Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Интегрируемость задачи о движении цилиндра и вихря в идеальной жидкости, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 20–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:56:01

УДК 517.598

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА И ВИХРЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе найдена нелинейная пуассонова структура и два первых интеграла в задаче о плоском движении кругового цилиндра и n точечных вихрей в идеальной жидкости. Эта задача априори не является гамильтоновой; в частности, в случае $n = 1$ (т.е. задача о взаимодействии цилиндра и вихря) она является интегрируемой.

Библиография: 3 названия.

1. Уравнения движения. Рассмотрим задачу о плоском движении цилиндрического твердого тела и n точечных вихрей с циркуляциями Γ_i в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Будем считать, что внешние силовые поля отсутствуют, поверхность цилиндра является идеально гладкой, а его обтекание является циркуляционным – т.е. циркуляция вдоль замкнутого контура, охватывающего цилиндр, равна $\Gamma \neq 0$. Уравнения движения такой системы почти одновременно получены С. М. Рамодановым [1], а также в [2]. В последней работе предполагается, что $\Gamma = 0$. В дальнейшем мы придерживаемся работы [1].

Рассмотрим две системы координат: неподвижную OXY и связанную с центром цилиндра Cxy , совершающую относительно первой плоскопараллельное движение (рис. 1). Пусть $(v_1, v_2) = \mathbf{v}$ проекции скорости центра цилиндра на оси Cxy , $(x_i, y_i) = \mathbf{r}_i$ – проекции радиус-вектора, соединяющего центр цилиндра с i -м вихрем, на те же оси, μ – масса цилиндра, R – его радиус. Как показано в [1], уравнения для $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}_i$ при инерционном движении отделяются от остальных уравнений и могут интегрироваться независимо. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}_i|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \\ \mu \dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{y}_i - \dot{y}_i), \quad \mu \dot{v}_2 = -\lambda v_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - \dot{x}_i), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ – инверсный образ i -го вихря, сопряженный относительно контура цилиндра по правилу

$$\tilde{x}_i = \frac{R^2}{r^2} x_i, \quad \tilde{y}_i = \frac{R^2}{r^2} y_i,$$

а функция $\tilde{\varphi}_i$ соответствует части потенциала течения φ , не имеющей особенностей в

Рис. 1

точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$. Потенциал течения вне цилиндра можно представить в форме

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{\mathbf{r}^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_i}{x - \tilde{x}_i} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_i}{x - x_i} \right) \right),$$

где $\lambda = \Gamma/(2\pi)$, $\lambda_i = \Gamma_i/(2\pi)$.

Уравнения (1), как несложно проверить, имеют интеграл типа энергии (если пользоваться аналогией с классической механикой) вида

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \mu (v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2} \sum_i [\lambda_i^2 \ln(\mathbf{r}_i^2 - R^2) - \lambda_i \lambda \ln \mathbf{r}_i^2] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \ln \frac{R^4 - 2R^2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_i^2 \mathbf{r}_j^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

хотя и происхождение этого интеграла не совсем очевидно, поскольку уравнения (1) не получаются, как обычно, из лагранжева формализма, а наследуют некоторые консервативные свойства как динамики твердого тела, так и движения идеальной жидкости. Отметим, что уравнения (1) сохраняют стандартную меру.

2. Гамильтонова структура уравнений движения. В работе [2] поставлен вопрос о гамильтоновости системы (1) и получены некоторые результаты в случае $\Gamma = 0$, $\sum_{i=1}^n \Gamma_i = 0$. Здесь мы приведем пуассонову структуру для уравнений (1) в общем случае. Оказывается, что она нелинейно зависит от фазовых переменных и является невырожденной. Ее ненулевые базисные скобки Пуассона следующие:

$$\begin{aligned} \{v_1, v_2\} &= \frac{\lambda}{\mu^2} - \sum \frac{\lambda_i}{\mu^2} \frac{\mathbf{r}_i^4 - R^4}{\mathbf{r}_i^4}, & \{v_1, x_i\} &= \frac{1}{\mu} \frac{\mathbf{r}_i^4 - R^2(x_i^2 - y_i^2)}{\mathbf{r}_i^4}, \\ \{v_1, y_i\} &= -\frac{1}{\mu} \frac{2R^2 x_i y_i}{\mathbf{r}_i^4}, & \{v_2, x_i\} &= -\frac{1}{\mu} \frac{2R^2 x_i y_i}{\mathbf{r}_i^4}, \\ \{v_2, y_i\} &= \frac{1}{\mu} \frac{\mathbf{r}_i^4 + R^2(x_i^2 - y_i^2)}{\mathbf{r}_i^4}, & \{x_i, y_i\} &= -\frac{1}{\lambda_i}. \end{aligned} \quad (3)$$

По теореме Дарбу в невырожденном случае всегда существует аналитическое преобразование, приводящее (3) к каноническому виду $\{p_i, q_i\} = \delta_{ij}$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, q_j\} = 0$. Однако для дальнейшего явный вид этого преобразования нам не потребуется.

3. Интегрируемость системы для случая одного вихря. Рассмотрим случай $n = 1$, т.е. совместное движение вихря и цилиндра. Обозначим $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = (x, y)$. Несложно видеть, что такая система инвариантна относительно вращения вокруг центра цилиндра. Поэтому существует некоторый интеграл

$$F = \mu' \mathbf{v}^2 + 2\mu\lambda_1 \left(1 - \frac{R^2}{\mathbf{r}^2}\right) (xv_2 - yv_1) + \lambda_1 \left(\lambda_1 \left(\mathbf{r}^2 + \frac{R^4}{\mathbf{r}^2} \right) - \lambda \mathbf{r}^2 \right), \quad (4)$$

порождающий в силу наличия структуры (3) поле симметрий

$$\mathbf{v}_F = 2\lambda(v_2, -v_1, y, -x). \quad (5)$$

Интеграл (4) является обобщением интеграла момента из классической механики и позволяет проинтегрировать систему в квадратурах. Используя его, можно понизить порядок системы до одной степени свободы. Эта редукция близка приведению по Раусу. Выполним ее в явном виде.

В качестве переменных приведенной системы следует выбрать интегралы поля симметрий $\mathbf{v}_F$ (5) (см., например, [3]). Например,

$$p_1 = \mu(xv_1 + yv_2), \quad p_2 = \mu(xv_2 - yv_1), \quad r_1 = \mu^2(v_1^2 + v_2^2), \quad r_2 = x^2 + y^2. \quad (6)$$

Скобки Пуассона между этими переменными следующие:

$$\begin{aligned} \{p_1, p_2\} &= (\lambda - \lambda_1)r_2 + \frac{1}{\lambda_1}(p_1^2 + (p_2 - \lambda_1 R^2)^2), \\ \{r_1, r_2\} &= 4p_1 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right), \\ \{p_1, r_1\} &= 2(\lambda - \lambda_1)p_2 - 2\frac{p_1^2 + p_2^2}{r_2} + 2R\frac{p_1^2 - p_2(p_2 - \lambda_1 R^2)}{r_2^2}, \\ \{p_1, r_2\} &= 2r_2 + \frac{2}{\lambda_1}(p_2 - \lambda_1 R^2), \\ \{p_2, r_1\} &= -2(\lambda - \lambda_1)p_1 + 2R^2 p_1 \frac{2p_2^2 - \lambda_1 R^2}{r_2^2}, \\ \{p_2, r_2\} &= -2\frac{p_1}{\lambda_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассматриваемая система является вырожденной, ее ранг равен двум, и поэтому такая приведенная система имеет одну степень свободы. Для явного получения этой системы необходимо исключить две переменных из набора (r_1, r_2, p_1, p_2) , используя интеграл (4), являющийся функцией Казимира структуры (7) и очевидное геометрическое соотношение

$$p_1^2 + p_2^2 - r_1 r_2 = 0,$$

следующее из (6).

Интересно было бы провести качественный анализ приведенной системы, из которого следуют некоторые выводы о движении полной системы (1).

4. Случай n вихрей. В общем случае существует обобщение интеграла (4). Оно имеет вид

$$F = \mu \mathbf{v}^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(2\mu \left(1 - \frac{R^2}{\mathbf{r}_i^2} \right) (x_i v_2 - y_i v_1) + (\lambda_i - \lambda) \mathbf{r}_i^2 + \lambda_i \frac{R^4}{\mathbf{r}_i^2} \right) + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \left(1 - \frac{R^2}{\mathbf{r}_i^2} \right) \left(1 - \frac{R^2}{\mathbf{r}_j^2} \right). \quad (8)$$

С его помощью также можно понизить порядок системы на одну степень свободы. Для интегрируемости получившейся системы необходимо знать $n - 1$ инволютивных интегралов. В общем случае, видимо, они не существуют и уже система двух вихрей, взаимодействующих с цилиндром, не является интегрируемой. Однако это пока не доказано, тем более, что возможно, существуют частные случаи интегрируемости, реализующиеся при дополнительных ограничениях на параметры системы и на постоянные уже известных интегралов (2), (8).

Любопытно также обобщение пуассоновой структуры (3) и интегралов (2), (8) на задачу о взаимодействии в жидкости двух (или нескольких) твердых тел, имеющих заданные циркуляции – разумеется, в плоской постановке.

Авторы благодарят В. В. Козлова и С. М. Рамоданова за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ramodanov S. M. Motion of a Circular Cylinder and a Vortex in an Ideal Fluid // Reg. & Chaot. Dyn. 2001. V. 6. № 1. P. 33–38.
- [2] Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D. The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices // Phys. of Fluids. 2002. V. 14. P. 1214–1227.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: РХД, 1999.

(А. В. Борисов) Институт компьютерных исследований, г. Ижевск,
(И. С. Мамаев) Удмуртский государственный университет
E-mail: borisov@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Поступило
04.07.2002