Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ковалевский, О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из логарифмических классов, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 676–685

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:03:48

УДК 517.9

О СУММИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КЛАССОВ

А. А. Ковалевский

Устанавливается существование принадлежащего некоторому соболевскому пространству слабого решения задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с правой частью из широкого класса функций, определяемого с помощью логарифмической функции.

Библиография: 6 названий.

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) и $p \in (1, n)$. Пусть c_1, c_2 – положительные постоянные, g – неотрицательная функция из $L^{p/(p-1)}(\Omega)$, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, \xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1} + g(x), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i \geq c_2 |\xi|^p. \quad (2)$$

Кроме того, будем считать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \xi')] (\xi_i - \xi'_i) > 0. \quad (3)$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u) &= f \quad \text{в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Изучению разрешимости и свойств решений задачи (4) с f из $L^1(\Omega)$ или из класса ограниченных мер посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1]–[4]).

Далее будем считать, что $f \in L^1(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слабым решением задачи (4) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{W}^{1,1}(\Omega)$ такую, что выполняются условия

- 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

По поводу этого определения см., например, [2].

Положим

$$r = \frac{n(p-1)}{n-1}.$$

В работе [2] показано, что если $p > 2 - 1/n$, то существует слабое решение задачи (4), принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ для любого $\lambda \in [1, r)$. При этом показатель $\lambda = r$, вообще говоря, недостижим. Однако, как установлено в [2], если $p > 2 - 1/n$ и $f \ln(1 + |f|) \in L^1(\Omega)$, то слабое решение задачи (4), принадлежащее $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$, существует. Недавно в статье автора [5] было доказано существование слабого решения задачи (4), принадлежащего $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$, при условиях $p \geq 2 - 1/n$ и

$$f[\ln(1 + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega), \quad (5)$$

где $\sigma \in ((n-1)/n, 1)$. Оказывается, что и этот результат допускает усиление. А именно, для того, чтобы утверждение о существовании слабого решения рассматриваемой задачи, принадлежащего $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$, оставалось в силе, достаточно в условии (5) множитель при f заменить на произведение произвольного конечного числа последовательных суперпозиций логарифмической функции от $|f|$, взятых в степени $(n-1)/n$, и следующей такой суперпозиции в степени $\sigma > (n-1)/n$. Доказательство данного факта является целью настоящей заметки.

Дадим точную формулировку основного результата статьи.

Определим последовательность чисел s_j следующим образом:

$$s_1 = 1, \quad s_j = e^{s_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Пусть теперь для любого $j \in \mathbb{N}$ $b_j: [s_j, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ — функция такая, что

$$b_j(s) = \underbrace{\ln \dots \ln}_{j} s, \quad s \in [s_j, +\infty).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p \geq 2 - 1/n$, и пусть выполняется условие: существуют $m \in \mathbb{N}$ и $\sigma > (n-1)/n$ такие, что

$$f \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + |f|) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega). \quad (6)$$

Тогда существует слабое решение задачи (4), принадлежащее $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$.

Доказательство теоремы 1 будет сведено к применению результатов работы [3] и устанавливаемого в следующем пункте нового результата о суммируемости функций, удовлетворяющих некоторому семейству интегральных неравенств (теорема 2).

2. Суммируемость функций, подчиненных некоторым интегральным неравенствам. Прежде всего заметим, что если $j \in \mathbb{N}$ и $s > s_j$, то $b_j(s) > 0$.

ЛЕММА 1. Пусть u – измеримая функция на Ω . Пусть $M > 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon > 1$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть для любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq M k^{-\tau} \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{-1} [b_{m+1}(k)]^{-\varepsilon}. \quad (7)$$

Тогда $u \in L^\tau(\Omega)$ и имеет место оценка

$$\int_{\Omega} |u|^\tau dx \leq (e s_{m+2})^\tau \text{meas } \Omega + \frac{2^{m+\varepsilon} e^\tau M}{\varepsilon - 1}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся предположением, что $m \geq 2$. Случай $m = 1$ рассматривается аналогично.

Пусть k_0 – натуральное число такое, что $s_{m+1} < k_0 \leq s_{m+1} + 1$. Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, положим

$$\beta_k = \left[k \prod_{j=1}^{m-1} b_j(k) \right]^{-1} [b_m(k)]^{-\varepsilon}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. В силу (7) имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq e^k\} \leq M e^{-\tau k} \beta_k.$$

Тогда

$$\int_{\{e^k \leq |u| < e^{k+1}\}} |u|^\tau dx \leq M e^\tau \beta_k. \quad (9)$$

Теперь, учитывая, что в силу условия $\varepsilon > 1$ имеем

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k \leq \frac{2^{m+\varepsilon}}{\varepsilon - 1} [b_m(k_0)]^{1-\varepsilon},$$

из (9) выводим, что $u \in L^\tau(\Omega)$ и верна оценка

$$\int_{\Omega} |u|^\tau dx \leq e^{\tau k_0} \text{meas } \Omega + \frac{2^{m+\varepsilon} e^\tau M}{\varepsilon - 1} [b_m(k_0)]^{1-\varepsilon}.$$

Отсюда, принимая во внимание выбор числа k_0 , получаем неравенство (8). Лемма доказана.

Положим $p^* = np/(n-p)$. Известно (см., например, [6]), что существует положительная постоянная c_0 , зависящая только от n и p , такая, что для любой функции $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq c_0 \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (10)$$

Пусть для любого $k > 0$ T_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

ЛЕММА 2. Пусть u – функция на Ω . Пусть $k > 0$ и $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда множество $\{|u| \geq k\}$ измеримо и справедливо неравенство

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq (c_0/k)^{p^*} \left(\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \right)^{p^*/p}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Измеримость множества $\{|u| \geq k\}$ следует из равенства $\{|u| \geq k\} = \{|T_k(u)| = k\}$ и измеримости функции $T_k(u)$. В силу того же равенства имеем

$$k^{p^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx.$$

Отсюда и из неравенства (10), примененного к функции $T_k(u)$, выводим (11). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть u – функция на Ω , и пусть для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$. Тогда для любых $N, k, k_1 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \text{meas}\{|\nabla T_N(u)| \geq k\} &\leq (c_0/k_1)^{p^*} \left(\int_{\Omega} |\nabla T_{k_1}(u)|^p dx \right)^{p^*/p} \\ &\quad + k^{-p} \int_{\Omega} |\nabla T_{k_1}(u)|^p dx. \end{aligned} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N, k, k_1 > 0$. Положим $E = \{|u| < k_1, |\nabla T_N(u)| \geq k\}$. Ясно, что

$$\text{meas}\{|\nabla T_N(u)| \geq k\} \leq \text{meas}\{|u| \geq k_1\} + \text{meas } E. \quad (13)$$

Учитывая, что $k \leq |\nabla T_N(u)|$ на E ,

$$\begin{aligned} \nabla T_N(u) &= \nabla T_{k_1}(u) && \text{п.в. на } \{|u| \leq N\} \cap \{|u| \leq k_1\}, \\ \nabla T_N(u) &= 0 && \text{п.в. на } \{|u| > N\}, \end{aligned}$$

получаем

$$k^p \text{meas } E \leq \int_E |\nabla T_N(u)|^p dx \leq \int_{\Omega} |\nabla T_{k_1}(u)|^p dx.$$

Отсюда, из (13) и леммы 2 выводим (12). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть u – функция на Ω , $\lambda \geq 1$, и пусть для любого $N \in \mathbb{N}$ $T_N(u) \in W^{1,\lambda}(\Omega)$. Пусть последовательность $\{T_N(u)\}$ ограничена в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Тогда $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $T_N(u) \rightarrow u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ограниченности последовательности $\{T_N(u)\}$ в $L^\lambda(\Omega)$, поточечной сходимости этой последовательности к u в Ω , леммы Фату и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и

$$T_N(u) \rightarrow u \quad \text{сильно в } L^\lambda(\Omega). \quad (14)$$

Далее, пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Используя тот факт, что для произвольных $k, k_1 \in \mathbb{N}$, $k < k_1$,

$$D_i T_k(u) = D_i T_{k_1}(u) \quad \text{п.в. на } \{|u| \leq k\},$$

устанавливаем: существует функция $v_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$v_i = D_i T_N(u) \quad \text{п.в. на } \{|u| \leq N\}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$D_i T_N(u) \rightarrow v_i \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (16)$$

Кроме того, из (15) и определения функций T_N вытекает, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$|D_i T_N(u)| \leq |v_i| \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (17)$$

В силу ограниченности последовательности $\{D_i T_N(u)\}$ в $L^\lambda(\Omega)$, (16) и леммы Фату имеем $v_i \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда, используя (16), (17) и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем, что

$$D_i T_N(u) \rightarrow v_i \quad \text{сильно в } L^\lambda(\Omega). \quad (18)$$

Из (14) и (18) следует, что существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u = v_i$ п.в. на Ω . Теперь ясно, что $D_i u \in L^\lambda(\Omega)$ и $D_i T_N(u) \rightarrow D_i u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Поскольку это верно для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, то, учитывая (14), заключаем, что $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $T_N(u) \rightarrow u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Φ – неотрицательная измеримая функция на Ω , $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > (n-1)/n$, и пусть

$$\Phi \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + \Phi) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + \Phi)]^\sigma \in L^1(\Omega).$$

Пусть $p \geq 2 - 1/n$, u – функция на Ω , и пусть для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq \int_{\Omega} \Phi |T_k(u)| dx. \quad (19)$$

Тогда $u \in \overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через c_i , $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, m, σ , $\text{meas } \Omega$ и нормы в $L^1(\Omega)$ функции

$$\Phi \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + \Phi) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + \Phi)]^\sigma.$$

Определим числа t_j следующим образом:

$$t_1 = 4, \quad t_j = e^{t_{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, m+1.$$

Положим

$$\gamma = \frac{p-1}{2p}, \quad \gamma_1 = \max(e^{1/\gamma^2}, t_{m+1}).$$

Зафиксируем $k \geq \gamma_1$. Имеем $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$, и в силу (19) справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq k^\gamma \int_{\Omega} |T_k(u)| dx + k \int_{\{\Phi > k^\gamma\}} \Phi dx. \quad (20)$$

Используя (10) и неравенства Гёльдера и Юнга, получаем

$$\begin{aligned} k^\gamma \int_{\Omega} |T_k(u)| dx &\leq c_0 k^\gamma (\text{meas } \Omega)^{(p^*-1)/p^*} \left(\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx + \frac{p-1}{p} c_3 k^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (20) следует, что

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq c_3 k^{1/2} + 3k \int_{\{\Phi > k^\gamma\}} \Phi dx. \quad (21)$$

Оценим интеграл в правой части (21). Прежде всего заметим, что в силу неравенства $k \geq t_{m+1}$ и определения чисел t_j для любого $j \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$b_j(k) \geq 4. \quad (22)$$

Очевидно, что имеет место следующее свойство:

$$\text{если } s > k^\gamma, \text{ то } b_1(s_1 + s) > \gamma b_1(k). \quad (23)$$

Используя (22), (23) и неравенство $\ln k \geq 1/\gamma^2$, устанавливаем, что если $s > k^\gamma$, то для любого $j \in \{2, \dots, m+1\}$ справедливо неравенство $b_j(s_j + s) > b_j(k)/2$. Этот факт и свойство (23) позволяют заключить, что

$$\begin{aligned} &\left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + \Phi) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + \Phi)]^\sigma \\ &> \gamma^{m+\sigma} \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^\sigma \quad \text{на } \{\Phi > k^\gamma\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{\{\Phi > k^\gamma\}} \Phi \, dx \leq c_4 \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{-(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma}. \quad (24)$$

Заметим, что для произвольных $\lambda, s > 0$ имеет место неравенство

$$\lambda \ln s < s^\lambda. \quad (25)$$

Воспользовавшись этим, получаем

$$\left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^\sigma < [2(m+\sigma)]^{m+\sigma} k^{1/2}. \quad (26)$$

Из неравенств (21), (24) и (26) выводим, что для любого $k \geq \gamma_1$

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p \, dx \leq c_5 k \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{-(n-1)/n} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma}. \quad (27)$$

В силу леммы 2 и (27) для любого $k > s_{m+1}$ имеем

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_6 k^{-n(p-1)/(n-p)} \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{-(n-1)/(n-p)} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma n/(n-p)}.$$

Отсюда, учитывая неравенство $\sigma > (n-1)/n$ и используя лемму 1, получаем, что $u \in L^{n(p-1)/(n-p)}(\Omega)$.

Далее, положим

$$\gamma_2 = \gamma_1^{(n-1)/(n-p)} \left[\prod_{j=1}^m b_j(\gamma_1) \right]^{(n-1)/n(n-p)} [b_{m+1}(\gamma_1)]^{\sigma/(n-p)}$$

и зафиксируем $k > \gamma_2$.

Пусть ψ — функция на $(s_{m+1}, +\infty)$ такая, что для любого $s \in (s_{m+1}, +\infty)$

$$\psi(s) = s^{n-1} \left[\prod_{j=1}^m b_j(s) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s)]^\sigma.$$

Поскольку функция ψ непрерывна, $\psi(s) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow +\infty$ и $\psi(\gamma_1) < k^{n-p}$, то существует $k_1 > \gamma_1$ такое, что

$$\psi(k_1) = k^{n-p}. \quad (28)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & k_1^{-n(p-1)/(n-p)} \left[\prod_{j=1}^m b_j(k_1) \right]^{-(n-1)/(n-p)} [b_{m+1}(k_1)]^{-\sigma n/(n-p)} \\ &= k^{-p} k_1 \left[\prod_{j=1}^m b_j(k_1) \right]^{-(n-1)/n} [b_{m+1}(k_1)]^{-\sigma} \\ &= k^{-r} \left[\prod_{j=1}^m b_j(k_1) \right]^{-1} [b_{m+1}(k_1)]^{-\sigma n/(n-1)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Кроме того, из (28) вытекает, что $k_1 < k$ и $k^{n-p} < k_1^{n+m+\sigma}$. Используя последнее неравенство, устанавливаем, что для любого $j \in \{1, \dots, m+1\}$

$$b_j(k) < \frac{n+m+\sigma}{n-p} b_j(k_1). \quad (30)$$

Из леммы 3 и соотношений (27), (29), (30) выводим, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\text{meas}\{|\nabla T_N(u)| \geq k\} \leq c_7 k^{-r} \left[\prod_{j=1}^m b_j(k) \right]^{-1} [b_{m+1}(k)]^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Полученный результат, неравенство $\sigma > (n-1)/n$ и лемма 1 позволяют заключить, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} |\nabla T_N(u)|^r dx \leq c_8. \quad (31)$$

В силу условия $p \geq 2 - 1/n$ имеем $r \geq 1$, а поскольку $p < n$, то $r < p$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ имеем $T_N(u) \in \dot{W}^{1,r}(\Omega)$. Отсюда, из принадлежности функции u пространству $L^r(\Omega)$, (31) и леммы 4 выводим, что $u \in \dot{W}^{1,r}(\Omega)$. Тем самым теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть условия теоремы 1 выполнены. В силу (1)–(3) и теоремы 6.1 из [3] существует функция u на Ω такая, что для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$ и для любых $\varphi \in \dot{W}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $k_1 > k + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$ справедливо неравенство

$$\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla T_{k_1}(u)) (D_i T_{k_1}(u) - D_i \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx. \quad (32)$$

Отсюда, учитывая (2), получаем, что для любого $k > 0$

$$\int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq \frac{1}{c_2} \int_{\Omega} |f| |T_k(u)| dx.$$

Теперь, учитывая (6) и используя теорему 2, заключаем, что $u \in \dot{W}^{1,r}(\Omega)$. Отсюда и из (1) вытекает, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$. Кроме того, в силу (32) и следствия 4.3 из работы [3] для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Таким образом, функция u является слабым решением задачи (4). Теорема доказана.

4. Заключительные замечания. Условие (6) на правую часть уравнения в рассматриваемой задаче (4) является лишь достаточным для существования слабого решения этой задачи, принадлежащего $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$. Действительно, покажем на примере оператора Лапласа (это соответствует случаю $p = 2$), что слабое решение задачи (4), принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$, может существовать и при более слабом ограничении на правую часть уравнения по сравнению с условием (6).

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть g_1 — функция класса $C^2((0, +\infty))$ такая, что $g_1 = 0$ на $[1/2, +\infty)$ и для любого $s \in (0, e^{-e})$

$$g_1(s) = \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-(n-1)/n} \left(\ln \ln \frac{1}{s}\right)^{-(2n-1)/n}.$$

Пусть еще u_1 и f_1 — функции на Ω такие, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u_1(x) = |x|^{2-n} g_1(|x|), \quad f_1(x) = (n-3)|x|^{1-n} g_1'(|x|) - |x|^{2-n} g_1''(|x|).$$

Нетрудно проверить, что функция u_1 является слабым решением задачи

$$-\Delta u = f_1 \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

при этом $u_1 \in \overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$; для любого $\sigma \in (0, (n-1)/n)$

$$f_1[\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n} [\ln \ln(e + |f_1|)]^\sigma \in L^1(\Omega),$$

но

$$f_1[\ln(1 + |f_1|)]^{(n-1)/n} [\ln \ln(e + |f_1|)]^{(n-1)/n} \notin L^1(\Omega)$$

и, следовательно, функция f_1 не удовлетворяет условию (6).

В общей ситуации, рассмотренной в этой статье, потеря точности в условии на правую часть уравнения, обеспечивающем существование слабого решения задачи (4) из $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$, происходит из-за того, что в основной теореме 2 при оценке интегралов функции Φ по множествам $\{\Phi > k^\gamma\}$ (см. (24)) интегралы функции

$$\Phi \left[\prod_{j=1}^m b_j(s_j + \Phi) \right]^{(n-1)/n} [b_{m+1}(s_{m+1} + \Phi)]^\sigma$$

по тем же множествам оцениваются сверху единой константой, тогда как последовательность этих интегралов стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Однако для функции Φ общего положения по-видимому невозможно дать квалифицированную оценку точности этого стремления к нулю в зависимости от k и тем самым воспользоваться надлежащим образом дополнительным множителем, сходящимся к нулю при $k \rightarrow \infty$, в правой части неравенства, огрублением которого явилось неравенство (24). Это оправдывает оценку упомянутых интегралов функции (33) только константой, хотя последнее, как уже было сказано, и приводит к некоторой потере точности в условии, обеспечивающем существование слабого решения рассматриваемой задачи, принадлежащего пространству $\overset{\circ}{W}^{1,r}(\Omega)$.

Наконец, приведем пример, когда правая часть уравнения имеет определенную “логарифмическую” суммируемость, но слабое решение соответствующей задачи Дирихле не принадлежит $\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$.

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть g_2 – функция класса $C^2((0, +\infty))$ такая, что $g_2 = 0$ на $[1/2, +\infty)$ и для любого $s \in (0, e^{-1})$

$$g_2(s) = \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-(n-1)/n}.$$

Пусть еще u_2 и f_2 – функции на Ω такие, что для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$

$$u_2(x) = |x|^{2-n} g_2(|x|), \quad f_2(x) = (n-3)|x|^{1-n} g_2'(|x|) - |x|^{2-n} g_2''(|x|).$$

Тогда функция u_2 является слабым решением задачи

$$-\Delta u = f_2 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

При этом для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $u_2 \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$, но $|\nabla u_2| \notin L^r(\Omega)$ и, следовательно, $u_2 \notin \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$. Кроме того, для любого $\sigma \in (0, (n-1)/n)$ имеем $f_2[\ln(1+|f_2|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$, но $f_2[\ln(1+|f_2|)]^{(n-1)/n} \notin L^1(\Omega)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Boccardo L., Gallouët T. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. 1989. V. 87. P. 149–169.
- [2] Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic equations with right hand side measures // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. P. 641–655.
- [3] Bénéilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L. An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1995. V. 22. P. 241–273.
- [4] Boccardo L., Gallouët T. Summability of the solutions of nonlinear elliptic equations with right hand side measures // J. Convex Analysis. 1996. V. 3. P. 361–365.
- [5] Ковалевский А. А. О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1 // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №3. С. 375–385.
- [6] Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
E-mail: alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
22.06.2001
Исправленный вариант
08.04.2002