum_{k=1}^n I_{(-t, 0)}(x_k) \sin \Omega x_k \right) f_t \\ &= \frac{1}{2i} ((\phi'(t)\bar{\beta}_n(x, t) + \bar{\phi}(t)) - \bar{\phi}'(t)(\beta_n(x, t) + \phi(t))). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Применяя последнюю формулу (3.4) для дифференцирования операторной экспоненты $\exp\{i\mu\hat{S}_n(x, t)\}$, получим

$$\begin{aligned} (\partial_t - \nabla_n)e^{i\mu\hat{S}_n(x, t)} &= \left\{ i\mu(b e^{i\Omega t} + b^\dagger e^{-i\Omega t})f_t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu^2}{2} ((\phi'(t)\bar{\beta}_n(x, t) + \bar{\phi}(t)) - \bar{\phi}'(t)(\beta_n(x, t) + \phi(t))) \right\} e^{i\mu\hat{S}_n(x, t)} \\ &= \{i\mu(b e^{i\Omega t} + b^\dagger e^{-i\Omega t})f_t + i\mu^2\phi_n(x, t)\} e^{i\mu\hat{S}_n(x, t)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.10), (3.11) имеем

$$\begin{aligned} (\partial_t - \nabla_n)e^{i\mu\hat{S}_n(x, t) - \frac{i\mu^2}{2}\Phi_n(x, t)} &= \{i\mu(b e^{i\Omega t} + b^\dagger e^{-i\Omega t})f_t\} e^{i\mu\hat{S}_n(x, t) - \frac{i\mu^2}{2}\Phi_n(x, t)}, \\ (\partial_t - \nabla_n)e^{i\Omega b^\dagger b t} \prod_1^n v(x_k + t) &= i\Omega b^\dagger b e^{i\Omega b^\dagger b t} \prod_1^n v(x_k + t). \end{aligned}$$

Учитывая, что $e^{i\Omega b^\dagger b t}(b e^{i\Omega t} + b^\dagger e^{-i\Omega t})e^{-i\Omega b^\dagger b t} = b + b^\dagger$, мы получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \right) U_t \psi(v) = (i\Omega b^\dagger b + i\mu(b + b^\dagger)f_t) U_t \psi(v), \quad (3.12)$$

справедливое вне координатных гиперплоскостей $x = 0$ для любого экспоненциального вектора $\psi(v)$, $v \in W_2^1(\mathbb{R})$.

Получим условие для разрывов решения на координатных гиперплоскостях. Из определения функций $\beta_n(x, t)$ и $\Phi_n(x, t)$ следуют равенства

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}(x, t)|_{x_{n+1}=+0} &= \beta_n(x, t), \quad \beta_{n+1}(x, t)|_{x_{n+1}=-0} = \beta_n(x, t) + e^{i\Omega t}, \\ \Phi_{n+1}(x, t)|_{x_{n+1}=+0} &= \Phi_n(x, t), \\ \Phi_{n+1}(x, t)|_{x_{n+1}=-0} &= \Phi_n(x, t) + 2 \int_0^t f_s \sin \Omega(t-s) ds - 2 \sum_{k=1}^n I_{(-t, 0)}(x_k) \sin \Omega x_k \\ &= \Phi_n(x, t) + i e^{i\Omega t} (\bar{\beta}_n(x, t) + \bar{\phi}(t)) - i e^{-i\Omega t} (\beta_n(x, t) + \phi(t)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Теперь нетрудно видеть, что $(A_+ U_t \psi(v))_n(x) = v(t)(U_t \psi(v))_n(x)$. С другой стороны, выпутывая согласно (3.9) и (3.13) член $e^{i\mu(b e^{i\Omega t} + b^\dagger e^{-i\Omega t})}$ из операторной экспоненты $\exp\{i\mu(b(\beta_n(x, t) + \phi(t) + e^{i\Omega t}) + b^\dagger(\bar{\beta}_n(x, t) + \bar{\phi}(t) + e^{-i\Omega t}))\}$ получаем

$$\begin{aligned} (A_- U_t \psi(v))_n(x) &= \frac{v(t)}{\sqrt{n!}} e^{i\Omega b^\dagger b t} e^{i\mu(b(\beta_n(x, t) + \phi(t) + e^{i\Omega t}) + b^\dagger(\bar{\beta}_n(x, t) + \bar{\phi}(t) + e^{-i\Omega t}))} \\ &\times e^{-\frac{i\mu^2}{2}(\Phi_n(x, t) + 2 \int_0^t f_s \sin \Omega(t-s) ds - 2 \sum_{k=1}^n I_{(-t, 0)}(x_k) \sin \Omega x_k)} \prod_{k=1}^n v(x_k + t) \\ &= v(t) e^{i\Omega b^\dagger b t} e^{i\mu(b e^{i\Omega t} + b^\dagger e^{-i\Omega t})} e^{-i\Omega b^\dagger b t} (U_t \psi(v))_n(x) = e^{i\mu(b + b^\dagger)} (U_t \psi(v))_n(x). \end{aligned}$$

Следовательно, граничное условие имеет вид $A_- \psi = W A_+ \psi$, $W = e^{i\mu(b + b^\dagger)}$; оно описывает скачок фазы пучка когерентных фотонов при взаимодействии с зеркалом, установленном на квантовом осцилляторе. Таким образом, доказана первая часть следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1. *Сильный резольвентный предел семейства уравнений Шрёдингера с гамильтонианами (3.1) является краевой задачей*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_t &= (\nabla + i\Omega b^\dagger b + i\mu(b^\dagger + b) f_t) \psi_t, \quad A_- \psi_t = W A_+ \psi_t, \\ W &= e^{i\mu(b^\dagger + b)}, \quad \psi_t = U_t \psi_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Унитарный коцикл $u_t = e^{-\nabla t} U_t$ в слабом смысле удовлетворяет квантовому стохастическому дифференциальному уравнению

$$du_t = M(dt_+) u_t, \quad M(T) = i \int_T (\Omega b^\dagger b + \mu(b^\dagger + b) f_t) dt + (W - I) \Lambda(T), \quad (3.15)$$

где $\Lambda(T) = \int_T a^\dagger(t) a(t) dt$.

Наиболее простой вывод уравнения (3.15) состоит в использовании уравнения (3.14) и формулы интегрирования по частям (2.13). Напомним, что обозначение $M(dt_+)$ указывает, что стохастический дифференциал понимается в смысле Ито, а не Стратоновича (см. [12]), т.е. для любого экспоненциального вектора $\psi(v)$, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, выполнено равенство, являющееся слабой формой уравнения (3.15):

$$\frac{d}{dt} (\psi(v), \Psi_t) = i(\Omega b^\dagger b + \mu(b^\dagger + b) f_t) (\psi(v), \Psi_t) + (W - I) (A_+(t) \psi(v), A_+(t) \Psi_t), \quad (3.16)$$

где $\Psi_t = u_t \psi_0$, $A_\pm(t) = e^{-t\nabla} A_\pm e^{t\nabla}$, $A_\pm(t) \psi(h) = h(t \pm 0) \psi(h)$ для любой кусочно непрерывной функции $h \in L_2(\mathbb{R})$. С другой стороны, применяя формулу (2.13), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\psi(v), e^{-t\nabla} U_t \psi_0) &= \frac{d}{dt} (e^{t\nabla} \psi(v), U_t \psi_0) = (\nabla e^{t\nabla} \psi(v), U_t \psi_0) + (e^{t\nabla} \psi(v), \nabla U_t \psi_0) \\ &+ i(\Omega b^\dagger b + \mu(b^\dagger + b) f_t) (e^{t\nabla} \psi(v), U_t \psi_0) \\ &= (A_- \psi_t(v), A_- \psi_t) - (A_+ \psi_t(v), A_+ \psi_t) \\ &+ i(\Omega b^\dagger b + \mu(b^\dagger + b) f_t) (\psi_t(v), \psi_t), \end{aligned}$$

где $\psi_t = U_t \psi_0$, $\psi_t(v) = e^{t\nabla} \psi(v)$, $A_{\pm} \psi_t(v) = v(t) \psi_t(v)$, и в силу граничного условия (3.14) $A_- \psi_t = W A_+ \psi_t$. Учитывая очевидные тождества $(\psi_t(v), \psi_t) = (\psi(v), \Psi_t)$, $(A_+ \psi_t(v), A_+ \psi_t) = (A_+(t) \psi(v), A_+(t) \Psi_t)$, видим, что

$$(A_- \psi_t(v), A_- \psi_t) - (A_+ \psi_t(v), A_+ \psi_t) = (W - I) (A_+(t) \psi(v), A_+(t) \Psi_t).$$

Таким образом, уравнение (3.16) совпадает со слабой формой краевой задачи (3.14). Вторая часть теоремы доказана.

Отметим, что из структуры квантового стохастического дифференциального уравнения не очевидны краевые условия (2.7), (3.14). С этим обстоятельством были связаны технические трудности при построении области определения стохастического дифференциала с неограниченными операторными коэффициентами, инвариантной относительно разрешающего оператора, соответствующего КСДУ [13]–[15].

В заключение сформулируем важное следствие теоремы 3.1 о конструкции уравнения для частичного следа по смешанному состоянию излучения лазера.

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что начальное состояние электромагнитного поля имеет вид смешанного состояния $\rho = \sum_n \rho_n$, $\rho_n = r_n |\psi(v_n)\rangle \langle \psi(v_n)|$, $\text{Tr } \rho = 1$, и пусть U_t – семейство унитарных операторов, удовлетворяющих уравнению (3.14). Тогда среднее по состоянию поля*

$$\begin{aligned} P_t(B) &= \text{Tr}_{\Gamma S} \{ (\rho \otimes I) U_t^* (I \otimes B) U_t \} \\ &= \sum_n r_n \text{Tr}_{\Gamma S} \{ (\rho_n \otimes I) U_t^* (I \otimes B) U_t \} = \sum_n r_n P_t^{(n)}(B) \end{aligned}$$

является суперпозицией решений квантовых уравнений Лиувилля

$$\frac{d}{dt} P_t^{(n)}(B) = P_t^{(n)}(\mathcal{L}_t^{(n)}(B)),$$

генераторы которых в форме Линдблада имеют вид

$$\mathcal{L}_t^{(n)}(B) = \Phi_t^{(n)}(B) - (G_t^{(n)})^* B - B G_t^{(n)}, \quad G_t^{(n)} = i\Omega b^\dagger b + i\mu(b^\dagger + b)f_t - \frac{|v_n(t)|^2}{2},$$

где $\Phi_t^{(n)}(B) = |v_n(t)|^2 W^ B W$.*

Доказательство этого утверждения основано на использовании формулы интегрирования по частям (2.13) и полностью аналогично доказательству теоремы 2.4. Оба эти утверждения показывают, что для точно решаемых задач, рассмотренных в настоящей статье, не существует уравнения типа уравнения Линдблада для эволюции частичного следа; напротив, каждая компонента смеси эволюционирует по собственному закону.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V. Square powers of singularly perturbed operators // *Math. Nachr.* 1995. V. 173. P. 5–24.
- [2] Чеботарев А. М. Квантовое стохастическое дифференциальное уравнение унитарно эквивалентно краевой задаче для уравнения Шрёдингера // *Матем. заметки.* 1997. Т. 61. № 4. С. 612–622.
- [3] Chebotarev A. M. *Lectures on Quantum Probability.* V. 14. México: Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, 2000.
- [4] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Наука, 1976.
- [5] Чеботарев А. М. Что такое квантовое стохастическое уравнение с точки зрения функционального анализа // *Матем. заметки.* 2002. Т. 71. № 3. С. 448–469.
- [6] Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions // *Comm. Math. Phys.* 1984. V. 93. № 3. P. 301–323.
- [7] Parthasarathy K. R. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus.* Basel: Birkhauser, 1992.
- [8] Meyer P. A. *Quantum Probability for Probabilists* // *Lecture Notes in Math.* V. 1338. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [9] Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // *Comm. Math. Phys.* 1976. V. 48. № 2. P. 119–130.
- [10] Gorini V., Kossakovsky A., Sudarshan E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of n -level systems // *J. Math. Phys.* 1976. V. 17. № 3. P. 821–825.
- [11] Березин Ф. А. *Метод вторичного квантования.* М.: Наука, 1986.
- [12] Чеботарев А. М. О симметричной форме стохастического уравнения Хадсона–Партасарати // *Матем. заметки.* 1996. Т. 60. № 5. С. 726–750.
- [13] Fagnola F. On quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients // *Prob. Theory and Related Fields.* 1990. V. 86. P. 501–516.
- [14] Fagnola F. Unitarity of solutions to quantum stochastic differential equations and conservativity of the associated semigroup // *Quantum Probability and Related Topics.* V. VII. Singapore: World Scientific, 1992. P. 139–148.
- [15] Fagnola F. Characterization of isometric and unitary weakly differentiable cocycles in Fock space // *Quantum Probability and Related Topics.* V. VIII. Singapore: World Scientific, 1993. P. 143–164.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: alex@chebotar.phys.msu.su

Поступило
13.12.2002
Исправленный вариант
06.07.2003