Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Ильютко, Локально минимальные сети в N -нормированных пространствах, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 656–668

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:41:46

УДК 514.77+519.711.72+517.982.22

ЛОКАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫЕ СЕТИ В N -НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д. П. Ильютко

В настоящей статье мы дадим полную классификацию локально минимальных сетей в нормированных пространствах $(\mathbb{R}^2, \rho)$, где единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x) = 1\}$ для нормы ρ совпадает с правильным m -угольником, $m = 2n$, вписанным в евклидову единичную окружность S^1 .

Библиография: 9 названий.

1. Введение и постановка задачи. Настоящая работа посвящена описанию локальной структуры линейных кратчайших сетей в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$, где единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x) = 1\}$ для нормы ρ совпадает с правильным m -угольником, $m = 2n$, вписанным в евклидову единичную окружность S^1 так, что пара его вершин лежит на оси абсцисс.

С точки зрения римановой геометрии локально минимальные сети являются естественным обобщением обычных геодезических. Напомним, что геодезическая, соединяющая пару фиксированных точек риманова многообразия, обладает следующим определяющим свойством: каждый ее фрагмент между достаточно близкими точками A и B является кратчайшей кривой среди всех кривых, соединяющих A и B . Предположим, что фиксировано не две точки риманова многообразия W , а некоторое конечное его подмножество M , состоящее из большого числа точек. Чтобы обобщить на этот случай понятие геодезических, естественно перейти от кривых к рассмотрению связанных одномерных континуумов – *сетей*. Сеть, затачивающая множество $M \subset W$, называется *абсолютно минимальной*, если она имеет наименьшую возможную длину, и *локально минимальной*, если каждый достаточно малый ее фрагмент имеет наименьшую возможную длину, т.е. является абсолютно минимальной сетью. В этом смысле естественно говорить о локально минимальных сетях как о “разветвленных геодезических”.

Понятие локально минимальной сети впервые неявным образом появилось при изучении следующей классической задачи, известной в литературе как проблема Штейнера в случае евклидовой длины: *среди всех сетей (связных одномерных континуумов), затачивающих данное конечное множество M точек плоскости, найти сеть наименьшей длины.*

При подготовке данной работы автор пользовался частичной поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 01-01-00583 и 01-15-99268, и Euler Program.

Эта задача была названа “проблемой Штейнера” в замечательной книге Ричарда Куранта и Герберта Е. Роббинса “*Что такое математика?*” в честь Якоба Штейнера (Jacob Steiner, 1796–1863), швейцарского математика, профессора Берлинского университета. Именно после появления этой очень популярной книги интерес к абсолютно минимальным сетям разгорелся с новой силой, и терминология, предложенная Курантом и Роббинсом, стала общепринятой.

Исторический обзор, посвященный проблеме Штейнера, см. в [1]–[4].

Отметим, что проблемой Штейнера занимались многие известные математики, такие как Винтер, Гилберт, Гильдебрандт, Грехем, Гэри, Джонсон, Ду, Кокейн, Мантуров, Мелзак, Морган, Поллак, Рубинштейн, Смит, Томас, Фоменко, Ханан, Хванг, Цислик и другие. Одна из причин этого неослабевающего интереса специалистов к минимальным сетям состоит в том, что у проблемы Штейнера имеется много различных интерпретаций и приложений. Например, заданное конечное множество M можно интерпретировать как набор конечных (терминальных) пунктов. Если, например, терминальные пункты – города, которые требуется соединить сетью дорог, то в этом случае минимальная сеть – это самая дешевая транспортная система, обеспечивающая коммуникации между данными конечными пунктами. Здесь естественно предполагается, что стоимость коммуникаций пропорциональна их длине.

Первые работы, посвященные изучению кратчайших сетей в смысле нормированной длины, появились в 60-е годы (см. [5]) в связи с бурным развитием электроники и робототехники. Интерес возник в связи с тем, что проводники на печатных платах имеют, как правило, вид ломаных линий, составленных из горизонтальных и вертикальных отрезков. По-видимому, первое систематическое исследование кратчайших сетей в смысле манхетенской длины (так называемых *кратчайших прямоугольных деревьев*) было предпринято в 1966 году Ханном [6], который описал несколько важных общих геометрических свойств таких сетей.

Спустя 10 лет Хванг [7] описал возможную структуру кратчайших прямоугольных деревьев в предположении, что данное множество затягивается хотя бы одним *невыврожденным* кратчайшим деревом Γ_0 . Последнее означает, что степень всех граничных вершин в дереве Γ_0 равна 1. Однако эффективный алгоритм, строящий кратчайшее прямоугольное дерево, найти не удалось. Объяснение этому было дано в 1977 году Гэри и Джонсоном [8], которые показали, что задача поиска кратчайшего прямоугольного дерева является NP -полной, т.е. скорее всего не существует полиномиального алгоритма решения этой задачи. Этот факт делает изучение ограничений на структуру кратчайших сетей еще более актуальной.

В настоящей работе получено полное описание локальной структуры кратчайших сетей в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$, где единичная окружность $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x) = 1\}$ для нормы ρ совпадает с правильным m -угольником, $m = 2n$, вписанным в евклидову единичную окружность S^1 так, что пара его вершин лежит на оси абсцисс.

Введем некоторые понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейной сетью* называется сеть в $\mathbb{R}^2$, все ребра которой – прямолинейные отрезки (возможно вырожденные). Если все ребра не вырожденные, то сеть называется *вложенной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть, затягивающая некоторое множество, называется *кратчай-*

шей, если ее длина не превосходит длины любой сети, стягивающей данное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть называется *локально минимальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является кратчайшим.

Пронумеруем все вершины m -угольника Σ против часовой стрелки, начиная с нуля, где вершина с номером i имеет координаты $(\cos(\pi i/n), \sin(\pi i/n))$, и обозначим эту вершину через P_i . Тем самым для каждой стороны m -угольника Σ заданы начало и конец этой стороны.

Рассмотрим ребро γ сети Γ . В теореме о локальной структуре изучаемых сетей положение ребер будет определяться неоднозначно. Поэтому для удобства формулирования теоремы мы будем характеризовать положения ребер следующими пятью типами. Будем говорить, что *ребро γ сети имеет точечный тип*, если направление этого ребра может приходить только в вершину m -угольника Σ . Будем писать $\text{type}_e(\gamma) = *$, и для данного ребра обозначим через $\chi(\gamma)$ вершину из Σ , соответствующую направлению ребра γ . Будем говорить, что *ребро γ сети имеет неточечный тип*, если направление этого ребра может лежать на стороне m -угольника Σ , причем граничные вершины стороны могут быть включены, а могут и нет. Будем писать $\text{type}_e(\gamma) = \square, ()$, $[]$ и $[\]$ в зависимости от того включена граничная вершина стороны (соответствует “[” или “]”) или нет (соответствует “(” или “)”), и для этих ребер определим $\chi(\gamma)$ как сторону m -угольника Σ , содержащую направление этого ребра.

Для любых подмножеств A и B из m -угольника Σ обозначим через $\alpha(A, B)$ точную нижнюю грань углов между радиус-векторами точек $x \in A$ и $y \in B$. Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные ребра сети Γ . Будем говорить, что *пара (γ_1, γ_2) имеет погрешность k* , и будем писать $\text{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = k$, если $\alpha(\chi(\gamma_1), \chi(\gamma_2)) = 2\pi/3 - k\pi/3n$.

Введем понятие *типа вершины x* , и обозначим его через $\text{type}_v(x)$. Пусть вершина x сети Γ имеет степень l , и $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ — выходящие из этой вершины ребра, направления которых являются последовательными при обходе начала координат в положительном направлении от оси абсцисс. Положим $\text{type}_v(x) = (\text{type}_e(\gamma_1), \dots, \text{type}_e(\gamma_l); \text{fall}(\gamma_1, \gamma_2), \text{fall}(\gamma_2, \gamma_3), \dots, \text{fall}(\gamma_{l-1}, \gamma_l))$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Вложенная линейная сеть Γ с некоторой границей в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$ является локально минимальной, если и только если вершины сети Γ имеют степень, которая не превосходит 6, и следующие типы (с точностью до поворота):

- 1) если степень вершины x сети Γ равна 1, то эта вершина граничная и $\text{type}_v(x) = \{\square\}$;
- 2) если степень вершины x сети Γ равна 2, то
 - (а) для внутренней вершины $\text{type}_v(x) = \{\square, []; 3 - n\}$;
 - (б) для граничной вершины при $2n \equiv k \pmod{3}$, $k = 1, 2, 3$, имеем $\text{type}_v(x) = \{\square, []; l\}$, причем $3 - n \leq l \leq k$;
- 3) если степень вершины x сети Γ равна 3, то
 - (а) при $2n \equiv 0 \pmod{3}$ имеем $\text{type}_v(x) = \{\square, [], []; 3, 3\}$;
 - (б) при $2n \equiv k \pmod{3}$, $k = 1, 2$ имеем $\text{type}_v(x) = \{*, [], *, k, k\}$;
 - (с) если вершина граничная и $2n \equiv 0 \pmod{3}$, то $\text{type}_v(x) = \{\square, [], *, 0, 3\}$;
 - (д) если вершина граничная и $2n \equiv 2 \pmod{3}$, то $\text{type}_v(x) = \{\square, [], *, 2, 2\}$;
- 4) если степень вершины x сети Γ равна 4, то $m = 4, 6, 8$ или 12, и

- (а) при $m = 4, 8$ или 12 имеем $\text{type}_v(x) = \{*, *, *, *, m/4, m/4, m/4\}$;
- (б) при $m = 6$ имеем $\text{type}_v(x) = \{*, \square, *, \square; 3, 3, 3\}$;
- (с) если вершина граничная и $m = 6$, то $\text{type}_v(x) = \{\square, \square, *, *, 3, 3, 3\}$;
- 5) если степень вершины x сети Γ равна 5 или 6, то эта вершина – граничная, $m = 6$, и
 - (а) если степень вершины равна 5, то $\text{type}_v(x) = \{\square, *, *, *, *, 3, 3, 3, 3\}$;
 - (б) если степень вершины равна 6, то $\text{type}_v(x) = \{*, *, *, *, *, *, *, 3, 3, 3, 3, 3\}$.

Автор благодарен профессору А. О. Иванову и профессору А. А. Тужилину за постоянное внимание к работе.

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые важные определения, которые нам понадобятся в дальнейших рассуждениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическим графом G называется топологическое пространство, полученное из конечной совокупности отрезков $\{I_\alpha\}$ некоторой склейкой по их концам. Пусть $\pi: \sqcup_\alpha I_\alpha \rightarrow G$ – каноническая проекция. Образы внутренностей отрезков I_α при отображении π называются ребрами графа G , а π -образы концевых точек отрезков I_α – вершинами. Граф G *связен*, если он *связен* как топологическое пространство.

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество B множества его вершин. Такой граф G будем называть *графом с границей* $\partial G = B$. Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины – *внутренними* или *подвижными*. Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Пусть G – произвольный граф с границей ∂G (возможно, пустой), и $P \in G$ – некоторая его точка. *Допустимой окрестностью* $U \subset G$ точки P графа G называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа G , отличных от P , если P – вершина. Наделим окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами – внутренности отрезков в U , соединяющих эти точки. Полученную звезду обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке P* . Определим *каноническую границу* ∂G_U *локального графа G_U* , включив в нее все вершины из ∂U , а также вершину P , если P – граничная вершина графа G . Другими словами, $\partial G_U = (\partial G \cap U) \cup (G \cap \partial U)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – произвольный связный топологический граф, и ∂G – его граница. *Параметрической сетью топологии G* на топологическом пространстве X называется непрерывное отображение Γ из G в X . Топологический граф в этом случае называется *параметризующим графом параметрической сети Γ* или ее *топологией*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ограничение отображения Γ на вершины, ребра, границу, связный подграф параметризующего графа, локальный граф называются соответственно *вершинами*, *ребрами*, *границей*, *подсетью*, *локальной сетью* параметрической сети Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – гладкое многообразие. Параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow X$ называется *гладкой (регулярной, кусочно-гладкой, кусочно-регулярной)*, если ограничение отображения Γ на замыкание каждого ребра графа G является таковым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кусочно-регулярные параметрические сети без кратных ребер и петель называются *погруженными*. Погруженную параметрическую сеть Γ назовем *вложенной*, если отображение Γ взаимно однозначно с образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ребро γ сети Γ называется *точечным*, если оно – отображение в точку. Ребро γ сети Γ называется *квазирегулярным*, если оно или регулярно, или точно. Сеть Γ *квазирегулярна*, если все ее ребра квазирегулярны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейной сетью* называется сеть в $\mathbb{R}^n$, все ребра которой – прямые отрезки (возможно вырожденные).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точечная компонента* сети Γ – это связная компонента множества точечных ребер сети. *Приведенная компонента* сети Γ – это или ее точечная компонента, или вершина, которая не принадлежит точечным компонентам.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow X$ – произвольная параметрическая сеть, и $I = [a, b]$ – некоторый отрезок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывное отображение $\Psi: G \times I \rightarrow X$ такое, что для всех $g \in G$ имеет место равенство $\Psi(g, a) = \Gamma(g)$, называется *деформацией параметрической сети* Γ . Если исходная параметрическая сеть Γ является гладкой (регулярной, кусочно-гладкой, кусочно-регулярной), то мы будем предполагать, что каждая параметрическая сеть $\Psi(\cdot, t) = \Gamma_t$ является таковой, и что для каждого замыкания $\bar{e}$ ребра e графа G ограничение отображения Ψ на $\bar{e} \times I$ является гладким (для регулярных сетей) или кусочно-гладким (для кусочно-гладких или кусочно-регулярных сетей).

Пусть H – произвольный подграф в топологическом графе G . Обозначим через G/H топологическое пространство, полученное из G отождествлением точек, попавших в связные компоненты графа H . Пространство G/H наделяется естественной структурой топологического графа. Граф G/H называется *фактор-графом* графа G по подграфу H . Будем говорить, что граф G_2 может быть *спроектирован на граф* G_1 , и будем писать $\pi: G_2 \rightarrow G_1$, если существует $H \subset G_2$ такое, что $G_1 = G_2/H$. Аналогично определяется проекция G_1 на G_2 .

Пусть $\Gamma_1: G_1 \rightarrow X$ и $\Gamma_2: G_2 \rightarrow X$ – произвольные квазирегулярные параметрические сети.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что параметрическая сеть Γ_2 может быть *спроектирована на* Γ_1 , если существует проекция $\pi: G_2 \rightarrow G_1$ такая, что $\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \pi$.

Пусть Γ и Γ' – произвольные параметрические сети, причем Γ' может быть спроектирована на Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произвольную деформацию сети Γ' назовем *деформацией с расщеплением* сети Γ . При этом сеть Γ' будем называть *типом такого расщепления*.

3. Локально минимальные сети. Пусть X – конечномерное линейное пространство с некоторой нормой $\|\cdot\|$ и $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ – некоторая непрерывная кривая. Кривая γ называется *измеримой*, если существует предел $l(\gamma)$ длин ломаных, вписанных в эту кривую. Число $l(\gamma)$ называется в этом случае *длиной кривой* γ . Если кривая γ кусочно-гладкая, то она измерима и

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Пусть Γ – произвольная кусочно-гладкая сеть на X . Тогда *длиной* $l(\Gamma)$ *сети* Γ назовем сумму длин ее ребер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть Γ называется *критической* или *экстремальной*, если для любой неподвижной на границе деформации Γ'_t , $t \in [0, 1]$, где $\Gamma'_{t=0} = \Gamma'$ – произвольный тип расщепления сети Γ , выполнено соотношение

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} l(\Gamma'_t) \geq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть Γ называется *слабо критической* или *слабо экстремальной*, если для любой неподвижной на границе деформации (без расщепления) Γ_t , $t \in [0, 1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$, выполнено соотношение

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} l(\Gamma_t) \geq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть Γ называется *локально экстремальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является экстремальным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть Γ называется *слабо локально экстремальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является слабо экстремальным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть, затягивающая некоторое множество, называется *кратчайшей*, если ее длина не превосходит длины любой сети, затягивающей данное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сеть называется *локально минимальной*, если любой достаточно малый фрагмент сети является кратчайшим.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Вложенная сеть локально минимальна тогда и только тогда, когда она является локально экстремальной.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Субградиентом* выпуклой вниз функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется такой ковектор $\xi \in T_x^* \mathbb{R}^n$, что

$$\xi(y - x) \leq F(y) - F(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Далее, если $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая поверхность и $x \in X$ – произвольная ее точка, то проходящая через x гиперплоскость Π называется *опорной плоскостью* поверхности X в точке x , если X лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных Π . Нормаль к опорной гиперплоскости, направленную в то из ограниченных этой гиперплоскостью полупространств, внутренность которого не пересекается с X , назовем *внешней нормалью* к поверхности X в точке x . Множество $N_x X$ всех внешних нормалей к поверхности X в точке x называется *нормальным конусом*.

При стандартном отождествлении пространств $T_x^* \mathbb{R}^n$ и $T_x \mathbb{R}^n$, *субградиентное множество* $S_F(x)$ *выпуклой функции* F *в точке* x , т.е. множество всех субградиентов функции F в точке x , является непустым выпуклым ограниченным подмножеством нормального конуса в точке x к поверхности уровня этой функции, проходящей через x . При этом, функция F дифференцируема в x , если и только если множество $S_F(x)$ состоит из одной точки, совпадающей в этом случае с градиентом функции F . Если $F = \rho$ – некоторая норма, то легко доказывается следующий результат, см. [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Субградиентное множество $S_\rho(x)$ в точке $x \neq 0$ совпадает с множеством всех внешних нормалей единичной конормы к поверхности уровня нормы ρ , проходящей через x .*

Пусть $x \in \mathbb{R}^2$ – произвольная точка, и $\eta \in T_x \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^2$ – любой вектор. Через $p(\eta)$ будем обозначать субградиент функции ρ в точке x , причем, если η и $x \neq 0$ коллинеарны, то $p(\eta)$ – любой такой ковектор, а если η и $x \neq 0$ линейно независимы, то $p(\eta)$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: вектор $p(\eta)$ ортогонален, в смысле евклидова скалярного произведения, радиальной проекции луча $x + t\eta$, $t \geq 0$, на окружность $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(z) = 1\}$.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольная квазирегулярная параметрическая сеть. Для каждой приведенной компоненты $H \subset \Gamma$ обозначим через E_H и V_H множество ребер и вершин сети H . Через ∂H обозначим множество вершин из H , являющихся граничными в сети Γ . Через $\bar{\partial} H$ обозначим множество вершин из H , инцидентных регулярным ребрам сети Γ . Далее, для каждой вершины $x \in \bar{\partial} H$ обозначим через $N_H(x)$ множество регулярных ребер сети Γ , инцидентных x . Если γ – произвольное ребро сети, то обозначим через $\partial\gamma$ пару его концевых вершин. Положим $\rho(\{A, B\}) = \rho(B - A)$.

Для произвольного регулярного ребра $\gamma = [x, y]$ и произвольных векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^2$ положим $p_x(\gamma, \eta_1, \eta_2)$ равным ρ -импульсу $p_{xy}(\eta_1, \eta_2)$, который определяется равенством $p_{xy}(\eta_1, \eta_2) = p_1(\eta_1 - \eta_2) = -p_2(\eta_2 - \eta_1)$, где $p_i(\eta)$ – субградиент $p(\eta)$, вычисленный в точке $n_i = (-1)^i(y - x)/\|y - x\|$. Здесь n_i – внешняя нормаль в смысле евклидова скалярного произведения к отрезку $[x, y]$ в точке y , если $i = 2$, и в точке x , если $i = 1$.

Справедлива следующая теорема, доказанная Ивановым и Тужилиным, см. [9].

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $(\mathbb{R}^2, \rho)$ – нормированное пространство. Квазирегулярная параметрическая линейная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ с границей β является слабой экстремалью функционала нормированной длины, если и только если для каждого отображения $\eta: V_G \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G) = 0$, следующая сумма по всем приведенным компонентам H сети Γ неотрицательна:*

$$\sum_H \left\{ \sum_{x \in \bar{\partial} H} \left\langle \sum_{\gamma \in N_H(x), \gamma=[x,y]} p_x(\gamma, \eta(x), \eta(y)), \eta(x) \right\rangle + \sum_{\gamma \in E_H} \rho(\eta|_{\partial\gamma}) \right\} \geq 0.$$

Из утверждения 3.1 следует, что для описания локальной структуры кратчайшей сети достаточно описать локальную структуру экстремальной сети. Отметим, что проверка экстремальности сети может быть сведена к проверке (с помощью теоремы 3.1) слабой экстремальности бесконечного числа параметрических сетей – различных типов расщеплений исходной сети. Тем не менее, оказывается, эту проверку достаточно провести лишь для конечного числа типов расщепления.

Построим набор представителей, из слабой экстремальности которых вытекает экстремальность сети. Пусть Γ – параметрическая сеть, H – некоторая ее приведенная компонента, и $\bar{\Gamma} = \Gamma/H$ – сеть, полученная из Γ факторизацией по H . Обозначим через $\pi: \Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$ каноническую проекцию, и пусть $x = \pi(H)$. Прообраз произвольной локальной сети $\bar{\Gamma}_{\text{loc}}(x) \subset \bar{\Gamma}$ для $\bar{\Gamma}$ с центром в x при отображении π назовем *сильно локальной сетью* приведенной компоненты H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тип расщепления Γ' сети Γ назовем *базовым*, если сильно локальная сеть T каждой его вырожденной компоненты H является бинарным деревом. При

этом, если H соответствует внутренней вершине сети Γ' , то все вершины степени 1 дерева T не принадлежат H . Если же H соответствует граничной вершине Γ' , то H содержит ровно одну вершину v дерева T степени 1, причем в этом случае $\partial H = \{v\}$.

Отметим, что у каждой вложенной сети Γ имеется лишь конечное (не нулевое) число базовых типов расщепления.

Справедлива следующая теорема, доказанная Ивановым и Тужилиным, см. [9].

ТЕОРЕМА 3.2. *Вложенная линейная сеть Γ представляет собой экстремаль функционала нормированной длины в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$, если и только если каждый базовый тип расщепления Γ' сети Γ является слабо экстремальной параметрической сетью.*

Имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Пусть Γ – вложенная линейная сеть, все ребра которой – отрезки, соединяющие начало координат O с точками из Σ , причем все вершины сети Γ , лежащие на m -угольнике Σ , являются граничными (вершина O сети Γ может быть как граничной, так и внутренней). Предположим, что степень вершины O больше 1 и сеть Γ – экстремаль функционала нормированной длины в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$. Тогда*

- 1) *если $m = 6$ и вершина O сети Γ внутренняя, то степень вершины O сети Γ меньше или равна 4;*
- 2) *если $m = 6$ и вершина O сети Γ граничная, то степень вершины O сети Γ меньше или равна 6;*
- 3) *если $m = 4, 8, 12$, то степень вершины O сети Γ меньше или равна 4;*
- 4) *в остальных случаях степень вершины O сети Γ меньше или равна 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тип расщепления Γ' сети Γ с единственной вырожденной компонентой H , образ которой при отображении Γ' совпадает с O . При этом, если O – внутренняя вершина, то H – ребро, соединяющее внутренние вершины x и y , а если вершина O граничная, то H – путь xu, uz такой, что x и y – внутренние вершины, а z – граничная вершина степени 1. Более того, сеть Γ' выберем так, чтобы вершина x была инцидентна ровно двум смежным невырожденным ребрам γ_1 и γ_2 .

Напомним, что P_k – вершина m -угольника Σ с номером k . Рассмотрим ребро γ_1 . Имеется две возможности: или γ_1 соединяет O с некоторой вершиной P_{i_1} из m -угольника Σ , или γ_1 соединяет O с какой-нибудь точкой P , лежащей внутри интервала (P_{i_1-1}, P_{i_1}) . Аналогично, для ребра γ_2 имеется две возможности: или $\gamma_2 = OP_{i_2}$ для некоторой вершины P_{i_2} из m -угольника Σ , или $\gamma_2 = OQ$ для какой-нибудь точки Q , лежащей внутри интервала (P_{i_2}, P_{i_2+1}) . Таким образом, имеется четыре случая в зависимости от расположения вершин из γ_1 и γ_2 . Так как повороты сети Γ вокруг начала координат O на угол кратный π/n не меняют экстремальные свойства сети Γ , без ограничения общности будем предполагать, что $n - 1 \geq i_2 > i_1 \geq 0$. Для каждого случая рассмотрим деформацию сети Γ' в классе линейных сетей, при которой вершина x равномерно движется по прямой со скоростью $\eta = (\cos(\pi j/n), \sin(\pi j/n))$, где $j = i_1 + (i_2 - i_1 - 1)/2$, если разность $i_2 - i_1$ нечетна, и $j = i_1 + (i_2 - i_1)/2$, если $i_2 - i_1$ четна. При этом вершина y остается на месте.

Так как линейная сеть Γ представляет собой экстремаль функционала нормированной длины в пространстве $(\mathbb{R}^2, \rho)$, тип расщепления Γ' сети Γ является слабой экстремалью, поэтому из теоремы 3.1 вытекает, что выполняется следующее неравенство:

$$\langle p_x(\gamma_1, \eta, 0) + p_x(\gamma_2, \eta, 0), \eta \rangle + \rho(\eta) \geq 0,$$

где $\rho(\eta) = 1$ и $p_x(\gamma_k, \eta, 0) = p_{xP_{i_k}}(\eta, 0) = p_1(\eta - 0) = p_1(\eta)$ – субградиент $p(\eta)$, вычисленный в точке $w = (x - P_{i_k})/\|P_{i_k} - x\|$, $k = 1, 2$.

Оказывается, во всех имеющихся случаях предыдущее неравенство эквивалентно одному и тому же неравенству

$$i_2 - i_1 \geq \frac{m}{3} - 1. \quad (1)$$

Неравенство (1) влечет, что среди сетей Γ с максимально возможной степенью вершины O существует сеть, у которой все отличные от O граничные вершины являются вершинами из Σ . Поэтому для получения ограничения на возможные степени вершины O сети Γ достаточно рассмотреть случай, когда ребра из Γ соединяют начало координат и вершины m -угольника Σ . Пусть Γ – такая сеть, степень вершины O равна s , и $\gamma_{j+1} = OP_{i_j}$, $j = 0, \dots, s-1$, – последовательные при положительном обходе вершины O ребра из Γ . Обозначим через k_j количество вершин m -угольника Σ между соседними ребрами с номерами j и $j+1$. Найдем наименьшее k_j , при котором выполняется неравенство (1). Имеем

- а) $k_j = 2n/3 - 2$, если $2n \equiv 0 \pmod{3}$;
- б) $k_j = (2n-1)/3 - 1$, если $2n \equiv 1 \pmod{3}$;
- с) $k_j = (2n-2)/3 - 1$, если $2n \equiv 2 \pmod{3}$.

Найдем теперь ограничение на s в каждом из трех случаев.

а) Пусть $2n \equiv 0 \pmod{3}$. Так как количество вершин m -угольника Σ равно $2n$, получаем $s(2n/3 - 2) + s \leq 2n$, откуда $s \leq 3 + 9/(2n-3)$. Функция $9/(2n-3)$ монотонно убывает. Отсюда следует, что степень вершины O при $m = 6$ меньше или равна 6, при $m = 12$ – меньше или равна 4, при остальных m – меньше или равна 3.

б) Пусть $2n \equiv 1 \pmod{3}$; тогда $s((2n-1)/3 - 1) + s \leq 2n$, откуда $s \leq 3 + 3/(2n-1)$. Поэтому степень вершины O при $m = 4$ меньше или равна 4, при остальных m – меньше или равна 3.

с) Пусть $2n \equiv 2 \pmod{3}$; тогда $s((2n-2)/3 - 1) + s \leq 2n$, откуда $s \leq 3 + 6/(2n-2)$. Поэтому степень вершины O при $m = 8$ меньше или равна 4, при остальных m – меньше или равна 3.

Оказывается, что в случае, когда $m = 6$ и вершина O – внутренняя, полученную оценку $s \leq 6$ можно усилить. Пусть Γ – такая сеть. Мы покажем, что s не может быть равна 5 и 6. Поэтому $s \leq 4$, что и завершает доказательство теоремы.

Пусть $s = 6$. Из неравенств (1) следует, что возможен единственный вариант, а именно, когда сеть Γ состоит из 6 ребер $\gamma_{k+1} = OP_k$, $k = 0, \dots, 5$.

Рассмотрим тип расщепления Γ' сети Γ с единственной вырожденной компонентой H , образ которой при отображении Γ' совпадает с O и которая представляет собой путь x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 , причем вершина x_1 инцидентна ребрам γ_5 и γ_6 , вершина x_2 инцидентна ребру γ_4 , вершина x_3 инцидентна ребру γ_3 , а вершина x_4 – ребрам γ_1 и γ_2 . Рассмотрим деформацию сети Γ' в классе линейных сетей, при которой вершины x_i равномерно движутся по прямым, причем x_1 движется со скоростью $\eta_1 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$, вершина x_2 – со скоростью $\eta_2 = (-1, 0)$, вершина x_3 – со скоростью $\eta_3 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, и вершина

x_4 – со скоростью $\eta_4 = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Отметим, что векторы η_i имеют единичную норму. В соответствии с теоремой 3.1, так как выражение

$$\begin{aligned} & \langle p_{x_1}(\gamma_5, \eta_1, 0) + p_{x_1}(\gamma_6, \eta_1, 0), \eta_1 \rangle + \langle p_{x_2}(\gamma_4, \eta_2, 0), \eta_2 \rangle + \langle p_{x_3}(\gamma_3, \eta_3, 0), \eta_3 \rangle \\ & + \langle p_{x_4}(\gamma_1, \eta_4, 0) + p_{x_4}(\gamma_2, \eta_4, 0), \eta_4 \rangle + \rho(\eta_1 - \eta_2) + \rho(\eta_2 - \eta_3) + \rho(\eta_3 - \eta_4) \\ & = 0 - 1 - 1 - 1 + 0 - 1 + 1 + 1 + 1 = -1 \end{aligned}$$

отрицательно, тип расщепления Γ' не является слабо экстремальной сетью, а значит, и сеть Γ не экстремальна.

Пусть $s = 5$. Из неравенств (1) следует, что возможны два, с точностью до поворота, варианта, а именно, когда сеть Γ состоит из 5 ребер $\gamma_{k+1} = OP_k$, $k = 0, \dots, 4$, или когда сеть Γ состоит из 4 ребер $\gamma_{k+1} = OP_k$, $k = 0, \dots, 3$, и ребра γ_5 , соединяющего точку O и точку, лежащую на интервале (P_4, P_5) . Разберем первый случай (второй случай разбирается аналогично).

Рассмотрим тип расщепления Γ' сети Γ с единственной вырожденной компонентой H , образ которой при отображении Γ' совпадает с O и которая представляет собой путь x_1x_2, x_2x_3 , причем вершина x_1 инцидентна ребрам γ_4 и γ_5 , вершина x_2 инцидентна ребру γ_3 , а вершина x_3 – ребрам γ_1 и γ_2 . Рассмотрим деформацию сети Γ' в классе линейных сетей, при которой вершины x_i равномерно движутся по прямым, причем x_1 движется со скоростью $\eta_1 = (-1, 0)$, вершина x_2 – со скоростью $\eta_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, и вершина x_3 – со скоростью $\eta_3 = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Отметим, что векторы η_i имеют единичную норму. В соответствии с теоремой 3.1, так как выражение

$$\begin{aligned} & \langle p_{x_1}(\gamma_5, \eta_1, 0) + p_{x_1}(\gamma_4, \eta_1, 0), \eta_1 \rangle + \rho(\eta_1 - \eta_2) + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta_2, 0), \eta_2 \rangle \\ & + \rho(\eta_2 - \eta_3) + \langle p_{x_3}(\gamma_1, \eta_3, 0) + p_{x_3}(\gamma_2, \eta_3, 0), \eta_3 \rangle = 0 - 1 - 1 + 0 - 1 + 1 + 1 = -1 \end{aligned}$$

отрицательно, тип расщепления Γ' не является слабо экстремальной сетью, а значит и сеть Γ не экстремальна. Доказательство закончено.

Доказательство основной теоремы опирается на следующие шесть лемм, которые из-за недостатка места мы приведем без доказательства.

ЛЕММА 3.1. Если для двух ненулевых векторов η_1 и η_2 выполнены неравенства $\langle \theta, \eta_1 \rangle \geq 0$ и $\langle \theta, \eta_2 \rangle \geq 0$, где θ – фиксированный ковектор, то неравенство $\langle \theta, \eta \rangle \geq 0$ выполнено для любого ненулевого вектора η , лежащего внутри угла, образованного векторами η_1 и η_2 .

ЛЕММА 3.2. Пусть $\eta_1 = a(\cos \varphi, \sin \varphi)$, и точка $\frac{a}{\rho(\eta_1)}(\cos \varphi, \sin \varphi)$ принадлежит полуинтервалу $[P_i, P_{i+1})$. Тогда

$$\rho(\eta_1) = a \frac{\cos(\varphi - \frac{\pi}{n}(i + \frac{1}{2}))}{\cos \frac{\pi}{2n}}.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $\eta_1 = a(\cos \varphi, \sin \varphi)$ и $\eta_2 = b(\cos \psi, \sin \psi)$. Тогда

1) если $0 \leq \psi - \varphi \leq \pi$ или $\varphi - \psi \geq \pi$, то

$$\rho(\eta_2 - \eta_1) = \frac{b \cos(\psi - \frac{\pi}{n}(i + 1/2)) - a \cos(\varphi - \frac{\pi}{n}(i + 1/2))}{\cos(\pi/2n)},$$

где точка $(\eta_2 - \eta_1)/\rho(\eta_2 - \eta_1)$ принадлежит полуинтервалу $[P_i, P_{i+1})$;

2) если $0 \leq \varphi - \psi \leq \pi$ или $\psi - \varphi \geq \pi$, то

$$\rho(\eta_1 - \eta_2) = \frac{a \cos(\varphi - \frac{\pi}{n}(i + 1/2)) - b \cos(\psi - \frac{\pi}{n}(i + 1/2))}{\cos(\pi/2n)},$$

где точка $(\eta_1 - \eta_2)/\rho(\eta_1 - \eta_2)$ принадлежит полуинтервалу $[P_i, P_{i+1})$.

ЛЕММА 3.4. Пусть $m = 6$, $\eta_1 = a(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\eta_2 = b(\cos \psi, \sin \psi)$, где $\varphi \in [2\pi/3, \pi]$, $\psi \in [-\pi/3, \pi/3]$. Тогда $\rho(\eta_1 - \eta_2)$ больше или равно $\rho(\eta_1)$ и $\rho(\eta_2)$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $m = 6$, $\eta_1 = a(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\eta_2 = b(\cos \psi, \sin \psi)$, где $\varphi \in [\pi/2, 2\pi/3]$, $\psi \in [0, \pi/3]$. Тогда $\langle p_{OP_3}(\eta_1, 0) + p_{OP_2}(\eta_1, 0), \eta_1 \rangle + \rho(\eta_1 - \eta_2) \geq 0$.

ЛЕММА 3.6. Пусть $m = 6$, $\eta_1 = a(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\eta_2 = b(\cos \psi, \sin \psi)$, где $\varphi \in [2\pi/3, \pi]$, $\psi \in [\pi, 4\pi/3]$. Тогда $\langle p_{OP_2}(\eta_1, 0), \eta_1 \rangle + \rho(\eta_1) + \rho(\eta_2 - \eta_1) \geq \rho(\eta_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Пусть Γ – вложенная локально минимальная сеть и x – произвольная ее вершина. Покажем, что тип вершины x описывается теоремой. Пусть $\Gamma_{\text{loc}}(x)$ – локальная сеть с центром в x для Γ . По определению сеть $\Gamma_{\text{loc}}(x)$ кратчайшая. Так как сдвиги не меняют экстремальные свойства сети, без ограничения общности будем предполагать, что x находится в начале координат. В силу утверждений 3.1, 3.2 и неравенства (1) вершина x сети $\Gamma_{\text{loc}}(x)$ имеет не превосходящую 6 степень и один из следующих типов:

- 1) если степень вершины x равна 1, то $\text{type}_v(x) = \{\square\}$;
- 2) если степень вершины x равна 2, то при $2n \equiv k \pmod{3}$, $k = 1, 2, 3$, имеем $\text{type}_v(x) = \{\square, \square; l\}$, причем $3 - n \leq l \leq k$;
- 3) если степень вершины x равна 3, то
 - (а) при $2n \equiv 0 \pmod{3}$ имеем $\text{type}_v(x) = \{\square, \square, \square; 3, 3\}$ или $\text{type}_v(x) = \{\square, \square, *; 0, 3\}$;
 - (б) при $2n \equiv k \pmod{3}$, $k = 1, 2$, имеем $\text{type}_v(x) = \{*, \square, *; k, k\}$;
 - (с) при $2n \equiv 2 \pmod{3}$ имеем $\text{type}_v(x) = \{\square, \square, *; 2, 2\}$;
- 4) если степень вершины x равна 4, то $m = 4, 6, 8$ или 12 , и
 - (а) при $m = 4, 8$ или 12 имеем $\text{type}_v(x) = \{*, *, *, *; m/4, m/4, m/4\}$;
 - (б) при $m = 6$ имеем $\text{type}_v(x) = \{*, \square, *, \square; 3, 3, 3\}$ или $\text{type}_v(x) = \{\square, \square, *, *; 3, 3, 3\}$;
- 5) если степень вершины x равна 5 или 6, то эта вершина граничная, $m = 6$ и
 - (а) если степень вершины x равна 5, то $\text{type}_v(x) = \{\square, *, *, *, *; 3, 3, 3, 3\}$;
 - (б) если степень вершины x равна 6, то $\text{type}_v(x) = \{*, *, *, *, *, *; 3, 3, 3, 3, 3\}$.

Остается доказать, что вершина x не может иметь некоторые из вышеперечисленных типов. Для каждого типа, перечисленного выше, который не входит в утверждение основной теоремы, легко можно указать базовый тип расщепления $\Gamma'_{\text{loc}}(x): G'_{\text{loc}}(x) \rightarrow \mathbb{R}^2$

и отображение $\eta: V_{G'_{\text{loc}}(x)} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G'_{\text{loc}}(x)) = 0$, такие, что $G'_{\text{loc}}(x)$ в силу теоремы 3.1 не является слабо экстремальной сетью. Последнее в силу утверждения 3.1 противоречит тому, что сеть $G_{\text{loc}}(x)$ кратчайшая.

Докажем обратное утверждение. Пусть вершина x сети Γ имеет один из перечисленных в утверждении основной теоремы типов и, как выше, находится в начале координат O . Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $G_{\text{loc}}(x)$ – кратчайшая сеть. Для этого в силу теоремы 3.2 и утверждения 3.1 достаточно рассмотреть все базовые типы расщепления $G'_{\text{loc}}(x)$ сети $G_{\text{loc}}(x)$ и проверить их на слабую экстремальность. Дальнейшее доказательство будет следовать из теоремы 3.1 и из лемм 3.1–3.6.

Из-за недостатка места мы рассмотрим, например, случай, когда единичная окружность Σ является 6-угольником и степень вершины x равна 5. Будем считать, что случаи, когда x имеет степень меньшую 5, уже разобраны. Пусть сеть $G_{\text{loc}}(x)$ состоит из 5 ребер $\gamma_1 = OP_0$, $\gamma_2 = OP$ и $\gamma_k = OP_k$, $k = 3, \dots, 5$, где P_k – вершина 6-угольника с номером k , и точка P лежит на интервале (P_1, P_2) .

Из-за большого числа базовых типов расщеплений ограничимся рассмотрением лишь одного из них и проверим его на слабую экстремальность. Пусть базовый тип расщепления $G'_{\text{loc}}(x): G'_{\text{loc}}(x) \rightarrow \mathbb{R}^2$ сети $G_{\text{loc}}(x)$ представляет собой сеть с единственной вырожденной компонентой H' , образ которой при отображении $G'_{\text{loc}}(x)$ совпадает с O и которая представляет собой путь $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5$, причем вершины x_2, x_3 и x_4 инцидентны ребрам γ_3, γ_2 и γ_4 соответственно, вершина x_5 инцидентна ребрам γ_1 и γ_5 , а вершина x_1 граничная.

По теореме 3.1 слабая экстремальность сети $G'_{\text{loc}}(x)$ равносильна следующему условию: для каждого отображения $\eta: V_{G'_{\text{loc}}(x)} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\eta(\partial G'_{\text{loc}}(x)) = 0$, имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} & \rho(\eta(x_2)) + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta(x_2), 0), \eta(x_2) \rangle + \rho(\eta(x_2) - \eta(x_3)) \\ & + \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta(x_3), 0), \eta(x_3) \rangle + \rho(\eta(x_3) - \eta(x_4)) + \langle p_{x_4}(\gamma_4, \eta(x_4), 0), \eta(x_4) \rangle \\ & + \rho(\eta(x_4) - \eta(x_5)) + \langle p_{x_5}(\gamma_1, \eta(x_5), 0) + p_{x_5}(\gamma_5, \eta(x_5), 0), \eta(x_5) \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\eta(x_2)$ лежит в угле от $-2\pi/3$ до $2\pi/3$, т.е. $\langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta(x_2), 0), \eta(x_2) \rangle \geq 0$, используя неравенство $\rho(\eta(x_2)) + \rho(\eta(x_3) - \eta(x_2)) \geq \rho(\eta(x_3))$, мы получим, что неравенство (2) вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} & \rho(\eta(x_3)) + \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta(x_3), 0), \eta(x_3) \rangle + \rho(\eta(x_3) - \eta(x_4)) + \langle p_{x_4}(\gamma_4, \eta(x_4), 0), \eta(x_4) \rangle \\ & + \rho(\eta(x_4) - \eta(x_5)) + \langle p_{x_5}(\gamma_1, \eta(x_5), 0) + p_{x_5}(\gamma_5, \eta(x_5), 0), \eta(x_5) \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

которое верно, так как сеть с граничной вершиной x и с ребрами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4$ и γ_5 имеет $\text{type}_v(x) = \{*, (), *, *, 3, 0, 3\}$, являющийся частным случаем типа из пункта 4(с) основной теоремы, который уже разобран в силу предположения. Поэтому нам остается рассмотреть случай, когда $\eta(x_2)$ лежит в угле от $2\pi/3$ до $4\pi/3$. Аналогично доказывается, что достаточно рассмотреть лишь те $\eta(x_3)$, которые лежат в угле от 0 до π , те $\eta(x_4)$, которые лежат в угле от π до $5\pi/3$ и те $\eta(x_5)$, которые лежат в угле от $-\pi/2$ до $\pi/6$.

Рассмотрим два случая, которые и завершат доказательство основной теоремы.

1) $\eta(x_4)$ лежит в угле от π до $4\pi/3$, $\eta(x_2)$ лежит в угле от $2\pi/3$ до $4\pi/3$, $\eta(x_3)$ лежит в угле от 0 до π , $\eta(x_5)$ лежит в угле от $-\pi/2$ до $\pi/6$. Неравенство (2) в силу лемм 3.4 и 3.5 вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} & \rho(\eta(x_2)) + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta(x_2), 0), \eta(x_2) \rangle + \rho(\eta(x_2) - \eta(x_3)) \\ & + \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta(x_3), 0), \eta(x_3) \rangle + \rho(\eta(x_3) - \eta(x_4)) + \langle p_{x_4}(\gamma_4, \eta(x_4), 0), \eta(x_4) \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

которое верно, так как сеть с граничной вершиной x и с ребрами γ_2 , γ_3 и γ_4 имеет $\text{type}_v(x) = \{(), *, *, 3, 3\}$, являющийся частным случаем типа из пункта 3(с) основной теоремы, который уже разобран в силу предположения.

2) $\eta(x_4)$ лежит в угле от $4\pi/3$ до $5\pi/3$, $\eta(x_2)$ лежит в угле от $2\pi/3$ до $4\pi/3$, $\eta(x_3)$ лежит в угле от 0 до π , $\eta(x_5)$ лежит в угле от $-\pi/2$ до $\pi/6$. Неравенство (2) в силу леммы 3.4 вытекает из следующих двух неравенств:

$$\begin{aligned} & \rho(\eta(x_2)) + \langle p_{x_2}(\gamma_3, \eta(x_2), 0), \eta(x_2) \rangle + \rho(\eta(x_2) - \eta(x_3)) + \langle p_{x_3}(\gamma_2, \eta(x_3), 0), \eta(x_3) \rangle \geq 0, \\ & \rho(\eta(x_4)) + \langle p_{x_4}(\gamma_4, \eta(x_4), 0), \eta(x_4) \rangle + \rho(\eta(x_4) - \eta(x_5)) \\ & + \langle p_{x_5}(\gamma_1, \eta(x_5), 0) + p_{x_5}(\gamma_5, \eta(x_5), 0), \eta(x_5) \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Первое неравенство верно из-за того, что сеть с граничной вершиной x и с ребрами γ_2 и γ_3 имеет $\text{type}_v(x) = \{(), *, *, 3\}$, являющийся частным случаем типа из пункта 2(b) основной теоремы, который уже разобран в силу предположения, а второе из-за того, что сеть с граничной вершиной x и с ребрами γ_1 , γ_4 и γ_5 имеет $\text{type}_v(x) = \{*, *, *, -6, 3\}$, являющийся частным случаем типа из пункта 3(с) основной теоремы, который также уже разобран в силу предположения. Доказательство основной теоремы закончено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Du D. Z., Hwang F. K., Weng J. F. Steiner minimal trees for Regular Polygons // Disk. and Comp. Geometry. 1987. V. 2. P. 65–84.
- [2] Fermat P. Abhandlungen uber Maxima und Minima // Oswalds, Klassiker der Exakten Wissenschaften. № 238, 1934.
- [3] Jarník V., Kössler M. O minimalnich grafeth obeahujících n daných bodů // Čas. Pěst. Mat. a Fys. 1934. V. 63. P. 223–235.
- [4] Smith W. D. How to find Steiner minimal trees in Euclidean d -space // Algorithmica. 1992. № 7. P. 137–177.
- [5] Francis R. L. A note on the optimum location of new machines in existing plant layouts // J. Indust. Engrg. 1963. V. 14. P. 57–59.
- [6] Hanan M. On Steiner's Problem with Rectilinear Distance // SIAM J. Appl. Math. 1966. V. 14. P. 255–265.
- [7] Hwang F. K. On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 30. P. 104–114.
- [8] Garey M. R., Johnson D. S. The Rectilinear Steiner Problem is NP-Complete. // SIAM J. Appl. Math. 1977. V. 32. P. 826–834.
- [9] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching Solutions to One-Dimensional Variational Problems. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2001.