Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Целочисленная группа Гейзенберга как бесконечная амальгама коммутативных групп, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 669–675

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 03:11:41

УДК 512.54

ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ГРУППА ГЕЙЗЕНБЕРГА КАК БЕСКОНЕЧНАЯ АМАЛЬГАМА КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

Р. С. Исмагилов

Рассматривается $2n$ -мерная целочисленная решетка, $n > 1$, со стандартной кососимметрической 2-формой, аддитивной по каждой переменной. Изучается семейство всех изотропных подрешеток. Доказывается, что амальгама этого семейства групп есть целочисленная группа Гейзенберга.

Библиография: 3 названия.

1. Постановка задачи; описание результатов

1.1. Амальгамы. Воспроизведем определение, данное, например, в статье Серра [1]. Пусть дан набор групп $\{G_\alpha\}$, и для любых α, β дан набор гомоморфизмов $f_{\alpha\beta}: G_\alpha \rightarrow G_\beta$ (этот набор может быть пустым для некоторых α, β). Все это будем кратко записывать в виде $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ и называть *семейством* (состоящим из групп и гомоморфизмов). Назовем *представлением* рассматриваемого семейства в группе Γ такой набор гомоморфизмов $\Phi_\alpha: G_\alpha \rightarrow \Gamma$, что $\Phi_\alpha = \Phi_\beta \circ f_{\alpha\beta}$ для всех α, β . Представление будем записывать в виде $\Gamma, \{\Phi_\alpha\}$. Амальгама семейства $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ – это, по определению, такое представление $\Gamma^\circ, \{\Phi_\alpha^\circ\}$, что множество $\cup \Phi_\alpha^\circ(G_\alpha)$ порождает группу Γ° и выполнено следующее свойство универсальности: для любого представления $\Gamma, \{\Phi_\alpha\}$ существует такой гомоморфизм $p: \Gamma^\circ \rightarrow \Gamma$, что $\Phi_\alpha = p \circ \Phi_\alpha^\circ$ для всех α .

В литературе последнего времени, используя термин “амальгама”, нередко предполагают, что рассматриваемое семейство групп конечно. Между тем, в предлагаемой работе возникнут и бесконечные семейства. По этой причине, имея бесконечное семейство групп (и гомоморфизмов между ними), мы будем применять термин “бесконечная амальгама”. (Добавим, что в [1] используется также название “индуктивный предел”; однако, это название нередко употребляется в ином смысле, и мы не будем его применять. Автор благодарит рецензента, указавшего на существующие ныне разночтения в терминологии в рассматриваемой области.)

Для дальнейшего важен следующий пример семейства $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$. $\{G_\alpha\}$ – это некоторый набор подгрупп фиксированной группы G , замкнутый относительно пересечений и такой, что множество $\cup G_\alpha$ порождает группу G . Гомоморфизм $f_{\alpha\beta}$ определен только в том случае, если $G_\alpha \subset G_\beta$, и сводится к включению $G_\alpha \rightarrow G_\beta$. Такое семейство будем записывать в виде $\{G_\alpha\}$ (опустив, для краткости, упоминание о включениях $f_{\alpha\beta}$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00490.

Пусть $\Gamma^\circ, \{\Phi_\alpha^\circ\}$ – амальгама (возможно, бесконечная) этого семейства. Группа Γ° задается образующими, состоящими из пар (g, α) , $g \in G_\alpha$, и соотношениями $(g, \alpha) = (g, \beta)$ при $G_\alpha \subset G_\beta$, $g \in G_\alpha$, $(g_1, \alpha)(g_2, \alpha) = (g_1 g_2, \alpha)$, $(g, \alpha)^{-1} = (g^{-1}, \alpha)$ при $g_1, g_2, g \in G_\alpha$.

Согласно определению имеется такой эпиморфизм $p: \Gamma^\circ \rightarrow G$, что $p \circ \Phi_\alpha^\circ$ тождествен на G_α для каждого α . Группа $\text{Ker } p$ дает те соотношения, которые следует добавить к уже описанным, чтобы получить в точности группу G (мы воздержимся от более точных формулировок). Если в качестве $\{G_\alpha\}$ взять, скажем, набор всех абелевых подгрупп из G , то группы Γ° и $\text{Ker } p$ естественно (“функториально”) зависят от G ; обозначим эти функторы через $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\circ$. Явное “вычисление” значений этих функторов на конкретной группе представляет, возможно, небезынтересную задачу (ниже будет рассмотрен простой пример такого рода).

1.2. Постановка задачи, результаты. Перейдем к описанию содержания предлагаемой работы. Зафиксируем целое число $n > 1$ и рассмотрим обычную аддитивную группу $\mathbf{Z}^{2n}$. Зафиксируем в ней стандартный базис $\{e_k, f_k, 1 \leq k \leq n\}$; таким образом, $\mathbf{Z}^{2n}$ состоит из всех векторов-строк вида $a = \sum_{k=1}^n (x_k e_k + y_k f_k)$, $x_k, y_k \in \mathbf{Z}$. Эту строку будем также записывать в виде $a = (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$. Пусть, далее, $\tau(a, b)$, $a, b \in \mathbf{Z}^{2n}$, – аддитивная по каждой переменной целочисленная кососимметрическая форма такая, что $\tau(e_i, e_j) = \tau(f_i, f_j) = \tau(e_i, f_k) = 0$ для всех $i \neq k, j$, $\tau(e_k, f_k) = 1$. Подгруппу $V \subset \mathbf{Z}^{2n}$ назовем *изотропной*, если $\tau(a, b) = 0$ для всех $a, b \in V$. Набор всех изотропных подгрупп обозначим через $\text{Is}(\mathbf{Z}^{2n})$. Наша задача – описать (бесконечную) амальгаму семейства $\text{Is}(\mathbf{Z}^{2n})$. С этой целью рассмотрим целочисленную группу Гейзенберга $H^{2n+1}(\mathbf{Z})$, определяемую как множество $\mathbf{Z}^{2n} \times \mathbf{Z}$ с групповой операцией $(a, x)(b, y) = (a + b, x + y + \tau(a, b))$. Для любой подгруппы $V \in \text{Is}(\mathbf{Z}^{2n})$ вложение

$$V \rightarrow H^{2n+1}(\mathbf{Z}), \quad a \mapsto (a, 0), \quad (1)$$

есть, очевидно, гомоморфизм групп.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n > 1$. Тогда группа $H^{2n+1}(\mathbf{Z})$ с гомоморфизмами (1) есть бесконечная амальгама семейства $\text{Is}(\mathbf{Z}^{2n})$.

Мы предполагали, что $n > 1$. Разумеется, можно построить (аналогичным образом) бесконечную амальгаму и при $n = 1$. Однако она малоинтересна (сводится к свободному произведению счетного набора бесконечных циклических групп). Таким образом, ограничение $n > 1$ весьма существенно.

Несколько слов о предыстории и мотивировках. В работах автора [2], [3] рассматривалась аналогичная задача с заменой группы $\mathbf{Z}^{2n}$ на аддитивную группу линейного пространства $\mathbf{R}^{2n}$ и целочисленной группы $H^{2n+1}(\mathbf{Z})$ – на обычную группу Гейзенберга (построенную по невырожденной кососимметрической 2-форме τ). Эта задача возникла из модификации канонических коммутационных соотношений квантовой механики (в форме Вейля). (Впрочем, в работах [2], [3] рассматривались также линейные пространства над произвольным полем нечетной характеристики.) С точки зрения теории групп представляется естественным желание избавиться от структуры линейного пространства; это и привело к “целочисленной” модификации задачи, решенной в [2], [3]. Основная идея доказательства теоремы 1 та же, что в [2]; однако, осуществление этой идеи в “целочисленном” случае требует некоторых новых соображений (им посвящен раздел 2.1).

СЛЕДСТВИЕ. *Бесконечная амальгама семейства всех абелевых подгрупп группы $H^{2n+1}(\mathbf{Z})$ есть прямое произведение $H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$, в которое каждая абелева подгруппа $A \subset H^{2n+1}(\mathbf{Z})$ вложена по правилу $(a, x) \mapsto (a, x, x)$, где $(a, x) \in A$.*

Таким образом, это следствие дает значения упомянутых выше функторов (связанных с бесконечными амальгамами семейства всех абелевых подгрупп) на целочисленной группе Гейзенберга; результат состоит в том, что $\mathcal{A}(H^{2n+1}(\mathbf{Z})) = H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$, $\mathcal{A}^o(H^{2n+1}(\mathbf{Z})) = \mathbf{Z}$.

Другие примеры вычисления амальгам содержатся в [3].

2. Доказательства

2.1. Некоторые свойства формы τ на группе $\mathbf{Z}^{2n}$. В этом разделе будут сформулированы предложения 1, 2, дающие основное техническое средство для доказательства теоремы 1; доказательство этих предложений будет приведено в пп. 2.3, 2.4.

Рассмотрим группу $\mathbf{Z}^{2n}$ с формой τ , указанной в 1. Элементы a, b из $\mathbf{Z}^{2n}$ назовем *ортгональными* (относительно τ), если $\tau(a, b) = 0$; в этом случае пишем $a \perp b$. Рассмотрим всевозможные упорядоченные пары (a, b) , где a, b – векторы из $\mathbf{Z}^{2n}$. Нам понадобится переход от такой пары к новой паре по следующему правилу: к одному из членов a, b этой пары прибавляется вектор, ортогональный к обоим членам; будем записывать такой переход в виде $(a, b) \rightarrow (a', b')$. Итак, речь идет о переходах вида

$$(a, b) \rightarrow (a', b'), \quad a' = a, \quad b - b' \perp a, \quad b - b' \perp b, \quad (2a)$$

$$(a, b) \rightarrow (a', b'), \quad b' = b, \quad a - a' \perp a, \quad a - a' \perp b. \quad (2b)$$

Назовем пары $(a, b), (a', b')$ *эквивалентными*, если их можно связать цепочкой переходов

$$(a, b) = (a_1, b_1) \rightarrow \cdots \rightarrow (a_k, b_k) = (a', b'), \quad (3)$$

каждый из которых имеет вид (2a) либо (2b) (легко видеть, что таким образом действительно получается отношение эквивалентности); эквивалентность пар записываем в виде $(a, b) \sim (a', b')$.

Ясно, что если $(a, b) \sim (a', b')$, то $\tau(a, b) = \tau(a', b')$. Следующее предложение показывает, что верно и обратное; в этом предложении предполагается, что $n > 1$, и рассматриваются пары векторов $(a, b), (a', b')$, взятых из $\mathbf{Z}^{2n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $\tau(a, b) = \tau(a', b')$. Тогда $(a, b) \sim (a', b')$.*

Чтобы сформулировать следующее предложение, обозначим через $\text{Sp}(n)$ группу всех обратимых матриц g порядка $2n \times 2n$ с целыми элементами таких, что преобразование $a \mapsto ag$, $a \in \mathbf{Z}^{2n}$ (умножение строки на матрицу) сохраняет форму τ , т.е. $\tau(a, b) = \tau(ag, bg)$ при $a, b \in \mathbf{Z}^{2n}$. Таким образом, $\text{Sp}(n)$ – это целочисленная симплектическая группа. В дальнейшем мы отождествляем матрицу $g \in \text{Sp}(n)$ с соответствующим ей автоморфизмом группы $\mathbf{Z}^{2n}$. Ниже мы используем базис $\{e_k, f_k, 1 \leq k \leq n\}$, введенный в разделе 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) *Для любого вектора $a \in \mathbf{Z}^{2n}$ существует такая матрица $g \in \text{Sp}(n)$, что $ag = re_1$; здесь r – это наибольший общий делитель координат вектора a .*

2) Для любых векторов a, b из $\mathbf{Z}^{2n}$ существует такая матрица $g \in \text{Sp}(n)$, что $ag = xe_1$, $bg = ye_1 + zf_1 + te_2$ (для некоторых целых x, y, z, t).

3) Если $\tau(a, b) = 1$, то существует такая матрица $g \in \text{Sp}(n)$, что $ag = e_1$, $bg = f_1$.

4) Если $a, b, c \in \mathbf{Z}^{2n}$, $\tau(a, b) = 1$, то существует такая матрица $g \in \text{Sp}(n)$, что $ag = e_1$, $bg = f_1$, $cg = ye_1 + zf_1 + te_2$, где y, z, t целые.

Предложение 2 вполне элементарно, но доказательство предложения 1 – достаточно длинное; нам удобно отложить доказательство этих предложений до п. 2.3, 2.4 этого раздела. В следующих двух разделах, опираясь на предложения 1, 2, мы докажем теорему 1 и ее следствие, сформулированное в разделе 1.

2.2. Доказательство теоремы 1 и ее следствия. Рассмотрим любое представление семейства $Is(\mathbf{Z}^{2n})$ в некоторой группе Γ . Его можно отождествить с отображением $\Phi: \mathbf{Z}^{2n} \rightarrow \Gamma$ таким, что его ограничение на любую изотропную подгруппу из $\mathbf{Z}^{2n}$ есть гомоморфизм; это свойство можно записать так

$$\Phi(a + b) = \Phi(a)\Phi(b) \quad \text{при } a \perp b, \quad \Phi(0) = e_\Gamma. \quad (4)$$

(Через e_Γ обозначен нейтральный элемент группы Γ .)

Для доказательства теоремы 1 достаточно построить такой гомоморфизм $\Phi_0: H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \rightarrow \Gamma$, что

$$\Phi_0(a, 0) = \Phi(a), \quad a \in \mathbf{Z}^{2n}. \quad (5)$$

С этой целью определим для любой пары (a, b) , составленной из элементов группы $\mathbf{Z}^{2n}$, элемент из Γ по формуле

$$w(a, b) = \Phi(a + b)\Phi(-b)\Phi(-a). \quad (6)$$

ЛЕММА 1. 1) Существует (и однозначно определен) такой гомоморфизм групп $\theta: \mathbf{Z} \rightarrow \Gamma$, что $w(a, b) = \theta(\tau(a, b))$ для всех a, b из $\mathbf{Z}^{2n}$.

2) Указанный гомоморфизм θ удовлетворяет условию $\theta(k)\Phi(a) = \Phi(a)\theta(k)$ для всех $a \in \mathbf{Z}^{2n}$, $k \in \mathbf{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем его на шаги.

Шаг 1. Из свойства (4) вытекает, что элемент (6) не меняется, если к одному из векторов a, b прибавить вектор из $\mathbf{Z}^{2n}$, ортогональный к ним обоим (напомним, что имеется в виду ортогональность относительно формы τ). Отсюда следует, что если $(a, b) \sim (a', b')$ (эквивалентность векторов была определена в п. 2.1), то $w(a, b) = w(a', b')$. Применяя предложение 1, получаем отсюда, что $w(a, b)$ зависит только от величины $\tau(a, b)$, т.е. $w(a, b) = \theta(\tau(a, b))$ для некоторого отображения $\theta: \mathbf{Z} \rightarrow \Gamma$. Ясно, что $\theta(0) = e_\Gamma$, ибо $\Phi(0) = e_\Gamma$. Мы построили отображение θ , указанное в первом утверждении леммы. Осталось проверить, что это отображение является гомоморфизмом и удовлетворяет условию 2) леммы.

Шаг 2. Перепишем равенство (6) в виде $\Phi(a + b) = w(a, b)\Phi(a)\Phi(b)$. Применим это равенство к $\Phi(a + b + c)$, представив выражение $a + b + c$ сначала в виде $a + (b + c)$, затем в виде $(a + b) + c$. После очевидных преобразований приходим к равенству

$$w(a, b + c)\Phi(a)w(b, c)\Phi(-a) = w(a + b, c)w(a, b). \quad (7)$$

Зафиксируем вектор $a \in \mathbf{Z}^{2n}$ и число $r \in \mathbf{Z}$. Тогда существуют такие векторы b, c из $\mathbf{Z}^{2n}$, что $b \perp a, c \perp a, \tau(b, c) = r$ (действительно, в силу предложения 2 достаточно проверить это для вектора $a = xe_1$, а для этого достаточно положить $b = re_2, c = f_2$). Для таких векторов из (7) получаем (используя только что построенное отображение θ) равенство $\Phi(a)\theta(r)\Phi(-a) = \theta(r)$. Этим доказано, что отображение θ обладает свойством, указанным во втором утверждении леммы.

Шаг 3. Взяв целые числа x, y , применим равенство (7) к векторам $a = e_1, b = xf_1, c = yf_1$. Получим $\theta(x+y) = \theta(y)\theta(x)$. Напомним, что $\theta(0) = e_\Gamma$. Итак, θ – гомоморфизм групп, и лемма доказана.

Из этой леммы следует, что отображение $\Phi_0: H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \rightarrow \Gamma, \Phi_0(a, r) = \Phi(a)\theta(-r)$, есть гомоморфизм групп. Для него выполнено соотношение (5); этим доказана теорема 1.

Докажем следствие 1. Возьмем произвольное представление семейства всех абелевых подгрупп целочисленной группы Гейзенберга $H^{2n+1}(\mathbf{Z})$ в некоторой группе Γ . Его можно отождествить с отображением $\Psi: H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \rightarrow \Gamma$ таким, что его ограничение на любую абелеву подгруппу есть гомоморфизм. Отображение $a \mapsto \Psi(a, 0), a \in \mathbf{Z}^{2n}$, удовлетворяет условию (4); по теореме 1 существует такой гомоморфизм $p: H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \rightarrow \Gamma$, что $\Psi(a, 0) = p(a, 0)$ при $a \in \mathbf{Z}^{2n}$. Положим $\Psi(0, 1) = h_0, p(0, 1) = h_1, h = h_0(h_1)^{-1}$. Тогда элементы h_0, h_1, h перестановочны со всеми $\Psi(a, x), (a, x) \in H^{2n+1}(\mathbf{Z})$, и $\Psi(a, x) = \Psi(a, 0)\Psi(0, x) = p(a, 0)h_0^x = p(a, x)h_1^{-x}h_0^x = p(a, x)h^x$. Итак, мы выразили отображение $\Psi: H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \rightarrow \Gamma$ через гомоморфизм $p: H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \rightarrow \Gamma$ по формуле $\Psi(a, x) = p(a, x)h^x, (a, x) \in H^{2n+1}(\mathbf{Z})$.

Группа $H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$ состоит из элементов (a, x, y) с правилом умножения $(a, x, y) \times (a', x', y') = (a + a', x + x' + \tau(a, a'), y + y')$. Возьмем отображение $P: H^{2n+1}(\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z} \rightarrow \Gamma, P(a, x, y) = p(a, x)h^y$. Ясно, что это гомоморфизм; кроме того, $\Psi(a, x) = P(a, x, x)$. Этим доказано следствие 1.

2.3. Доказательство предложения 2. 1) Мы используем следующий простой факт: для любого ненулевого вектора $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{Z}^m$ существует такая матрица $g \in \text{SL}(m, \mathbf{Z})$ (это группа матриц с целыми элементами и с определителем, равным 1), что $xg = (r, 0, \dots, 0)$, где r есть наибольший общий делитель координат вектора x . Для доказательства первого утверждения предложения 1 возьмем любой вектор $a = \sum_{k=1}^n (x_k e_k + y_k f_k) \in \mathbf{Z}^{2n}$. Для каждого $k = 1, \dots, n$ применим упомянутый факт к двумерному подпространству с базисом e_k, f_k ; умножив строку (x_k, y_k) на подходящую матрицу, получаем строку $(r_k, 0)$. Таким образом, умножение строки a на подходящую матрицу из $\text{Sp}(n)$ приводит к строке $\sum_{k=1}^n r_k e_k$. Возьмем, далее, такую матрицу $h \in \text{SL}(n, \mathbf{Z})$, что $(r_1, \dots, r_n)h = (r, 0, \dots, 0)$; через h' обозначим транспонированную матрицу. Тогда умножение на блочно-диагональную матрицу с блоками $h, (h')^{-1}$ (такое умножение сохраняет форму τ) приводит данный вектор к re_1 .

2) Возьмем теперь два целочисленных вектора a, b . В силу сказанного выше можно считать, что $a = re_1$. Применяя то же соображение к вектору $\sum_{k=2}^n (x_k e_k + y_k e_k)$, приходим к паре, указанной во втором утверждении предложения 2.

3) Пусть $\tau(a, b) = 1$. В силу сказанного данную пару можно привести (умножением на матрицу из $\text{Sp}(n)$) к паре $(e_1, f_1 + r_1 e_1 + r_2 e_2)$. Применим преобразование g , переводящее векторы f_1, f_2 в $f_1 - r_1 e_1 - r_2 e_2$ и $f_2 - r_2 e_1$ (соответственно) и оставляющее на

месте векторы $e_1, e_2, e_i, f_i, i > 2$; легко видеть, что оно принадлежит группе $\text{Sp}(n)$. В результате приходим к паре e_1, f_1 . Этим доказано второе утверждение предложения 2.

4) Пусть, наконец, даны векторы a, b, c , и $\tau(a, b) = 1$. Согласно уже доказанному, существует такая матрица $g \in \text{Sp}(n)$, что $ag = e_1, bg = f_1, cg = ye_1 + zf_1 + h$, и h есть целочисленная линейная комбинация векторов $e_i, f_i, 2 \leq k \leq n$. Взяв такую матрицу $g \in \text{Sp}(n-1)$, что $hg = te_2$, приходим к последнему утверждению предложения 2.

2.4. Доказательство предложения 1. В следующей лемме собраны свойства отношения эквивалентности пар, введенного в п. 2.1.

ЛЕММА 2. 1) Если $(a, b) \sim (a', b')$, то $(xa, yb) \sim (xa', yb')$ для любых целых x, y .

2) Если $\tau(a, b) = \tau(a', b')$ и векторы a, b ортогональны (относительно формы τ) каждому из векторов a', b' , то $(a, b) \sim (a', b')$.

3) Любая пара (a, b) эквивалентна некоторой паре вида (ra', b') , где $r \in \mathbf{Z}$, $\tau(a', b') = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1). Пусть цепочка (3) соединяет эквивалентные пары (a, b) , (a', b') . Заменяв каждую пару (a_i, b_i) из цепочки (3) парой (xa_i, yb_i) , получаем цепочку преобразований, переводящую пару (xa, yb) в (xa', yb') .

2) Пусть пары (a, b) , (a', b') обладают свойством, описанным во втором утверждении леммы. Тогда цепочка преобразований $(a, b) \rightarrow (a + a', b) \rightarrow (a + a', b') \rightarrow (a', b')$ удовлетворяет условиям, определяющим понятие эквивалентности пар; этим доказано второе утверждение леммы.

3) Из предложения 2 следует, что третье утверждение леммы достаточно доказать для пары $(xe_1, ye_1 + zf_1 + te_2)$. Но эта пара эквивалентна паре $(xe_1, ye_1 + zf_1)$. Далее, дважды применяя второе (уже доказанное) утверждение леммы, получаем эквивалентности $(xe_1, ye_1 + zf_1) \sim (xze_2, f_2) \sim (xe_1, f_1)$. Лемма доказана.

Из нее вытекает, что достаточно доказать предложение 1 для пар (a, b) , (a', b') таких, что $\tau(a, b) = \tau(a', b') = 1$.

ЛЕММА 3. Если $\tau(a, b) = \tau(a, b') = 1$, то $(a, b) \sim (a, b')$. (Аналогично, если $\tau(a, b) = \tau(a', b) = 1$, то $(a, b) \sim (a', b)$).

Другими словами, если к одному из векторов рассматриваемой пары прибавить вектор, ортогональный ко второму (но необязательно ортогональный к обоим), то наша пара перейдет в эквивалентную.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя предложение 2 (его последнее утверждение), можно считать, что речь идет о парах (e_1, f_1) , $(e_1, ye_1 + f_1 + te_2)$. Применяя определение эквивалентности векторов и второе утверждение леммы 2, получаем $(e_1, ye_1 + f_1 + te_2) \sim (e_1, ye_1 + f_1) \sim (e_2, f_2) \sim (e_1, f_1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Если $\tau(a, b) = \tau(a', b') = 1$, то $(a, b) \sim (a', b')$.

(Как было сказано после доказательства леммы 2, из этой леммы следует предложение 1.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь предложением 2, можно считать, что $(a, b) = (e_1, f_1)$, $(a', b') = (ye_1 + zf_1 + te_2, ue_1 + vf_1 + we_2 + sf_2 + h)$, где вектор $h \in \mathbf{Z}^{2n}$ ортогонален векторам e_1, f_1, e_2, f_2 ; если $n = 2$, то $h = 0$. Согласно лемме 3 пара (a', b') эквивалентна паре $(ye_1 + zf_1 + te_2, ue_1 + vf_1 + sf_2)$ (ибо вектор $h + we_2$ ортогонален первому

вектору этой пары). Вектор $se_1 - ve_2$ ортогонален второму вектору последней пары; следовательно, по лемме 3, прибавление к первому вектору пары вектора $k(se_1 - ve_2)$ (k целое) переводит пару в эквивалентную. При этом слагаемое te_2 в первом векторе заменяется на $(t - kv)e_2$. Аналогичным образом вектор $tf_1 - yf_2$ ортогонален первому вектору рассматриваемой пары и, следовательно, прибавление ко второму вектору пары вектора $r(tf_1 - yf_2)$ (r целое) переводит нашу пару в эквивалентную. При таком прибавлении слагаемое vf_1 заменится на $(v + rt)f_1$. Таким образом, коэффициенты t, v меняются согласно правилам $t \rightarrow t - kv, v \rightarrow v + rt$. Ясно, что продолжая такие преобразования, мы можем обратить в нуль коэффициент t . Итак, пара (a', b') эквивалентна паре $(ye_1 + zf_1, ue_1 + vf_1 + sf_2) \sim (ye_1 + zf_1, ue_1 + vf_1)$ (здесь использована ортогональность вектора f_2 векторам e_1, f_1 .) Далее, согласно второму утверждению леммы 2 $(ye_1 + zf_1, ue_1 + vf_1) \sim (e_2, f_2) \sim (e_1, f_1)$. Этим доказана лемма 4 и, тем самым, доказано предложение 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Серр Ж.П. Деревья, амальгамы и SL_2 // Математика. 1974. Т. 18. № 1. С. 3–51.
- [2] Исмагилов Р.С. Некоторые задачи об универсальных отображениях // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естеств. и тех. науки. 1997. Т. 2. № 4. С. 367–371.
- [3] Исмагилов Р.С. Слабые ККС и КАС и индуктивные пределы семейств групп и алгебр // Функцион. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 2. С. 75–78.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступило

03.03.2000

Исправленный вариант

27.05.2003