Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Планида, Асимптотики собственных элементов оператора Лапласа со сменой типа граничного условия на узкой уплощенной полосе, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 236–252

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 05:17:02

УДК 517.956

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА СО СМЕНОЙ ТИПА ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ НА УЗКОЙ УПЛОЩЕННОЙ ПОЛОСЕ

М. Ю. Планида

В работе методом согласования асимптотических разложений строятся асимптотики по малому параметру собственных значений и собственных функций оператора Лапласа в области со сменой типа граничного условия на узкой уплощенной полосе при условии, что на узкой полосе границы задается условие Неймана, а на остальной части границы – условие Дирихле. Малым параметром является ширина полосы.

Библиография: 15 названий.

1. Постановка задачи. Построению асимптотик решений эллиптических краевых задач в областях с вырезанными малыми отверстиями и узкими щелями посвящено значительное число работ (см., например, [1] и содержащийся в этой монографии обзор литературы). Асимптотики собственных значений краевых задач для оператора Лапласа в таких областях были получены в [2]–[7]. В [8]–[10] были построены асимптотики собственных значений и собственных функций задачи Дирихле со сменой типа граничного условия на участке границы, стягивающемся к точке. В [11] рассматривалась задача Синьорини со сменой типа граничного условия на узкой полосе в случае, когда в окрестности этой полосы граница совпадает с цилиндрической поверхностью, а сама полоска стягивается к кривой, образующейся при сечении этой цилиндрической поверхности перпендикулярной плоскостью. В настоящей работе смена типа граничного условия осуществляется на узкой уплощенной полоске, стягивающейся к замкнутой кривой. Для такой краевой задачи ниже строятся асимптотики собственных значений и собственных функций по малому параметру, характеризующему ширину узкой полоски.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – односвязная ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей Γ , $\gamma \in C^\infty$ – замкнутая кривая без самопересечений на плоскости $x_3 = 0$, $\gamma \subset \Gamma$ и Ω в окрестности кривой γ лежит в полупространстве $x_3 > 0$. В окрестности γ введем координаты (y_1, y_2, s) , где s – натуральный параметр на кривой γ , $y_2 = x_3$, y_1 – расстояние до γ на плоскости $x_3 = 0$, измеренное вдоль внешней нормали к кривой γ (понимаемой как граница двумерной области в плоскости $x_3 = 0$). Положим

$$\gamma_\varepsilon = \{(y_1, 0, s) : \varepsilon f_1(s) < y_1 < \varepsilon f_2(s)\}, \quad \Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus \gamma_\varepsilon,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00693, программы “Ведущие научные школы” и программы “Университеты России”, проект № УР.04.01.010.

Рис. 1

где $f_1(s), f_2(s) \in C^\infty(\gamma)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ (см. рис. 1).

В [12] доказано следующее утверждение

ЛЕММА 1.1. Пусть λ_0 – простое собственное значение краевой задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \quad \text{в } \Omega, \quad \psi_0 = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (1.1)$$

Тогда существует единственное и простое собственное значение λ_ε краевой задачи

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon \quad \text{в } \Omega, \quad \psi_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\tau} = 0 \quad \text{на } \gamma_\varepsilon, \quad (1.2)$$

где τ – внешняя нормаль, сходящаяся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к λ_0 , а для нормированных в $L_2(\Omega)$ собственных функций имеет место сильная сходимость $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ в $L_2(\Omega)$ и слабая сходимость в $W_2^1(\Omega)$.

В работе методом согласования асимптотических разложений [1] строятся асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственного значения краевой задачи (1.2), сходящегося к простому собственному значению краевой задачи (1.1), и соответствующей собственной функции. Всюду далее λ_0 – простое собственное значение краевой задачи (1.1).

Структура работы выглядит следующим образом. В п. 2 исследуются решения задачи Дирихле с заданными особенностями на кривой γ , необходимые при построении асимптотик собственных элементов краевой задачи (1.2). Асимптотики этих элементов строятся методом согласования асимптотических разложений в п. 3. Пункт 4 посвящен обоснованию построенных асимптотик. В заключительном п. 5 приводятся примеры и даются некоторые приложения построенных асимптотик.

2. Решения задачи Дирихле с особенностями на кривой γ . Нетрудно проверить, что при достаточно малых $y = (y_1, y_2)$ оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2},$$

где $H = -1 - y_1 t(s)$, а $t(s) \in C^\infty(\gamma)$. Обозначим через Δ_y двумерный оператор Лапласа в переменных y . Тогда

$$\Delta = \Delta_y - \sum_{i=0}^{\infty} b_i(s) y_1^i \frac{\partial}{\partial y_1} - \sum_{i=1}^{\infty} h_{i-1}(s) y_1^{i-1} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \sum_{i=0}^{\infty} p_{i+1}(s) y_1^{i+1} \frac{\partial}{\partial s}, \quad (2.1)$$

где b_i, h_q, p_m – некоторые функции из $C^\infty(\gamma)$.

Пусть (r, φ) – полярные координаты, соответствующие декартовым координатам (y_1, y_2) . Обозначим через $Y_i(y), X_i(y)$ однородные гармонические полиномы вида

$$Y_i(y) = r^i \sin(i\varphi), \quad X_i(y) = r^i \cos(i\varphi),$$

где $i \geq 0$ целые, а $P_j^{(q)}(y; s), Q_j^{(q)}(y; s), P_{j,1}^{(q)}(y; s)$ – однородные полиномы степени j по переменной y с коэффициентами, зависящими от s .

ЛЕММА 2.1. Пусть функция $d(s) \in C^\infty(\gamma)$, μ – произвольное действительное число, $k > 0$ – целое число. Тогда существует ряд

$$G^{(k)}(y; s) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(y; s), \quad (2.2)$$

$$g_0(y; s) = d(s)r^{-k} \sin(k\varphi),$$

$$g_1(y; s) = \frac{1}{4}d(s)b_0(s)r^{-2k}Y_{k+1}, \quad (2.3)$$

$$g_2(y; s) = \frac{1}{2} \left(\frac{d(s)b_0^2(s)}{4} - \frac{d(s)b_1(s)}{2} + h_0(s)d''(s) - \mu d(s) \right) Y_1 \ln r - \frac{d(s)}{8} \left(\frac{b_0^2(s)}{4} - \frac{b_1(s)}{2} \right) r^{-2} Y_3 \quad \text{при } k=1, \quad (2.4)$$

$$g_n(y; s) = \sum_{j=0}^{n-1} A_{n,j}^{(k)}(s) Y_{k+n-2j} r^{-2k+2j}, \quad 2 \leq n \leq k, \quad \text{при } k \neq 1,$$

$$g_{k+i}(y; s) = \sum_{j=0}^{k-1} A_{k+i,j}^{(k)}(s) Y_{2k+i-2j} r^{-2k+2j} + \ln r \sum_{j=0}^{[i/2]} B_{k+i,j}^{(k)}(s) Y_{i-2j} r^{2j} + \sum_{j=1}^{[i/2]} C_{k+i,j}^{(k)}(s) Y_{i-2j} r^{2j}, \quad i \geq 1,$$

где $A_{m,q}^{(l)}, B_{m,q}^{(l)}, C_{m,q}^{(l)} \in C^\infty(\gamma)$, а $b_q(s), h_q(s)$ – коэффициенты в (2.1), который при $r \rightarrow 0$ является решением уравнения

$$(\Delta + \mu)g = 0. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $r \rightarrow 0$ решение уравнения (2.5) будем искать в виде (2.2). Подставляя (2.2) в (2.5), учитывая (2.1) и выписывая отдельно равенства при одинаковых степенях r , получаем рекуррентную систему уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_y g_0 &= 0, \\ \Delta_y g_n &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i(s) y_1^i \frac{\partial g_{n-i-1}}{\partial y_1} + \sum_{i=1}^{n-1} h_{i-1}(s) y_1^{i-1} \frac{\partial^2 g_{n-i-1}}{\partial s^2} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-3} p_{i+1}(s) y_1^{i+1} \frac{\partial g_{n-i-3}}{\partial s} - \mu g_{n-2}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Непосредственными вычислениями легко проверить следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 \Delta_y(Z_j(y) \ln r) &= 2r^{-2}jZ_j(y), \quad \Delta_y(r^\alpha Z_j(y)) = \alpha(\alpha + 2j)r^{\alpha-2}Z_j(y), \\
 \Delta_y(r^\alpha Z_j(y) \ln r) &= r^{\alpha-2}Z_j(y)(\alpha(\alpha + 2j) \ln r + 2(j + \alpha)), \\
 \frac{\partial \ln r}{\partial y_1} &= r^{-2}X_1, \quad \frac{\partial(r^i Y_j)}{\partial y_1} = \frac{i}{2}(r^i Y_{j-1} + r^{i-2}Y_{j+1}) + jr^i Y_{j-1}, \\
 y_1^{2m} &= \sum_{j=0}^m l_j^{(2m)} r^{2(m-j)} X_{2j}(y), \\
 y_1^{2m-1} &= \sum_{j=1}^m l_j^{(2m-1)} r^{2(m-j)} X_{2j-1}(y), \\
 X_n Y_j &= \frac{1}{2}(Y_{n+j} + r^{2n}Y_{j-n}), \quad j \geq n, \\
 X_n Y_j &= \frac{1}{2}(Y_{n+j} - r^{2j}Y_{n-j}), \quad n > j,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $Z_k(y)$ – однородный гармонический полином степени k , а $l_i^{(q)}$ – некоторые постоянные. Первое из уравнений (2.6) выполнено согласно выбору функции $g_0(y; s)$. Формулы (2.3), (2.4) выводятся непосредственно из соотношений (2.6), (2.7). Формулы для остальных $g_i(y; s)$ доказываются индукцией с использованием равенств (2.6), (2.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из явного вида формул для g_i следует, что $g_i(y_1, 0; s) = 0$.

Пусть ψ_0 – нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция краевой задачи (1.1). В силу (2.1) и граничного условия в (1.1) имеет место представление

$$\psi_0(x(y; s)) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(0)}(y; s), \quad y \rightarrow 0, \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}
 P_1^{(0)}(y; s) &= \alpha_1(s)r \sin \varphi, \quad P_2^{(0)}(y; s) = \alpha_2(s)r^2 \sin 2\varphi, \\
 P_3^{(0)}(y; s) &= \alpha_3(s)r^3 \sin \varphi + D_1^{(0)}(s)r^3 \sin 3\varphi, \\
 \alpha_1(s) &= \frac{\partial \psi_0(x(s))}{\partial \tau}, \quad \alpha_3(s) = \frac{1}{8}(2\alpha_2 b_0(s) + h_0(s)\alpha_1''(s) - \lambda_0 \alpha_1(s)),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$\alpha_2(s), D_1^{(0)}(s)$ – некоторые функции, зависящие от γ и Ω .

ЛЕММА 2.2. Пусть функция $d(s) \in C^\infty(\gamma)$. Существуют постоянная Λ , определяемая равенством

$$\Lambda = -\pi \int_{\gamma} \alpha_1(s) d(s) ds, \tag{2.10}$$

и функция $\Psi(x; d(s)) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \gamma)$, являющаяся решением краевой задачи

$$-\Delta \Psi = \lambda_0 \Psi + \Lambda \psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \Psi = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \gamma, \tag{2.11}$$

и имеющая при $r \rightarrow 0$ дифференцируемую асимптотику

$$\begin{aligned} \Psi(x; d(s)) &= d(s)r^{-1} \sin \varphi + r^{-2} P_2^{(2)}(y; d(s)) + r^{-2} P_3^{(2)}(y; d(s)) \\ &\quad + P_{1,1}^{(2)}(y; d(s)) \ln r + O(r^2 \ln r), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} P_2^{(2)}(y; d(s)) &= \frac{1}{4} d(s) b_0(s) Y_2, \\ P_3^{(2)}(y; d(s)) &= -\frac{1}{8} \left(\frac{d(s) b_0^2(s)}{4} + \frac{d(s) b_1(s)}{2} \right) Y_3 + D_1^{(1)}(s) r^2 Y_1, \\ P_{1,1}^{(2)}(y; d(s)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{d(s) b_0^2(s)}{4} - \frac{d(s) b_1(s)}{2} + h_0(s) d''(s) - \lambda_0 d(s) \right) Y_1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $D_1^{(1)}(s) \in C^\infty(\gamma)$ – функция, зависящая от γ и Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$, а σ – достаточно малое фиксированное положительное число. Будем искать функцию $\Psi(x; d(s))$ в виде

$$\Psi(x; d(s)) = g_N(x) = \chi(r\sigma^{-1}) \hat{G}_N^{(1)}(x) + \tilde{g}_N(x), \quad (2.14)$$

где $\hat{G}_N^{(1)}(x)$ – N -я частичная сумма ряда (2.2) при $k = 1$, удовлетворяющая лемме 2.1 с $\mu = \lambda_0$, а $\tilde{g}_N(x)$ – некоторая достаточно гладкая функция. Заметим, что в силу леммы 2.1 (см. замечание 2.1) функция $\chi(r\sigma^{-1}) \hat{G}_N^{(1)}(x)$ обращается в нуль на $\Gamma \setminus \gamma$. Тогда для $\tilde{g}_N(x)$ получаем краевую задачу

$$-\Delta \tilde{g}_N = \lambda_0 \tilde{g}_N + \Lambda(N) \psi_0 + F_N^1, \quad x \in \Omega, \quad \tilde{g}_N = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2.15)$$

$$F_N^1 = \Delta \chi \hat{G}_N^{(1)} + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{G}_N^{(1)}}{\partial x_i} + \chi(\Delta + \lambda_0) \hat{G}_N^{(1)}. \quad (2.16)$$

В силу (2.6)

$$\Delta \hat{G}_N^{(1)} = \sum_{j=0}^N y_1^{N-j} \phi_j^{(1)} \frac{\partial g_j}{\partial y_1} + \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^{N-i-1} y_1^{N-j-1} \phi_j^{(i+2)} \frac{\partial^{2-i} g_j}{\partial s^{2-i}}, \quad (2.17)$$

где $\phi_q^{(m)}(s, y) \in C^\infty(\gamma)$. Первые два слагаемых в сумме (2.16) принадлежат классу $C^\infty(\overline{\Omega})$, так как $\Delta \hat{G}_N^{(1)} \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \gamma)$, а носители функций $\Delta(\chi(r\sigma^{-1}))$, $\partial \chi(r\sigma^{-1})/\partial x_i$ отделены от γ . Далее, в силу выражений для $g_i(y; s)$ из леммы 2.1 и (2.17) вытекает, что

$$(\Delta + \lambda_0) \hat{G}_N^{(1)} = O(r^{N-2} \ln r) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Следовательно, $F_N \in C^{N-3}(\overline{\Omega})$. Так как λ_0 – собственное значение предельной задачи, то равенство $(F_N^1 + \Lambda(N) \psi_0, \psi_0)_\Omega = 0$ является необходимым и достаточным условием разрешимости (2.15), т.е.

$$\Lambda(N) = - \int_{\Omega} F_N^1 \psi_0 \, dx.$$

При таком выборе $\Lambda(N)$ краевая задача (2.15) разрешима, причем $\tilde{g}_N \in C^{N-1}(\bar{\Omega})$. Раскладывая функцию $\tilde{g}_N$ по формуле Тейлора и учитывая, что $\tilde{g}_N = 0$ на Γ , получаем

$$\tilde{g}_N(x) = \sum_{j=1}^{N-2} Q_j^{(1)}(y; s) + O(r^{N-1}), \quad (2.18)$$

$Q_1^{(1)}(y; s) = D_1^{(1)}(s)Y_1(y)$, $D_1^{(1)}(s) \in C^{N-2}(\gamma)$ – некоторые функции, зависящие от γ и Ω . Заметим, что решение (2.15) определено с точностью до собственной функции ψ_0 . Поэтому для определенности положим

$$(g_N, \psi_0)_\Omega = 0. \quad (2.19)$$

Покажем, что функция $g_N(x)$ не зависит от N . Пусть $N_1 \geq N \geq 4$. Тогда очевидно, что $\tilde{g}_{N_1}(x) - \tilde{g}_N(x) \in C^3(\bar{\Omega})$. Функция $\chi(r\sigma^{-1})(\hat{G}_{N_1}^{(1)}(x) - \hat{G}_N^{(1)}(x))$ принадлежит классу $C^N(\bar{\Omega})$ в силу (2.2) и леммы 2.1. Таким образом, мы получили, что разность $g_{N, N_1} = g_{N_1}(x) - g_N(x) \in C^3(\bar{\Omega})$. Так как каждая из функций g_{N_1} и g_N удовлетворяет (2.11), то g_{N, N_1} является решением этой краевой задачи с $\Lambda = \Lambda(N_1) - \Lambda(N)$ и, значит, g_{N, N_1} является собственной функцией. Но в силу нормировки (2.19) получаем, что $g_{N_1} = g_N$. То есть g_N не зависит от N . Из (2.14) и (2.18) в силу произвола в выборе N получаем (2.12).

Осталось показать справедливость (2.10). Пусть

$$S_\mu^2 = \{x = (y_1, y_2, s) : s \in \gamma, r < \mu\}.$$

Умножим обе части равенства в (2.11) на ψ_0 , возьмем интеграл по $\Omega \setminus S_\mu^2$ от обеих частей. Интегрируя полученное равенство по частям, выводим

$$\Lambda = \int_{\Omega \cap \partial S_\mu^2} \psi_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} dS - \int_{\Omega \cap \partial S_\mu^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \Psi dS.$$

Отсюда, учитывая (2.8), (2.9), (2.12) и переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, получаем (2.10). Лемма доказана.

Аналогично доказательству леммы 2.2, но с заменой ряда $G^{(1)}$ на $G^{(k)}$, доказывается

ЛЕММА 2.3. Пусть функция $d(s) \in C^\infty(\gamma)$, $k > 0$ – целое число. Тогда существует гармоническая в Ω функция $\Psi^{(k)}(x; d(s))$, обращающаяся в нуль на $\Gamma \setminus \gamma$ и имеющая при $r \rightarrow 0$ асимптотическое разложение

$$\Psi^{(k)}(x; d(s)) = G^{(k)}(y; s) + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j^{(k)}(y; s), \quad (2.20)$$

где $Q_1^{(k)}(y; s) = D_1^{(k)}(s)Y_1(y)$, $D_1^{(k)}(s) \in C^\infty(\gamma)$ – функции, зависящие от γ и Ω , а ряд $G^{(k)}(y; s)$ удовлетворяет утверждению леммы 2.1 с $\mu = 0$.

3. Построение формальных асимптотик методом согласования асимптотических разложений. Так как ψ_0 , очевидно, не удовлетворяет граничному условию Неймана на γ_ε , то в окрестности γ_ε введем внутреннее разложение, зависящее от ε и переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_i = y_i \varepsilon^{-1}$. Пусть $\rho = |\xi|$. Перепишывая (2.8) в переменных ξ , получаем

$$\psi_0(x) = \sum_{j=1}^3 \varepsilon^j P_j^{(0)}(\xi; s) + O(\varepsilon^4 \rho^4), \quad \varepsilon \rho \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

В [12] доказано, что $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений [1] и учитывая (3.1), приближенное значение собственной функции ψ_ε в малой окрестности кривой γ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) &\approx \varepsilon v_1(\xi; s), \\ v_1(\xi; s) &= P_1^{(0)}(\xi; s)(1 + o(1)), \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя (2.1), (3.2) в (1.2), переходя в полученном равенстве к переменным ξ и выписывая коэффициенты при минимальной степени ε (а, именно, при ε^{-1}), получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta_\xi v_1 = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad v_1 = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\xi: \xi_1 < f_1(s), \xi_2 = 0\} \cup \{\xi: \xi_1 > f_2(s), \xi_2 = 0\}, \\ \gamma_1 &= \{\xi: f_1(s) < \xi_1 < f_2(s), \xi_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Пусть $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$, где i – мнимая единица. Легко видеть, что функция

$$v_1(\xi; s) = \alpha_1(s) \operatorname{Im} \sqrt{(\zeta - f_1(s))(\zeta - f_2(s))} \quad (3.4)$$

удовлетворяет (3.3) и имеет на бесконечности асимптотику

$$v_1(\xi; s) = P_1^{(0)}(\xi; s) + \sum_{j=1}^5 \beta_j(s) \rho^{-j} \sin(j\varphi) + O(\rho^{-6}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

где $\beta_j(s) \in C^\infty(\gamma)$ – некоторые явно вычисляемые функции и, в частности,

$$\begin{aligned} \beta_1(s) &= \frac{\alpha_1(s)}{8} (f_2(s) - f_1(s))^2, \quad \beta_2(s) = \frac{\beta_1(s)}{2} (f_2(s) + f_1(s)), \\ \beta_3(s) &= \frac{\beta_1(s)}{16} (5f_1^2(s) + 5f_2^2(s) + 6f_1(s)f_2(s)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Перепишывая асимптотику εv_1 (см. (3.5)) при $\rho \rightarrow \infty$ в переменных x получаем, что при $r\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \varepsilon v_1(\xi; s) = P_1^{(0)}(y; s) + \sum_{j=1}^5 \varepsilon^{j+1} \beta_j(s) r^{-j} \sin(j\varphi) + O(\varepsilon^7 r^{-6}).$$

Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений, будем искать собственную функцию вне малой окрестности кривой γ в виде

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \widehat{\psi}_{\varepsilon,6}(x) = \psi_0(x) + \sum_{i=2}^6 \varepsilon^i \psi_i(x), \quad (3.7)$$

$$\psi_{j+1}(x) = \beta_j(s) r^{-j} \sin(j\varphi)(1 + o(1)), \quad r \rightarrow 0,$$

а собственное значение λ_ε в виде

$$\lambda_\varepsilon \approx \hat{\lambda}_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) и (3.7) в (1.2), приравнивая коэффициенты при степенях ε^m , $m \leq 2$, и переходя к пределу в описании Γ_ε , получаем краевую задачу (1.1) и краевую задачу

$$-\Delta \psi_2 = \lambda_0 \psi_2 + \lambda_2 \psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_2 = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \gamma. \quad (3.9)$$

Из леммы 2.2, (2.9) и (3.6) следует, что $\psi_2(x) = \Psi(x; \beta_1(s))$ является решением краевой задачи (3.9) при

$$\lambda_2 = -\frac{\pi}{8} \int_\gamma \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} \right)^2 (f_2 - f_1)^2 ds \quad (3.10)$$

и имеет асимптотику

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \beta_1 r^{-1} \sin \varphi + r^{-2} P_2^{(2)}(y; \beta_1(s)) + r^{-2} P_3^{(2)}(y; \beta_1(s)) \\ &\quad + P_{1,1}^{(2)}(y; \beta_1(s)) \ln r + O(r^2 \ln r), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где полиномы $P_j^{(2)}$, $P_{1,1}^{(2)}$ определяются в (2.13).

Положим

$$\begin{aligned} \psi_3(x) &= \Psi^{(2)}(x; \beta_2(s)) + \Psi^{(1)}(x; \delta^1(s)), \\ \psi_4(x) &= \Psi^{(3)}(x; \beta_3(s)) + \Psi^{(2)}(x; \delta^2(s)), \\ \psi_q &= \Psi^{(q-1)}(x; \beta_{q-1}(s)) \quad \text{при } q = 5, 6, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\delta^1(s)$, $\delta^2(s)$ – произвольные функции, которые будут определены ниже. Из (3.12), (2.20) и леммы 2.1 следует

$$\begin{aligned} \psi_3(x) &= \beta_2(s) r^{-2} \sin 2\varphi + r^{-4} P_3^{(3)}(y; s) + \delta^1(s) r^{-1} \sin \varphi + O(1), \\ \psi_4(x) &= \beta_3(s) r^{-3} \sin 3\varphi + r^{-6} P_4^{(4)}(y; s) + \delta^2(s) r^{-2} \sin 2\varphi + O(r^{-1}), \\ \psi_5(x) &= \beta_4(s) r^{-4} \sin 4\varphi + O(r^{-3}), \\ \psi_6(x) &= \beta_5(s) r^{-5} \sin 5\varphi + O(r^{-4}), \\ P_3^{(3)}(y; s) &= \frac{1}{4} \beta_2(s) b_0(s) Y_3, \quad P_4^{(4)}(y; s) = \frac{1}{4} \beta_3(s) b_0(s) Y_4. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя (3.1), (3.11) и (3.13) в (3.7), переходя в главных членах асимптотик полученного равенства к переменным ξ и группируя коэффициенты при одинаковых степенях ε и $\ln \varepsilon$, выводим

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) \approx \widehat{\psi}_{\varepsilon,6}(x) &= \varepsilon V_1(\xi; s) + \varepsilon^2 \left(V_2(\xi; s) + \sum_{j=1}^2 \delta^j(s) \rho^{-j} \sin(j\varphi) \right) \\ &+ \varepsilon^3 V_3(\xi; s) + \varepsilon^3 \ln \varepsilon V_{3,1}(\xi; s) \\ &+ O(r^4 + \varepsilon^2 r^2 |\ln r| + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 r^{-1} + \varepsilon^5 r^{-3} + \varepsilon^6 r^{-4}), \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} V_1(\xi; s) &= P_1^{(0)}(\xi; s) + \sum_{j=1}^5 \beta_j(s) \rho^{-j} \sin(j\varphi), \\ V_2(\xi; s) &= P_2^{(0)}(\xi; s) + \sum_{j=1}^3 \rho^{-2j} P_{j+1}^{(j+1)}(\xi; s), \\ V_3(\xi; s) &= P_3^{(0)}(\xi; s) + \rho^{-2} P_3^{(2)}(\xi; s) + P_{1,1}^{(2)}(\xi; s) \ln \rho, \\ V_{3,1}(\xi; s) &= P_{1,1}^{(2)}(\xi; s). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Следуя методу согласования асимптотических разложений, собственную функцию в малой окрестности кривой γ будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \widehat{v}_\varepsilon(\xi; s) = \sum_{j=1}^3 \varepsilon^j v_j(\xi; s) + \varepsilon^3 \ln \varepsilon v_{3,1}(\xi; s), \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} v_1(\xi; s) &= V_1(\xi; s) + O(\rho^{-6}), \\ v_2(\xi; s) &= V_2(\xi; s) + \sum_{j=1}^2 \delta^j(s) \rho^{-j} \sin(j\varphi) + O(\rho^{-3}), \\ v_3(\xi; s) &= V_3(\xi; s) + O(1), \quad v_{3,1}(\xi; s) = V_{3,1}(\xi; s) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставляя (2.1), (3.16) в (1.2), переходя в полученном равенстве к переменным ξ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и $\ln \varepsilon$ (до $\varepsilon \ln \varepsilon$ включительно), получаем краевую задачу (3.3) для v_1 и следующие краевые задачи:

$$\Delta_\xi v_2 = b_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0, \quad v_2 = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_3 &= b_1 \xi_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + b_0 \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} + h_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} - \lambda_0 v_1, \quad \xi_2 > 0, \\ v_3 &= 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_3}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\Delta_\xi v_{3,1} = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad v_{3,1} = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_{3,1}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1. \quad (3.20)$$

Заметим, что функция v_1 , определяемая равенством (3.4), удовлетворяет краевой задаче (3.3), а функция $v_{3,1}$, определяемая равенством

$$v_{3,1} = a_1(s) \operatorname{Im} \sqrt{(\zeta - f_1)(\zeta - f_2)},$$

где

$$a_1(s) = \frac{1}{2} \left(\beta_1 \frac{b_0^2}{4} - \beta_1 \frac{b_1}{2} - \lambda_0 \beta_1 + h_0 \beta_1'' \right),$$

удовлетворяет краевой задаче (3.20) и они имеют на бесконечности асимптотики (3.17).

Положим

$$\Pi = C^\infty(\{\xi: \xi_2 \geq 0, \xi \neq (f_1(s), 0), \xi \neq (f_2(s), 0)\}) \cap W_2^1 \left(\left\{ \xi: \left| \xi - \frac{(f_1(s) + f_2(s))}{2} \right| < f_2(s) - f_1(s), \xi_2 > 0 \right\} \right).$$

Легко видеть, что v_1 и $v_{3,1}$ принадлежат Π . Непосредственно проверяется, что функция

$$v_2 = \frac{b_0}{2} \xi_1 v_1 + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1 b_0}{4} \right) \operatorname{Im} \left(\left(\zeta + \frac{f_2 + f_1}{2} \right) \sqrt{(\zeta - f_1)(\zeta - f_2)} \right) \quad (3.21)$$

является решением краевой задачи (3.18), принадлежит Π и имеет на бесконечности асимптотику

$$v_2(\xi; s) = V_2(\xi; s) + \sum_{j=1}^2 \delta_j(s) \rho^{-j} \sin(j\varphi) + O(\rho^{-3}), \quad \rho \rightarrow \infty,$$

где $\delta_j(s)$ – некоторые явно вычисляемые функции.

Положив $\delta^j(s) = \delta_j(s)$ в (3.12), окончательно определим функции ψ_3, ψ_4 .

ЛЕММА 3.1. *Существует решение краевой задачи (3.19) из Π , имеющее на бесконечности асимптотику (3.17).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно рассмотрим краевую задачу

$$\Delta_\xi v_3^{(1)} = v_1, \quad \xi_2 > 0, \quad v_3^{(1)} = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1. \quad (3.22)$$

Принимая во внимание (3.4) и (3.6), получаем, что функция

$$\begin{aligned} v_3^{(1)} &= \frac{\alpha_1}{4} \operatorname{Im} \left(\bar{\zeta} \int_{f_2}^{\zeta} \sqrt{(z - f_1)(z - f_2)} dz \right) \\ &\quad + \frac{\beta_1}{4} \operatorname{Im} \left(\zeta \ln \left(\frac{2}{f_2 - f_1} \left(\zeta - \frac{f_1 + f_2}{2} + \sqrt{(\zeta - f_1)(\zeta - f_2)} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

является решением краевой задачи (3.22), принадлежит Π и имеет асимптотику

$$v_3^{(1)} = \frac{\alpha_1}{8} \rho^3 \sin \varphi + \frac{\beta_1}{2} \xi_2 \ln \rho + \phi_1(s) \xi_2 + O(1), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

где $\phi_1(s) \in C^\infty(\gamma)$ – явно вычисляемая функция.

Далее получаем, что в силу (3.23) и (3.24) функция

$$\begin{aligned} v_3^{(2)} = & \frac{\partial^2 v_3^{(1)}}{\partial s^2} + a_1^{(1)} \operatorname{Im} \sqrt{\frac{\zeta - f_2}{\zeta - f_1}} + a_2^{(1)} \operatorname{Im} \sqrt{\left(\frac{\zeta - f_2}{\zeta - f_1}\right)^3} \\ & + a_1^{(2)} \operatorname{Im} \sqrt{\frac{\zeta - f_1}{\zeta - f_2}} + a_2^{(2)} \operatorname{Im} \sqrt{\left(\frac{\zeta - f_1}{\zeta - f_2}\right)^3}, \end{aligned}$$

где $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_2^{(2)}$ – некоторые явно вычисляемые функции, принадлежит Π , а в силу (3.22) эта функция является решением краевой задачи

$$\Delta_\xi v_3^{(2)} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2}, \quad \xi_2 > 0, \quad v_3^{(2)} = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1. \quad (3.25)$$

Непосредственно проверяется, что функция

$$v_3^{(3)} = \frac{b_0}{2} \xi_1 v_2 - \frac{b_0^2}{8} \xi_1^2 v_1 + \frac{b_1}{4} \xi_1^2 v_1$$

принадлежит Π , является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_3^{(3)} &= b_1 \xi_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + b_0 \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} + \left(\frac{b_1}{2} - \frac{b_0^2}{4} \right) v_1, \quad \xi_2 > 0, \\ v_3^{(3)} &= 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_3^{(3)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1, \end{aligned} \quad (3.26)$$

и имеет асимптотику

$$\begin{aligned} v_3^{(3)} &= \left(\frac{b_0 \alpha_2}{4} + \frac{\alpha_1}{4} \left(\frac{b_1}{4} - \frac{b_0^2}{8} \right) \right) \rho^3 (\sin \varphi + \sin 3\varphi) \\ &+ \frac{\beta_1}{16} \left(\frac{b_0^2}{2} + b_1 \right) \rho (\sin \varphi + \sin 3\varphi) + O(1), \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В силу краевых задач (3.22), (3.25), (3.26) функция

$$\begin{aligned} v_3 = & v_3^{(3)} - \left(-\frac{b_0^2}{4} + \frac{b_1}{2} + \lambda_0 \right) v_3^{(1)} + h_0 v_3^{(2)} \\ & + \operatorname{Im} \left(\left(A_1(s) \zeta^2 + A_1(s) \frac{f_2 + f_1}{2} \zeta + A_2(s) \right) \sqrt{(\zeta - f_1)(\zeta - f_2)} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 = & D_1^{(0)} - \frac{b_0 \alpha_2}{4} - \frac{\alpha_1}{4} \left(\frac{b_1}{4} - \frac{b_0^2}{8} \right), \quad A_2 = D_1^{(1)} + \left(-\frac{b_0^2}{4} + \frac{b_1}{2} + \lambda_0 \right) \phi_1 \\ & - h_0 \phi_1'' - \frac{\beta_1}{16} \left(\frac{b_0^2}{2} + b_1 \right) + A_1 \frac{3f_1^2 + 3f_2^2 + 2f_1 f_2}{8} \end{aligned}$$

является решением краевой задачи (3.19). Из (3.24), (3.27), (3.28) следует, что v_3 принадлежит Π и имеет асимптотику (3.17). Лемма доказана.

Подставляя (3.17) в (3.16) и группируя коэффициенты при одинаковых степенях ε и $\ln \varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{v}_\varepsilon(\xi; s) = & \varepsilon V_1(\xi; s) + \varepsilon^2 \left(V_2(\xi; s) + \sum_{j=1}^2 \delta_j(s) \rho^{-j} \sin(j\varphi) \right) \\ & + \varepsilon^3 V_3(\xi; s) + \varepsilon^3 \ln \varepsilon V_{3,1}(\xi; s) + O(\varepsilon \rho^{-6} + \varepsilon^2 \rho^{-3} + \varepsilon^3 + \rho^{-1} \varepsilon^3 \ln \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} (\Delta - 1)\phi = & -(1 - \chi(rt\varepsilon^{-\alpha})) \left(\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial \hat{v}_\varepsilon}{\partial s} \right) - \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} \right), \quad x \in \Omega, \\ \phi = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $2/3 < \alpha < 5/7$, t – произвольная постоянная. Решение этой краевой задачи будем рассматривать в смысле теории распределений [13], т.е. под решением будем понимать функцию $\phi \in W_2^1(\Omega)$, равную нулю на Γ_ε , удовлетворяющую интегральному равенству

$$-(\nabla \phi, \nabla \eta) - (\phi, \eta) = \left(\frac{1 - \chi}{H} \frac{\partial \hat{v}_\varepsilon}{\partial s}, \frac{1}{H} \frac{\partial \eta}{\partial s} \right) - \left((1 - \chi) \frac{\partial v_1}{\partial s}, \frac{\partial \eta}{\partial s} \right) \quad (3.31)$$

при любом $\eta \in W_2^1(\Omega)$, равном нулю на Γ_ε . Здесь и всюду далее $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ – нормы в $L_2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно. Из (3.31) легко выводится следующая оценка:

$$\|\phi\|_1 \leq C \left(\left\| (1 - \chi) \frac{\partial \hat{v}_\varepsilon}{\partial s} \right\|_0 + \left\| (1 - \chi) \frac{\partial v_1}{\partial s} \right\|_0 \right), \quad (3.32)$$

где постоянная C не зависит от ε и η . Из данной оценки следует существование и единственность решения краевой задачи (3.30). Кроме того, на основе теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач устанавливается принадлежность

$$\phi \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \partial\gamma_\varepsilon).$$

Из (3.32), (3.29), (3.15) следует, в частности, что

$$\|\phi\|_0 = o(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.33)$$

Обозначим

$$\hat{\psi}_\varepsilon(x) = \chi(rt\varepsilon^{-\alpha}) \hat{\psi}_{\varepsilon,6}(x) + (1 - \chi(rt\varepsilon^{-\alpha})) \hat{v}_\varepsilon(y\varepsilon^{-1}; s) + \phi(x, \varepsilon),$$

где $2/3 < \alpha < 5/7$, $t > 0$ – произвольная фиксированная постоянная.

ТЕОРЕМА 3.1. *Функция $\hat{\psi}_\varepsilon$ принадлежит $W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \partial\gamma_\varepsilon)$ и является решением краевой задачи*

$$-(\Delta + \hat{\lambda}_\varepsilon)\hat{\psi}_\varepsilon = \hat{f}_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \hat{\psi}_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \hat{\psi}_\varepsilon}{\partial \tau} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad (3.34)$$

где $\|\hat{f}_\varepsilon\|_0 = o(\varepsilon^2)$, $\|\hat{\psi}_\varepsilon\|_0 = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.1), (3.30) и лемм 2.3–3.2 функция $\hat{\psi}_\varepsilon \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \partial\gamma_\varepsilon)$ и является решением краевой задачи (3.34) при

$$\hat{f}_\varepsilon = - \sum_{j=1}^4 f_{\varepsilon,j}(x),$$

где

$$f_{\varepsilon,1}(x) = \Delta \chi(rt\varepsilon^{-\alpha})(\hat{\psi}_{\varepsilon,6} - \hat{v}_\varepsilon) + 2 \sum_{j=1}^3 \chi(rt\varepsilon^{-\alpha})_{x_j}(\hat{\psi}_{\varepsilon,6} - \hat{v}_\varepsilon)_{x_j},$$

$$f_{\varepsilon,2}(x) = \chi(rt\varepsilon^{-\alpha}) \left(\lambda_0 \sum_{n=3}^6 \varepsilon^n \psi_n + \lambda_2 \sum_{n=2}^4 \varepsilon^{n+2} \psi_n \right),$$

$$f_{\varepsilon,3}(x) = (\hat{\lambda}_\varepsilon + 1)\phi,$$

$$f_{\varepsilon,4}(x) = (1 - \chi(rt\varepsilon^{-\alpha})) \left(\sum_{j=1}^3 \varepsilon^2 \xi_1^{3-j} \delta_j^{(1)}(\xi_1, s, \varepsilon) \frac{\partial v_j}{\partial \xi_1} \varepsilon^2 \ln \varepsilon \delta_4^{(1)}(\xi_1, s, \varepsilon) \frac{\partial v_{3,1}}{\partial \xi_1} + \lambda_0 \sum_{j=2}^3 \varepsilon^j v_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^3 \varepsilon^{j+2} v_j + \varepsilon^3 \ln \varepsilon \lambda_0 v_{3,1} + \varepsilon^5 \ln \varepsilon \lambda_2 v_{3,1} \right),$$

$\delta_j^{(k)}$ – ограниченные при $\rho < t\varepsilon^{\alpha-1}$ функции. В силу (3.17) функция $f_{\varepsilon,4} = O(\varepsilon^2 \rho^2)$ при $\rho \rightarrow \infty$. Так как $\text{supp } f_{\varepsilon,4} \subset \Omega \cap S_{t^{-1}\varepsilon^\alpha}^2$, то $\|f_{\varepsilon,4}\|_0^2 = O(\varepsilon^{6\alpha})$. Из (3.14) и (3.29) следует, что при $t^{-1}\varepsilon^\alpha < r < 2t^{-1}\varepsilon^\alpha$ имеет место оценка $f_{\varepsilon,1} = O(\varepsilon^{2\alpha} + \varepsilon^{7-8\alpha})$. Так как $\text{supp } f_{\varepsilon,1} \subset S_{2t^{-1}\varepsilon^\alpha}^2 \setminus S_{\varepsilon^\alpha}^2$, то $\|f_{\varepsilon,1}\|_0^2 = O(\varepsilon^{-14\alpha+14} + \varepsilon^{6\alpha})$. Из (2.8), (3.11), (3.13) следует, что $f_{\varepsilon,2} = O(\varepsilon^3 r^{-2})$ при $r \rightarrow 0$. Так как $\text{supp } f_{\varepsilon,2} \subset \Omega \setminus S_{2t^{-1}\varepsilon^\alpha}^2$, то $\|f_{\varepsilon,2}\|_0^2 = O(\varepsilon^{6-2\alpha})$. Из (3.33) следует, что $\|f_{\varepsilon,3}\|_0 = o(\varepsilon^2)$. Из оценок для $f_{\varepsilon,j}$ получаем, что $\|\hat{f}_\varepsilon\|_0^2 = o(\varepsilon^4)$ при $2/3 < \alpha < 5/7$. Аналогично оценкам для $f_{\varepsilon,2}$, $f_{\varepsilon,3}$ получаем, что $\|\hat{\psi}_\varepsilon\|_0 = 1 + o(1)$ при $0 < \alpha < 1$. Теорема доказана.

4. Обоснование асимптотик. В [12] было доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. *Пусть K – произвольный компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащий собственных значений (1.1), $f \in L_2(\Omega)$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$, любом $\lambda \in K$ существует единственное решение u_ε краевой задачи*

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau} = 0 \quad \text{на } \gamma_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon \quad (4.1)$$

и справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C \|f\|_0. \quad (4.2)$$

Для строгого обоснования асимптотик нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 4.2. Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной задачи (1.1). Тогда

а) для нормированных в $L_2(\Omega)$ собственных функций имеет место сходимость $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ в $W_2^1(\Omega)$;

б) при λ , близких к λ_0 , для решений краевой задачи (4.1) справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq \frac{C}{|\lambda_\varepsilon - \lambda|} \|f\|_0. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что в силу (1.1), (1.2) для собственных функций ψ_ε, ψ_0 справедливы равенства

$$\|\nabla \psi_\varepsilon\|_0^2 = \lambda_\varepsilon \|\psi_\varepsilon\|_0^2, \quad \|\nabla \psi_0\|_0^2 = \lambda_0 \|\psi_0\|_0^2.$$

Из леммы 1.1 следует, что сходятся правые части последних равенств, а значит,

$$\|\psi_\varepsilon\|_1 \rightarrow \|\psi_0\|_1. \quad (4.4)$$

Из (4.4) и слабой сходимости ψ_ε в норме $W_2^1(\Omega)$ следует сильная сходимость в этой норме.

Обозначим через $S(t, z)$ открытый круг на комплексной плоскости радиуса t с центром в точке z . В силу лемм 1.1 и 4.1 существует достаточно малое t такое, что при $\lambda \in \overline{S(t, \lambda_0)}$ справедливо представление

$$u_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda} \int_\Omega \psi_\varepsilon f \, dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (4.5)$$

где $\tilde{u}_\varepsilon$ – голоморфная по λ функция, ортогональная ψ_ε . Из (4.5) и (4.2) следует справедливость оценки

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 \leq C_1 \|f\|_0 \quad (4.6)$$

при $\lambda \in \partial S(t, \lambda_0)$. А так как $\tilde{u}_\varepsilon$ – голоморфная по λ функция, то эта оценка верна и для $\lambda \in \overline{S(t, \lambda_0)}$. Из (4.6) и представления (4.5) следует (4.3).

ТЕОРЕМА 4.1. Асимптотики собственного значения λ_ε и соответствующей собственной функции ψ_ε имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2 + o(\varepsilon^2), \\ \psi_\varepsilon(x) &= c_\varepsilon^1 (\psi_0(x) + \varepsilon^2 \psi_2(x) + \varepsilon^3 \psi_3(x) + \varepsilon^4 \psi_4(x) + o(\varepsilon^2)) \quad \text{в } \Omega \setminus S_{\varepsilon^2}^\alpha, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = c_\varepsilon^2 (\varepsilon v_1(y; s) + \varepsilon^2 v_2(y; s) + o(\varepsilon^2)) \quad \text{в } \Omega \cap S_{2\varepsilon}^\alpha, \quad (4.8)$$

где коэффициенты определены равенствами (3.4), (3.10), (3.12), (3.21), а скалярные нормирующие множители $|c_\varepsilon^i| \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Равенства (4.7), (4.8) справедливы в норме W_2^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.1 следует, что $\widehat{\psi}_\varepsilon$ является решением краевой задачи (4.1) при $\lambda = \widehat{\lambda}_\varepsilon$, $f = \widehat{f}_\varepsilon$, причем

$$\|\widehat{f}_\varepsilon\|_{0,\Omega} = o(\varepsilon^2), \quad \|\widehat{\psi}_\varepsilon\|_{0,\Omega} = 1 + o(1).$$

Из оценки (4.3) с учетом последних равенств заключаем, что $|\lambda_\varepsilon - \widehat{\lambda}_\varepsilon| = o(\varepsilon^2)$.

Из (4.5) следует, что $\widehat{\psi}_\varepsilon$ может быть представлена в виде

$$\widehat{\psi}_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \widehat{\lambda}_\varepsilon} \int_\Omega \psi_\varepsilon \widehat{f}_\varepsilon dx + \tilde{u}_\varepsilon = \widehat{c}_\varepsilon(t) \psi_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon. \quad (4.9)$$

Из теоремы 3.1 и (4.6) следует, что

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 = o(\varepsilon^2), \quad \|\widehat{\psi}_\varepsilon\|_0 = 1 + o(1).$$

Поскольку $\|\psi_\varepsilon\|_0 = 1$, то отсюда и из (4.9) получаем, что $|\widehat{c}_\varepsilon| \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим $\tilde{\psi}_\varepsilon = \widehat{c}_\varepsilon \psi_\varepsilon$. Так как $\tilde{\psi}_\varepsilon$ – собственная функция, соответствующая λ_ε , и $\|\widehat{\psi}_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon\|_1 = \|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 = o(\varepsilon^2)$, то из сходимости $|\widehat{c}_\varepsilon| \rightarrow 1$ следует, что $\widehat{\psi}_\varepsilon$ – асимптотика собственной функции с точностью до $o(\varepsilon^2)$. Положив $t = 2$, получаем равенство (4.7) с $c_\varepsilon^1 = \widehat{c}_\varepsilon(2)$, а положив $t = 1/2$ получаем (4.8) с $c_\varepsilon^2 = \widehat{c}_\varepsilon(1/2)$. Теорема 4.1 доказана.

Заметим, что область, где справедливо внешнее разложение (4.7), и область, где справедливо внутреннее разложение (4.8), имеют пересечение $\Omega \cap S_{\varepsilon^\alpha}^2 \setminus S_{2\varepsilon^\alpha}^2$ и в этой области справедливо любое из разложений (4.7), (4.8).

5. Примеры и приложения построенных асимптотик. Пусть $\tilde{\omega} \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей, λ_0 – простое собственное значение задачи Дирихле в $\Omega = \tilde{\omega} \times (0, \pi)$. Так как в этом случае

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi(x') \sin(\kappa x_3), \quad (5.1)$$

где $x' = (x_1, x_2)$, $\kappa > 0$ – целое число, Φ – нормированная в $L_2(\tilde{\omega})$ собственная функция задачи Дирихле для $-\Delta$ в $\tilde{\omega}$, соответствующая простому собственному значению $\lambda_0 - \kappa^2$, то, подставляя (5.1) в (3.10), получаем, что

$$\lambda_2 = -\frac{1}{4} \kappa^2 \int_\gamma \Phi^2(x'(s)) (f_2(s) - f_1(s))^2 ds. \quad (5.2)$$

Если $f_1(s) = -1$, $f_2(s) = 1$ (т.е. γ_ε – симметричная полоса), то из (5.2) следует

$$\lambda_2 = -\kappa^2 \int_\gamma \Phi^2(x'(s)) ds.$$

Если $\tilde{\omega}$ – круг радиуса R_1 с центром в начале координат, а γ – окружность радиуса r_1 , то

$$\Phi(x') = \frac{I_0(\nu_j^{(0)} |x'| / R_1)}{\sqrt{\pi} I_0'(\nu_j^{(0)})},$$

где $\nu_j^{(0)}$ – корни функции Бесселя нулевого порядка $I_0(\nu)$. Подставляя это равенство в (5.2) и учитывая, что $y_1 = |x'| - r_1$, получаем

$$\lambda_2 = -\frac{1}{4\pi^2 R_1^2} \left(\frac{\kappa}{I_0'(\nu_j^{(0)})} I_0 \left(\nu_j^{(0)} \frac{r_1}{R_1} \right) \right)^2 \int_{\gamma} (f_2(s) - f_1(s))^2 ds.$$

И, наконец, если к тому же $f_1(s) = -1$, $f_2(s) = 1$, то из последней формулы следует

$$\lambda_2 = -\frac{2r_1}{\pi R_1^2} \left(\frac{\kappa}{I_0'(\nu_j^{(0)})} I_0 \left(\nu_j^{(0)} \frac{r_1}{R_1} \right) \right)^2.$$

Построенные асимптотики позволяют получить оценки для собственных значений лапласиана при других типах сингулярных возмущений.

Будем считать, что собственные значения краевых задач (1.2) и (1.1) занумерованы в порядке неубывания, причем каждое повторяется столько раз, какова его кратность:

$$\lambda_{\varepsilon}^1 \leq \lambda_{\varepsilon}^2 \leq \dots \leq \lambda_{\varepsilon}^k \leq \dots, \quad \lambda_0^1 \leq \lambda_0^2 \leq \dots \leq \lambda_0^k \leq \dots.$$

Соответствующие собственные функции будем предполагать ортонормированными в $L_2(\Omega)$.

Пусть множества $\gamma_{\varepsilon}^1, \gamma_{\varepsilon}^2 \subset \Gamma$, причем

$$\gamma_{\varepsilon}^i = \{(y_1, 0, s) : \varepsilon f_1^i(s) < y_1 < \varepsilon f_2^i(s)\}, \quad i = 1, 2,$$

$f_1^i(s), f_2^i(s) \in C^{\infty}(\gamma)$, $i = 1, 2$. Обозначим через γ_{ε} произвольную область такую, что $\gamma_{\varepsilon}^1 \subset \gamma_{\varepsilon} \subset \gamma_{\varepsilon}^2$. Тогда для λ_{ε}^k верны неравенства

$$\lambda_{\varepsilon,2}^k \leq \lambda_{\varepsilon}^k \leq \lambda_{\varepsilon,1}^k, \quad (5.3)$$

где $\lambda_{\varepsilon,i}^k$, $i = 1, 2$, – собственные значения краевой задачи (1.2) с $\gamma_{\varepsilon} = \gamma_{\varepsilon}^i$, расположенные в порядке неубывания с учетом кратности. Так как $\lambda_{\varepsilon,i}^k \rightarrow \lambda_0^k$, то в силу (5.3) и теоремы 4.1 выполнены оценки

$$M^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \leq \lambda_0 - \lambda_{\varepsilon}^k \leq M^1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

где

$$M^i = -\frac{\pi}{8} \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \psi_0(x(s))}{\partial \tau} \right)^2 (f_2^i(s) - f_1^i(s))^2 ds.$$

Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную краевую задачу:

$$-\Delta \tilde{\psi}_{\varepsilon} = \tilde{\lambda}_{\varepsilon} \tilde{\psi}_{\varepsilon} \quad \text{в } \Omega, \quad \tilde{\psi}_{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{\varepsilon}, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}_{\varepsilon}}{\partial \tau} + \sigma(x) \tilde{\psi}_{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \gamma_{\varepsilon}, \quad (5.4)$$

где $\sigma(x) \in C^{\infty}(\omega)$, $\sigma(x) \geq 0$. Тогда из вариационных свойств собственных значений и собственных функций следует, что

$$\lambda_{\varepsilon}^k \leq \tilde{\lambda}_{\varepsilon}^k \leq \lambda_0^k,$$

где $\tilde{\lambda}_\varepsilon^k$ – собственные значения краевой задачи (5.4), расположенные в порядке неубывания с учетом кратности. Тогда из теоремы 4.1 следует

$$0 \leq \lambda_0^k - \tilde{\lambda}_\varepsilon^k \leq C\varepsilon^2.$$

Заметим, что в [14] рассматривалась задача в цилиндре со сменой типа граничного условия на периодически чередующихся узких полосках, расположенных на боковой поверхности. “Предельным” (усредненным) граничным условием было также условие Дирихле. Существенным отличием настоящей работы от [14] является тот факт, что в [14] асимптотики строились на основе метода составных разложений [15]. В задаче же, рассмотренной в настоящей работе, техника пограничного слоя не дает требуемого ответа. Поэтому необходимым оказалось применение метода согласования асимптотических разложений.

В заключение хотелось бы выразить признательность Р. Р. Гадыльшину и Д. И. Борисову за обсуждение результатов и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [2] Самарский А. А. О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63. С. 631–634.
- [3] Днестровский Ю. Н. Об изменении собственных чисел при изменении границы областей // Вестн. МГУ. 1964. № 9. С. 61–74.
- [4] Ozawa S. Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian // Duke Math. J. 1981. V. 48. P. 767–778.
- [5] Мазья В. Г., Назаров С. П., Пламеневский Б. А. Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
- [6] Гадыльшин Р. Р., Ильин А. М. Асимптотика собственных значений задачи Дирихле в области с узкой щелью // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 4. С. 25–48.
- [7] Ильин А. М., Гадыльшин Р. Р. Ограниче применимости регулярной теории возмущений для мембраны с узкой щелью // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 2. С. 172–175.
- [8] Гадыльшин Р. Р. Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.
- [9] Гадыльшин Р. Р. Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 42–55.
- [10] Гадыльшин Р. Р. О возмущении спектра лапласиана при смене типа граничного условия на малой части границы // ЖВМиМФ. 1996. № 7. С. 77–88.
- [11] Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 3–32.
- [12] Планида М. Ю. О сходимости решений сингулярно возмущенных краевых задач для лапласиана // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 6. С. 867–877.
- [13] Ладженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1977.
- [14] Борисов Д. И. О сингулярно возмущенной краевой задаче для лапласиана в цилиндре // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1071–1078.
- [15] Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.