Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Неравенства Гарнака–Тома для пучков с инволюцией и их приложения, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 686–695

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 05:45:18

УДК 517.6

НЕРАВЕНСТВА ГАРНАКА–ТОМА ДЛЯ ПУЧКОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. А. Краснов

Для когомологий пучка абелевых групп с инволюцией на топологическом пространстве доказываются неравенства, которые являются аналогами классического неравенства Гарнака–Томы для когомологий топологического пространства с инволюцией. С помощью полученных общих неравенств передоказаны некоторые известные неравенства, а также получены новые неравенства.

Библиография: 5 названий.

Введение. Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство, $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка, действующая на X . Обозначим через Y факторпространство X/G и будем предполагать, что его когомологическая размерность $\text{cd}(Y)$ конечная. Через Z обозначим множество неподвижных точек относительно инволюции g . Из конечности $\text{cd}(Y)$ вытекает, что когомологические размерности $\text{cd}(X)$, $\text{cd}(Z)$ также конечны. Классическое неравенство Гарнака–Томы имеет вид

$$\dim H^*(Z, \mathbb{F}_2) \leq \dim H^*(X, \mathbb{F}_2), \quad (1)$$

где

$$H^*(-, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H^q(-, \mathbb{F}_2).$$

В работе [1] было доказано следующее уточнение неравенства (1):

$$\dim H^*(Z, \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(X, \mathbb{F}_2)), \quad (2)$$

а также были доказаны неравенства

$$\dim H^{\text{even}}(Z, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{even}}(X, \mathbb{Z})) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{odd}}(X, \mathbb{Z})), \quad (3)$$

$$\dim H^{\text{odd}}(Z, \mathbb{F}_2) \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{odd}}(X, \mathbb{Z})) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{even}}(X, \mathbb{Z})), \quad (4)$$

где

$$H^{\text{even}}(-, -) = \bigoplus_q H^{2q}(-, -), \quad H^{\text{odd}}(-, -) = \bigoplus_q H^{2q-1}(-, -).$$

Пусть $\mathcal{A}$ – G -пучок абелевых групп на X ; тогда через $\mathcal{A}_0$ обозначим его ограничение на Z . Кроме того, через $\mathcal{A}_0^+$, $\mathcal{A}_0^-$ обозначим подпучки $\mathcal{A}_0$, на которых $g = \pm 1$. Факторпучки

$$\mathcal{A}_0^\mp / (1 \mp g)\mathcal{A}_0$$

обозначим, соответственно, через $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$; ясно, что они являются пучками $\mathbb{F}_2$ -пространств. Рассмотрим эквивариантные когомологии Гротендика $H^n(X; G, \mathcal{A})$; для них определены спектральные последовательности (см. [2])

$$\begin{aligned} I_2^{p,q}(X; G, \mathcal{A}) &= H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathcal{A})) \Rightarrow H^{p+q}(X; G, \mathcal{A}), \\ II_2^{p,q}(X; G, \mathcal{A}) &= H^p(G, H^q(X, \mathcal{A})) \Rightarrow H^{p+q}(X; G, \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Аналогичные спектральные последовательности определены для эквивариантных когомологий $H^n(Z; G, \mathcal{A}_0)$. Следующие теоремы обобщают неравенства (3), (4).

ТЕОРЕМА 1. Пусть спектральная последовательность $I(Z; G, \mathcal{A}_0)$ вырождается и размерность $\mathbb{F}_2$ -пространств $H^p(G, H^*(X, \mathcal{A}))$ конечная при $p = 1, 2$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_2} H^{\text{odd}}(Z, \mathcal{A}') + \dim_{\mathbb{F}_2} H^{\text{even}}(Z, \mathcal{A}'') \\ \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{odd}}(X, \mathcal{A})) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{even}}(X, \mathcal{A})), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_2} H^{\text{even}}(Z, \mathcal{A}') + \dim_{\mathbb{F}_2} H^{\text{odd}}(Z, \mathcal{A}'') \\ \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{even}}(X, \mathcal{A})) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{odd}}(X, \mathcal{A})). \end{aligned} \quad (6)$$

Причем эти неравенства становятся равенствами, если также вырождается спектральная последовательность $II(X; G, \mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть спектральная последовательность $II(Z; G, \mathcal{A}_0)$ вырождается и размерность $\mathbb{F}_2$ -пространств $H^p(G, H^*(X, \mathcal{A}))$ конечная при $p = 1, 2$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{odd}}(Z, \mathcal{A}_0)) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{even}}(Z, \mathcal{A}_0)) \\ \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{odd}}(X, \mathcal{A})) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{even}}(X, \mathcal{A})), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{even}}(Z, \mathcal{A}_0)) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{odd}}(Z, \mathcal{A}_0)) \\ \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^{\text{even}}(X, \mathcal{A})) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G, H^{\text{odd}}(X, \mathcal{A})). \end{aligned} \quad (8)$$

Причем эти неравенства становятся равенствами, если также вырождается спектральная последовательность $II(X; G, \mathcal{A})$.

Заметим, что если в качестве пучка $\mathcal{A}$ взять постоянный пучок $\mathbb{F}_2$, то все неравенства (5)–(8) совпадут с неравенством (2). Если же в качестве $\mathcal{A}$ взять постоянный пучок $\mathbb{Z}$ с тривиальным действием на нем инволюции g , то неравенства (5), (7) совпадут с неравенством (3), а неравенства (6), (8) совпадут с неравенством (4).

Заметим также, что имеет место следующее алгебраическое следствие.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – абелева группа с конечным числом образующих и $g_{\pm}$ – две инволюции на A . Обозначим через $G_{\pm} = \{1, g_{\pm}\}$ группы второго порядка, а через T – композицию $g_{+} \circ g_{-}$. Пусть A^T – подгруппа A , состоящая из элементов, инвариантных относительно T . Тогда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G_{+}, A) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G_{-}, A) \\ \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G_{+}, A^T) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G_{+}, A/(1-T)A), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G_{+}, A) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G_{-}, A) \\ \leq \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G_{+}, A^T) + \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G_{+}, A/(1-T)A). \end{aligned} \quad (10)$$

Вполне возможно, что для теоремы 3 имеется чисто алгебраическое доказательство.

Если группа A 2-периодическая, т.е. является $\mathbb{F}_2$ -пространством, то неравенства в теореме 3 совпадут и получится следующее неравенство:

$$\dim H^1(G_{+}, A) + \dim H^1(G_{-}, A) \leq \dim H^1(G_{+}, A^T) + \dim H^1(G_{+}, A/(1-T)A). \quad (11)$$

Пусть на $\mathbb{F}_2$ -пространстве A существует невырожденная симметрическая билинейная $\mathbb{F}_2$ -значная форма (u, v) , инвариантная относительно инволюций $g_{\pm}$. Тогда

$$\dim H^1(G_{+}, A/(1-T)A) = \dim H^1(G_{+}, A^T),$$

а поэтому из неравенства (11) получаем неравенство

$$\dim H^1(G_{+}, A) + \dim H^1(G_{-}, A) \leq 2 \dim H^1(G_{+}, A^T).$$

Теоремы 1–3 мы применяем для получения новых доказательств некоторых результатов из [3], [4], а также для усиления этих результатов. Соответствующие утверждения во введении не приводятся; они сформулированы в п. 2.

1. Доказательство теорем. В этом пункте мы докажем теоремы 1–3. Но сначала докажем лемму.

ЛЕММА 1. Справедливы утверждения:

- 1) если q четное и $q > 0$, то выполняется равенство $\mathcal{H}^q(G, A) = \mathcal{A}''$;
- 2) если q нечетное, то выполняется равенство $\mathcal{H}^q(G, A) = \mathcal{A}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_{X-Z} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_0 \rightarrow 0, \quad (12)$$

где $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_0$ – гомоморфизм ограничения, $\mathcal{A}_{X-Z}$ – ядро этого гомоморфизма. Из этой точной последовательности и равенства $\mathcal{H}^q(G, \mathcal{A}_{X-Z}) = 0$ при $q > 0$ (см. [2]) получаем равенство

$$\mathcal{H}^q(G, A) = \mathcal{H}^q(G, A_0)$$

при $q > 0$. Покажем теперь, что

$$\mathcal{H}^q(G, A_0) = \mathcal{A}_0^{+}/(1+g)\mathcal{A}_0$$

при четном $q > 0$ и

$$\mathcal{H}^q(G, \mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0^- / (1 - g)\mathcal{A}_0$$

при нечетном q . Для этого будем использовать равенство (см. [2])

$$\mathcal{H}^q(G, \mathcal{A}_0) = \text{Ext}_{\Lambda}^q(\mathbb{Z}, \mathcal{A}_0),$$

где $\Lambda = \mathbb{Z}[G]$ – групповое кольцо. Из свободной резольвенты Λ_* пучка $\mathbb{Z}$

$$\dots \xrightarrow{1-g} \Lambda \xrightarrow{1+g} \Lambda \xrightarrow{1-g} \Lambda \xrightarrow{-\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

следует равенство

$$\text{Ext}_{\Lambda}^q(\mathbb{Z}, \mathcal{A}_0) = H^q(\text{Hom}_{\Lambda}(\Lambda_*, \mathcal{A}_0)).$$

Комплекс пучков $\text{Hom}_{\Lambda}(\Lambda_*, \mathcal{A}_0)$ имеет вид

$$\mathcal{A}_0 \xrightarrow{1-g} \mathcal{A}_0 \xrightarrow{1+g} \mathcal{A}_0 \xrightarrow{1-g} \dots,$$

поэтому

$$\text{Ext}_{\Lambda}^q(\mathbb{Z}, \mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0^+ / (1 + g)\mathcal{A}_0$$

при четном $q > 0$ и

$$\text{Ext}_{\Lambda}^q(\mathbb{Z}, \mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_0^- / (1 - g)\mathcal{A}_0$$

при нечетном q . Лемма доказана.

Перейдем к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 1. Из точной последовательности G -пучков (12) получаем точную последовательность когомологий

$$\dots \rightarrow H^q(X; G, \mathcal{A}_{X-Z}) \rightarrow H^q(X; G, \mathcal{A}) \rightarrow H^q(Z; G, \mathcal{A}_0) \rightarrow \dots \quad (13)$$

Так как $\mathcal{H}^q(G, \mathcal{A}_{X-Z}) = 0$ при $q > 0$, из первой спектральной последовательности вытекает, что при $n > \text{cd}(Y)$ выполняется равенство $H^n(X; G, \mathcal{A}_{X-Z}) = 0$. Возьмем четное число $N > \text{cd}(Y)$; тогда из точной последовательности (13) получаем равенство

$$H^N(Z; G, \mathcal{A}_0) = H^N(X; G, \mathcal{A}).$$

Так как спектральная последовательность $I(Z; G, \mathcal{A}_0)$ вырождается, из леммы 1 и неравенств $\text{cd}(Z) \leq \text{cd}(Y) < N$ получаем равенства

$$\begin{aligned} \dim H^N(Z; G, \mathcal{A}_0) &= \sum_{p+q=N} \dim H^p(Z, \mathcal{H}^q(G, \mathcal{A}_0)) \\ &= \dim H^{\text{odd}}(Z, \mathcal{A}') + \dim H^{\text{even}}(Z, \mathcal{A}''). \end{aligned}$$

Так как $\text{cd}(X) \leq \text{cd}(Y)$, из спектральной последовательности $II(X; G, \mathcal{A})$ вытекает неравенство

$$\dim H^N(X; G, \mathcal{A}) \leq \dim H^1(G, H^{\text{odd}}(X, \mathcal{A})) + \dim H^2(G, H^{\text{even}}(Z, \mathcal{A})),$$

которое становится равенством, если вырождается спектральная последовательность $II(X; G, \mathcal{A})$.

Итак, неравенство (5) доказано. Чтобы доказать неравенство (6), нужно взять нечетное число $N > \text{cd}(Y)$ и провести аналогичные рассуждения. Теорема 1 доказана; теорема 2 доказывается аналогично, поэтому ее доказательство мы не приводим.

Перейдем к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 3. Эта теорема выводится из теоремы 1 с помощью следующей конструкции. В качестве пространства X рассмотрим окружность

$$\{e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid -\pi \leq \varphi \leq \pi\}$$

с инволюцией комплексного сопряжения. Пучок $\mathcal{A}$ на X – это локально постоянный пучок, который получается из группы A с помощью преобразования монодромии T . Это означает, что пространство пучка $\mathcal{A}$ получается из произведения $[-\pi, \pi] \times A$ с помощью отождествления слоя $\{\pi\} \times A$ со слоем $\{-\pi\} \times A$ согласно правилу: $(\pi, a) = (-\pi, T(a))$. Инволюция g_+ на A индуцирует инволюцию g на произведении $[-\pi, \pi] \times A$, которая определяется правилом: $g(\varphi, a) = (-\varphi, g_+(a))$. Из этой инволюции получается инволюция g на пучке $\mathcal{A}$, причем ее ограничение на слой в точке $1 \in X$ совпадает с g_+ , а ограничение на слой в точке $-1 \in X$ равно g_- . Так как $Z = \{\pm 1\}$, спектральная последовательность $I(Z; G, A_0)$ вырождается и выполняются равенства

$$\begin{aligned} H^{\text{odd}}(Z, \mathcal{A}') &= H^{\text{odd}}(Z, \mathcal{A}'') = 0, \\ H^{\text{even}}(Z, \mathcal{A}') &= H^1(G_+, A) \oplus H^1(G_-, A), \\ H^{\text{even}}(Z, \mathcal{A}'') &= H^2(G_+, A) \oplus H^2(G_-, A). \end{aligned}$$

Так как X – окружность, а $T: A \rightarrow A$ – преобразование монодромии для пучка $\mathcal{A}$, имеем равенства

$$H^{\text{even}}(X, \mathcal{A}) = A^T, \quad H^{\text{odd}}(X, \mathcal{A}) = A/(1 - T)A.$$

Для окончания доказательства теоремы 3 осталось применить любую из теорем 1, 2.

2. Приложения неравенств Гарнака–Тома. Сначала сформулируем один из результатов работы [3]. Пусть V_t – семейство вещественных алгебраических многообразий, т.е.

$$V_t = \{F_1(x, t) = 0, \dots, F_m(x, t) = 0\}, \quad x \in \mathbb{R}P^N, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $F_1(x, t), \dots, F_m(x, t)$ – многочлены с вещественными коэффициентами, однородные относительно x . Будем предполагать, что V_t – неособые многообразия при $0 < |t| < \varepsilon$, которые к тому же не имеют и комплексных особых точек, но V_0 , в свою очередь, – многообразие с особенностями. Пусть $\mathbb{C}V_t$ – комплексификация V_t , т.е.

$$\mathbb{C}V_t = \{F_1(x, t) = 0, \dots, F_m(x, t) = 0\}, \quad x \in \mathbb{C}P^N.$$

Тогда мы можем считать многообразия $\mathbb{C}V_t$ неособыми и при комплексных значениях параметра $0 < |t| < \varepsilon$, $t \in \mathbb{C}$, уменьшив в противном случае число ε . Поэтому определено отображение монодромии

$$T: H^*(\mathbb{C}V_t, -) \rightarrow H^*(\mathbb{C}V_t, -).$$

Чтобы установить неравенства для семейства вещественных алгебраических многообразий, рассмотрим в качестве топологического пространства X окружность

$$\{t \in \mathbb{C}: |t| = \delta\},$$

где $\delta = \varepsilon/2$, а пучок $\mathcal{A}$ на X пусть равен локально постоянному пучку $H^*(CV_t, -)$. Отображение комплексного сопряжения $CV_t \rightarrow CV_{\bar{t}}$ индуцирует инволюцию

$$g: H^*(CV_{\bar{t}}, -) \rightarrow H^*(CV_t, -)$$

на пучке $\mathcal{A}$. Возьмем вначале в качестве коэффициентов для групп когомологий поле $\mathbb{F}_2$. В работе [3] было доказано неравенство

$$\dim H^*(V_\delta, \mathbb{F}_2) + \dim H^*(V_{-\delta}, \mathbb{F}_2) \leq 2 \dim H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)^T.$$

Следующее предложение уточняет это неравенство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Выполняется неравенство*

$$\dim H^*(V_\delta, \mathbb{F}_2) + \dim H^*(V_{-\delta}, \mathbb{F}_2) \leq 2 \dim H^1(G, H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)^T). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение теоремы 1 или теоремы 2 к данной ситуации приводит к неравенству

$$\begin{aligned} & \dim H^1(G, H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)) + \dim H^1(G, H^*(CV_{-\delta}, \mathbb{F}_2)) \\ & \leq \dim H^1(G, H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)^T) + H^1(G, H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)/(1-T)H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)). \end{aligned} \quad (15)$$

Неравенство (2), примененное к многообразиям $CV_{\pm\delta}$, дает неравенства

$$\dim H^*(V_{\pm\delta}, \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(CV_{\pm\delta}, \mathbb{F}_2)). \quad (16)$$

С другой стороны, двойственность Пуанкаре приводит к равенству размерностей

$$\dim H^1(G, H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)^T) = \dim H^1(G, H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)/(1-T)H^*(CV_\delta, \mathbb{F}_2)),$$

поэтому из неравенств (15), (16) получаем неравенство (14). Предложение доказано.

Рассмотрим теперь когомологии с целыми коэффициентами

$$H^{\text{odd}}(CV_t, \mathbb{Z}), \quad H^{\text{even}}(CV_t, \mathbb{Z}).$$

Далее факторгруппы

$$H^{\text{odd}}(CV_t, \mathbb{Z})/(1 \pm T)H^{\text{odd}}(CV_t, \mathbb{Z}), \quad H^{\text{even}}(CV_t, \mathbb{Z})/(1 \pm T)H^{\text{even}}(CV_t, \mathbb{Z})$$

будем обозначать через

$$H^{\text{odd}}(CV_t, \mathbb{Z})/(1 \pm T), \quad H^{\text{even}}(CV_t, \mathbb{Z})/(1 \pm T).$$

Тогда применение теоремы 1 или теоремы 2 к соответствующим пучкам на окружности X , а также неравенств (3), (4), доказывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{even}}(V_\delta, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{even}}(V_{-\delta}, \mathbb{F}_2) \\ \leq \dim H^2(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})^T \oplus H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})/(1-T)) \\ + \dim H^1(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})^T \oplus H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})/(1-T)), \\ \dim H^{\text{odd}}(V_\delta, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{odd}}(V_{-\delta}, \mathbb{F}_2) \\ \leq \dim H^2(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})^T \oplus H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})/(1-T)) \\ + \dim H^1(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})^T \oplus H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})/(1-T)). \end{aligned}$$

Заметим, что предложения 1, 2 можно доказать с помощью теоремы 3, а также можно доказать методами, рассмотренными в [3], т.е. с помощью точной последовательности Вана. А теперь покажем, что также справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{even}}(V_\delta, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{odd}}(V_{-\delta}, \mathbb{F}_2) \\ \leq H^2(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})^{(-T)} \oplus H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})/(1+T)) \\ + \dim H^1(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})^{(-T)} \oplus H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})/(1+T)), \\ \dim H^{\text{odd}}(V_\delta, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{even}}(V_{-\delta}, \mathbb{F}_2) \\ \leq H^2(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})^{(-T)} \oplus H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})/(1+T)) \\ + \dim H^1(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})^{(-T)} \oplus H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})/(1+T)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группы когомологий $H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})$, $H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_\delta, \mathbb{Z})$ обозначим, соответственно, через A и B . С помощью перетаскивания многообразия $\mathbb{C}V_\delta$ над верхней полуокружностью

$$\{t = \delta e^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

отождествим его с многообразием $\mathbb{C}V_{-\delta}$ (отождествление производится с помощью диффеоморфизма). Это отождествление позволяет рассмотреть следующие две инволюции $g_\pm$ на группах A , B . Инволюция g_+ индуцируется комплексным сопряжением $\mathbb{C}V_\delta \rightarrow \mathbb{C}V_\delta$, а инволюция g_- равна $g_+ \circ (-T)$. Применим теорему 3 к группам A , B с инволюциями $g_\pm$; тогда получим неравенства

$$\begin{aligned} \dim H^1(G_+, A) + \dim H^1(G_-, A) &\leq \dim H^1(G_+, A^{(-T)}) + \dim H^2(G_+, A/(1+T)), \\ \dim H^2(G_+, A) + \dim H^2(G_-, A) &\leq \dim H^2(G_+, A^{(-T)}) + \dim H^1(G_+, A/(1+T)), \\ \dim H^1(G_+, B) + \dim H^1(G_-, B) &\leq \dim H^1(G_+, B^{(-T)}) + \dim H^2(G_+, B/(1+T)), \\ \dim H^2(G_+, B) + \dim H^2(G_-, B) &\leq \dim H^2(G_+, B^{(-T)}) + \dim H^1(G_+, B/(1+T)). \end{aligned}$$

Сложим первое неравенство с четвертым, а второе с третьим; тогда получим неравенства

$$\begin{aligned} & (\dim H^1(G_+, A) + \dim H^2(G_+, B)) + (\dim H^1(G_-, A) + \dim H^2(G_-, B)) \\ & \leq \dim H^1(G_+, A^{(-T)} \oplus B/(1+T)) \\ & \quad + \dim H^2(G_+, A/(1+T) \oplus B^{(-T)}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & (\dim H^2(G_+, A) + \dim H^1(G_+, B)) + (\dim H^2(G_-, A) + \dim H^1(G_-, B)) \\ & \leq \dim H^2(G_+, A^{(-T)} \oplus B/(1+T)) \\ & \quad + \dim H^1(G_+, A/(1+T) \oplus B^{(-T)}). \end{aligned} \quad (18)$$

Правые части этих неравенств совпадают с правыми частями неравенств в формулировке предложения. Заметим теперь, что инволюция на $H^q(\mathbb{C}V_{-\delta}, \mathbb{Z})$, индуцированная комплексным сопряжением на многообразии $\mathbb{C}V_{-\delta}$, равна инволюции $-g_-$, поэтому выполняются равенства

$$H^1(G_-, -) = H^2(G, -), \quad H^2(G_-, -) = H^1(G, -),$$

где G – группа второго порядка, порожденная инволюцией комплексного сопряжения на многообразии $\mathbb{C}V_{-\delta}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \dim H^1(G_-, A) + \dim H^2(G_-, B) \\ & = \dim H^2(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_{-\delta}, \mathbb{Z})) + H^1(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_{-\delta}, \mathbb{Z})), \\ & \dim H^2(G_-, A) + \dim H^1(G_-, B) \\ & = \dim H^1(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}V_{-\delta}, \mathbb{Z})) + H^2(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}V_{-\delta}, \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

Применяя неравенства (3), (4) для многообразий $\mathbb{C}V_{\pm\delta}$, получим, что левая часть неравенства (17) не меньше суммы

$$\dim H^{\text{even}}(V_{\delta}, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{odd}}(V_{-\delta}, \mathbb{F}_2),$$

а левая часть неравенства (18) не меньше суммы

$$\dim H^{\text{odd}}(V_{\delta}, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{even}}(V_{-\delta}, \mathbb{F}_2).$$

Предложение доказано.

Перейдем к формулировке результата из работы [4]. Пусть $P(x_0, \dots, x_n)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, причем такой, что $P(0) = 0$, и 0 – изолированная критическая точка P в $\mathbb{C}^{n+1}$. При $0 < \varepsilon \ll 1$ рассмотрим в замкнутой ε -окрестности точки 0 множества уровня:

$$M_t = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid P(x) = t, |x| \leq \varepsilon\}, \quad \mathbb{C}M_t = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid P(x) = t, |x| \leq \varepsilon\}.$$

Существует $\eta > 0$ такое, что при $0 < |t| < \eta$ эти множества уровня являются многообразиями с краем и определен оператор монодромии

$$T: H^*(\mathbb{C}M_t, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(\mathbb{C}M_t, \mathbb{F}_2).$$

В заметке [4] было доказано, что если $0 < t < \eta$, то выполняется неравенство

$$\dim H^*(M_t, \mathbb{F}_2) \leq \dim H^*(\mathbb{C}M_t, \mathbb{F}_2)^T.$$

В этой статье мы получаем его усиление и доказываем новые неравенства. Далее мы предполагаем, что множества $M_{\pm t}$ непустые. Сначала докажем лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < t < \eta$; тогда справедливы утверждения:

1) если n нечетное, то выполняются равенства

$$\begin{aligned}\dim H^{\text{odd}}(M_t, \mathbb{F}_2) &= \dim H^{\text{odd}}(M_{-t}, \mathbb{F}_2), \\ \dim H^{\text{even}}(M_t, \mathbb{F}_2) &= \dim H^{\text{even}}(M_{-t}, \mathbb{F}_2);\end{aligned}$$

2) если n четное, то выполняются равенства

$$\begin{aligned}\dim H^{\text{odd}}(M_t, \mathbb{F}_2) &= \dim H^{\text{even}}(M_{-t}, \mathbb{F}_2) - 1, \\ \dim H^{\text{even}}(M_t, \mathbb{F}_2) &= \dim H^{\text{odd}}(M_{-t}, \mathbb{F}_2) + 1;\end{aligned}$$

3) при любом n выполняется равенство

$$\dim H^*(M_t, \mathbb{F}_2) = \dim H^*(M_{-t}, \mathbb{F}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S_ε сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$ радиуса ε с центром $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть S_ε^+ обозначает часть сферы S_ε , где $P(x) \geq 0$; тогда многообразие с краем S_ε^+ диффеоморфно множеству уровня M_t . Доказательство этого утверждения фактически содержится в [5]. Аналогично, множество уровня M_{-t} диффеоморфно части сферы S_ε^- , заданной неравенством $P(x) \leq 0$. Осталось применить двойственность Александера–Понтрягина к паре $(S_\varepsilon, S_\varepsilon^+)$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $0 < t < \eta$. Тогда выполняется неравенство

$$\dim H^*(M_t, \mathbb{F}_2) \leq 1 + \frac{1}{2} \dim H^1(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{F}_2)^T \oplus H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{F}_2)/(1-T)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\dim H^1(G, H^*(\mathbb{C}M_t, \mathbb{F}_2)) + \dim H^1(G, H^*(\mathbb{C}M_{-t}, \mathbb{F}_2)) \\ \leq \dim H^1(G, H^*(\mathbb{C}M_t, \mathbb{F}_2)^T) + \dim H^1(G, H^*(\mathbb{C}M_{-t}, \mathbb{F}_2)/(1-T)).\end{aligned}$$

Оно доказывается так же, как неравенство (15). Применим аналог неравенства Гарнака–Тома (2) к многообразиям $\mathbb{C}M_{\pm t}$, а затем третье утверждение леммы 2; тогда из верхнего неравенства получим следующее неравенство:

$$\dim H^*(M_t, \mathbb{F}_2) \leq \frac{1}{2} [\dim H^1(G, H^*(\mathbb{C}M_t, \mathbb{F}_2)^T) + \dim H^1(G, H^*(\mathbb{C}M_{-t}, \mathbb{F}_2)/(1-T))].$$

Осталось заметить, что $H^q(\mathbb{C}M_{\pm t}, \mathbb{F}_2) = 0$ при $q \neq 0, n$ (см. [5]). Предложение доказано.

Будем теперь рассматривать когомологии с целыми коэффициентами; тогда получим аналоги неравенств в предложении 2:

$$\begin{aligned}\dim H^{\text{even}}(M_t, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{even}}(M_{-t}, \mathbb{F}_2) \\ \leq \dim H^2(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^T \oplus H^{\text{odd}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1-T)) \\ + \dim H^1(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^T \oplus H^{\text{even}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1-T)), \\ \dim H^{\text{odd}}(M_t, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{odd}}(M_{-t}, \mathbb{F}_2) \\ \leq \dim H^2(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^T \oplus H^{\text{even}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1-T)) \\ + \dim H^1(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^T \oplus H^{\text{odd}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1-T)),\end{aligned}$$

а также аналоги неравенств в предложении 3:

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{even}}(M_t, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{odd}}(M_{-t}, \mathbb{F}_2) \\ \leq \dim H^2(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^{(-T)} \oplus H^{\text{odd}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1+T)) \\ + \dim H^1(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^{(-T)} \oplus H^{\text{even}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1+T)), \\ \dim H^{\text{odd}}(M_t, \mathbb{F}_2) + \dim H^{\text{even}}(M_{-t}, \mathbb{F}_2) \\ \leq \dim H^2(G, H^{\text{odd}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^{(-T)} \oplus H^{\text{even}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1+T)) \\ + \dim H^1(G, H^{\text{even}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^{(-T)} \oplus H^{\text{odd}}(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1+T)). \end{aligned}$$

Применяя к этим неравенствам первое и второе утверждения леммы 2, получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $0 < t < \eta$. Тогда справедливы утверждения:

1) если n нечетное, то выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{even}}(M_t, \mathbb{F}_2) &\leq \frac{1}{2} [1 + \dim H^1(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^T) \\ &\quad + \dim H^2(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1-T))], \\ \dim H^{\text{odd}}(M_t, \mathbb{F}_2) &\leq \frac{1}{2} [1 + \dim H^2(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^T) \\ &\quad + \dim H^1(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1-T))]; \end{aligned}$$

2) если n четное, то выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{even}}(M_t, \mathbb{F}_2) &\leq 1 + \frac{1}{2} [\dim H^2(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^{(-T)}) \\ &\quad + \dim H^1(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1+T))], \\ \dim H^{\text{odd}}(M_t, \mathbb{F}_2) &\leq \frac{1}{2} [\dim H^1(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})^{(-T)}) \\ &\quad + \dim H^2(G, H^n(\mathbb{C}M_t, \mathbb{Z})/(1+T))]. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Томы для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [2] Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
- [3] Краснов В. А. Вырождения вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 4. С. 798–837.
- [4] Краснов В. А. Неравенство Гарнака–Томы для критической точки многочлена // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 5. С. 717–720.
- [5] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.