Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. МIRONENKO, Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 696–712

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 03:08:07

УДК 517.518.6

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОМ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. В. Мироненко

В работе рассмотрен вопрос о равномерном приближении заданной на отрезке непрерывной функции. Приближение производится при помощи функции с абсолютно непрерывной производной порядка $n - 1$ и ограниченной по модулю производной порядка n . Приводится критерий альтернансного типа для элемента наилучшего приближения в этом классе. Данный критерий обобщает полученный Н. П. Корнейчуком критерий элемента наилучшего приближения в классе липшицевых функций.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Пусть $C[a, b]$ – это пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C[a, b]} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Пусть $AC^{n-1}[a, b]$ – класс функций, заданных на отрезке $[a, b]$ и имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $n - 1$. Через $\mathcal{D}^n \subset AC^{n-1}[a, b]$ обозначим подкласс функций, имеющих ограниченную единицей производную порядка n , т.е.

$$\mathcal{D}^n = \{g \in AC^{(n-1)}[a, b] : |g^{(n)}(x)| \leq 1 \text{ всюду, где существует } g^{(n)}(x)\}.$$

Зафиксируем произвольную непрерывную функцию $f \in C[a, b]$. Назовем g_* *элементом наилучшего приближения* (ЭНП) для функции f в классе $\mathcal{D}^n$, если выполняется равенство

$$\|f - g_*\| = \min\{\|f - g\| : g \in \mathcal{D}^n\}. \quad (1)$$

Задачу о характеристизации таких элементов наилучшего приближения при $n = 1$ рассматривал Корнейчук [1, с. 219, 220]. При получении точной константы в теореме Джексона–Стечкина он приближал непрерывные функции при помощи функций с ограниченной константой Липшица:

$$g \in \text{Lip } 1 \iff |g(x_2) - g(x_1)| \leq |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2.$$

Нетрудно показать, что $\text{Lip } 1 = \mathcal{D}^1$. Корнейчуком была указана характеристизация ближайших элементов в классе $\mathcal{D}^1$ с использованием понятия “жесткого звена”, т.е. такого подмножества отрезка $[a, b]$, на котором решение аналогичной локальной задачи дает единственный ЭНП, и величина наилучшего приближения совпадает с величиной наилучшего приближения в задаче (1). Основной целью данной работы является обобщение результата Корнейчука на случай $n > 2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00782.

2. Формулировка результата. Пусть приближаемая функция $f \in C[a, b]$ – фиксирована.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор точек $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ из отрезка $[a, b]$ назовем *альтернансом* для функции $g \in \mathcal{D}^n$, если

$$(f - g)(x_i) = (-1)^{i+1} \cdot \text{sign}((f - g)(x_1)) \cdot \|f - g\|$$

при $i = 1, \dots, k$.

ТЕОРЕМА 1 (Н. П. Корнейчук). Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^1$. Для того, чтобы функция $g_* \in \mathcal{D}^1$ была ЭНП для функции f необходимо и достаточно, чтобы на отрезке $[a, b]$ нашелся альтернанс из двух точек $x_1 < x_2$ такой, что

$$g'_*|_{(x_1, x_2)} \equiv -\text{sign}((f - g_*)(x_1)).$$

Основным результатом данной статьи является теорема 2, которая обобщает теорему Корнейчука.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^n$, где $n = 1, 2, \dots$. Для того, чтобы функция $g_* \in \mathcal{D}^n$ была ЭНП для функции f , необходимо и достаточно, чтобы на отрезке $[a, b]$ нашелся набор точек $t_0 < t_1 < \dots < t_s$ и на отрезке $[t_0, t_s]$ нашелся альтернанс из k точек $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ такие, что выполнялись бы следующие условия:

1) верны тождества

$$g_*^{(n)}|_{(t_i, t_{i+1})} \equiv (-1)^{n+i} \text{sign}((f - g_*)(x_1)) \quad \text{для всех } i \in 0, \dots, s-1;$$

2) $k \geq s + n$.

Альтернанс, удовлетворяющий всем условиям теоремы 2, для краткости мы будем называть *жестким звеном*. Отметим, что при $n = 1$ из теоремы 2 следует теорема Корнейчука, а при $n = 2$ она приобретает более простой вид.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^2$. Для того, чтобы функция $g_* \in \mathcal{D}^2$ была ЭНП для функции f , необходимо и достаточно, чтобы на $[a, b]$ нашелся набор точек $t_0 < t_1 < \dots < t_s$ и на отрезке $[t_0, t_s]$ нашелся альтернанс из $s + 2$ точек $\{x_j\}_{j=1}^{s+2}$ такие, что выполнялись бы следующие условия:

1) верны тождества $g_*''|_{(t_i, t_{i+1})} \equiv (-1)^i \text{sign}((f - g_*)(x_1))$ при $i \in 0, \dots, s-1$;

2) справедливы включения $x_1, x_2 \in [t_0, t_1)$, $x_{s+1}, x_{s+2} \in (t_{s-1}, t_s]$;

3) при $i \in 3, \dots, s$ верны включения $x_i \in (t_{i-2}, t_{i-1})$.

3. Доказательство.

3.1. Обозначения и определения. Через $Q_{+1}(g) = \{x: (f - g)(x) = \|f - g\|\}$ и $Q_{-1}(g) = \{x: (f - g)(x) = -\|f - g\|\}$ будут обозначаться множества точек максимального положительного и отрицательного уклонения функции $g \in \mathcal{D}^n$ от функции f . Поскольку функции f и g непрерывны, хотя бы одно из них не пусто. Кроме того, существует константа $\gamma = \gamma(g) > 0$ такая, что

$$\forall x \in Q_{+1}(g) \quad \forall y \in Q_{-1}(g) \quad |x - y| > \gamma. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $g \in \mathcal{D}^n$. Отрезок $[c, d] \subseteq [a, b]$ будем называть “+”-отрезком, если на нем нет точек из $Q_{-1}(g)$, и “-”-отрезком, если на нем нет точек из $Q_{+1}(g)$.

Для краткости будем называть максимальные по включению альтернансы просто *максимальными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расширенный альтернанс* на отрезке $[c, d] \subseteq [a, b]$ для функции $g \in \mathcal{D}^n$ есть набор множеств $\{X_i\}_{i=1}^k$ таких, что каждое множество X_i состоит из всех i -х по счету точек в максимальных альтернансах на отрезке $[c, d]$.

Через $\overline{X_i} = \text{conv } X_i$ будем обозначать выпуклую оболочку множества X_i . Для краткости будем говорить, что $y < X_i$, если неравенство $y < x$ верно для всех $x \in X_i$. Тогда всегда есть точка z_i такая, что $X_i < z_i < X_{i+1}$ и $(f - g)(z_i) = 0$.

Будем говорить, что набор точек $\{x_i\}$ является *упорядоченным*, если для любого i выполняется неравенство $x_i < x_{i+1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Построим для функции $g \in C[a, b]$ на отрезке $[c, d] \subseteq [a, b]$ расширенный альтернанс $\{X_i\}_{i=1}^k$. *Альтернансным разбиением* отрезка $[c, d]$ для функции g будем называть упорядоченный набор точек $\{z_i\}_{i=0}^k \subset [c, d]$ такой, что

- 1) $(f - g)(z_i) = 0 \ \forall i \in 1, \dots, k - 1$;
- 2) $z_0 = c, \ z_k = d$;
- 3) $X_i < z_i < X_{i+1} \ \forall i \in 1, \dots, k - 1$.

Через $PC[t_0, t_1, \dots, t_s]$ обозначим класс кусочно постоянных функций, заданных на отрезке $[t_0, t_s]$ и постоянных на интервалах (t_i, t_{i+1}) . Через $S_n[t_0, t_1, \dots, t_s]$ обозначим класс полиномиальных сплайнов степени n и гладкости $n - 1$, заданных на отрезке $[t_0, t_s]$ и имеющих узлы в точках $t_1, t_2, \dots, t_{s-1}$. Определение понятия сплайна можно найти, например, в [2]. Имеет место следующее соотношение: $h \in S_n[t_0, t_1, \dots, t_s] \iff h^{(n)} \in PC[t_0, t_1, \dots, t_s]$. В частности, из теорем 1–3 следует, что на некотором отрезке функция g_* будет являться сплайном из класса S_1, S_n и S_2 соответственно.

Будем говорить, что функция:

- “принимает знак + или –” на множестве X , если существует такая точка из X , что функция в ней соответственно положительна или отрицательна;
- “сохраняет знак + или –” на множестве X , если во всех точках из X функция соответственно принимает знак + или –;
- “меняет знак в точке x с – на + (с + на –)”, если существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что на $(x - \varepsilon, x)$ функция сохраняет знак – (+), а на $(x, x + \varepsilon)$ функция сохраняет знак + (–);
- “принимает значения с чередующимися знаками на упорядоченном наборе точек $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ ”, если она принимает в точках a_i попеременно знаки + и –.

В дальнейшем нам также будет удобно говорить (несмотря на то, что это противоречит общепринятой терминологии), что функция “принимает знак 0” на множестве X , если существует такая точка из X , что функция в ней равна нулю.

3.2. Вспомогательные утверждения. Сначала приведем без доказательства две простые леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $n \geq 1$ и $N \geq n + 1$. Если функция $g \in AC^{n-1}$ принимает в N точках $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ значения с чередующимися знаками, то найдутся точки $\{y_i\}_{i=1}^{N-n}$ такие, что $x_1 < y_1 < y_2 < \dots < y_{N-n} < x_N$; в них $g^{(n)}$ существует и принимает значения с чередующимися знаками, причем $\text{sign } g^{(n)}(y_1) = (-1)^n \text{sign } g(x_1)$.

СЛЕДСТВИЕ. Поскольку производная абсолютно непрерывной функции является непрерывной в некоторой окрестности каждой точки своего существования, в условиях леммы 1 можно утверждать не только существование точек y_j , но и существование их окрестностей, в которых $g^{(n)}$ сохраняет знак.

ЛЕММА 2. Пусть даны функция $f \in C[a, b] \setminus \mathcal{D}^n$ и функция $g \in \mathcal{D}^n$. Пусть также даны отрезок $[c, d] \subseteq [a, b]$ и функция $h \in AC^{n-1}[a, b]$ такая, что $h \equiv 0$ вне отрезка $[c, d]$, а на $[c, d]$ выполняются условия

- 1) $h^{(n)}$ – ограничена;
- 2) существует константа $\delta_1 > 0$ такая, что при $x \in O_{\delta_1}(Q_{+1}(g))$ выполняется неравенство $h(x) > 0$, и при $x \in O_{\delta_1}(Q_{-1}(g))$ выполняется неравенство $h(x) < 0$;
- 3) существует константа $\delta_2 > 0$ такая, что в δ_2 -окрестности любой точки x_0 , где выполняется равенство $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} |g^{(n)}(x)| = 1$, выполняется неравенство $\text{sign } h^{(n)} \cdot \text{sign } g^{(n)} \leq 0$.

Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для функции $g_\varepsilon = g + \varepsilon h$ выполнены условия $|g_\varepsilon^{(n)}| \leq |g^{(n)}| \leq 1$, $\|f - g_\varepsilon\|_{C[a, b]} \leq \|f - g\|_{C[a, b]}$, $\|f - g_\varepsilon\|_{C[c, d]} < \|f - g\|_{C[c, d]}$.

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 1$ и дан набор точек $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, а также набор чисел $\{r_i\}_{i=0}^{n-1}$. Пусть выполняются равенства $\text{sign } r_i = (-1)^i$ при $i = 0, \dots, n-1$. Тогда существует единственный сплайн $h \in S_n[t_0, t_1, \dots, t_n]$, удовлетворяющий крайевым условиям $h^{(i)}(t_0) = 0$ и $h^{(i)}(t_n) = r_i$ при $i \in 0, \dots, n-1$. Более того, выполняются следующие условия:

- 1) $h > 0$ на промежутке $(t_0, t_n]$;
- 2) $h^{(n)}$ принимает на интервалах (t_i, t_{i+1}) значения с чередующимися знаками, начиная с положительного, т.е. $\text{sign}(h^{(n)})|_{(t_i, t_{i+1})} = (-1)^i$ при $i = 0, \dots, n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность сплайна h следуют из общей теоремы о существовании и единственности интерполяционного сплайна (ее можно найти, например, в [2, с. 26–28]). Докажем пункты 1) и 2) леммы.

Докажем сначала, что $h \geq 0$ на отрезке $[t_0, t_n]$. От противного предположим, что существует точка x_0 такая, что $h(x_0) < 0$. Поскольку $h(t_0) = 0$ и $h(t_n) = r_0 > 0$, верно неравенство $t_0 < x_0 < t_n$. Это значит, что в трех последовательных точках функция h принимает знаки 0, – и +. Применяя два раза теорему Лагранжа, мы получаем точки x_{11} и x_{12} , в которых h' принимает знаки – и +, причем $t_0 < x_{11} < x_0 < x_{12} < t_n$. Кроме того, из крайевых условий следует, что $h'(t_0) = 0$ и $h'(t_n) = r_1 < 0$. Таким образом, мы получили четыре последовательные точки (а именно t_0, x_{11}, x_{12} и t_n), в которых h' принимает знаки 0, –, +, –. Применив три раза теорему Лагранжа, мы получим точки с чередующимися знаками уже для h'' , и так далее. В итоге для функции $h^{(n-1)}$ найдется (с учетом крайевых условий) набор из $n + 2$ точек со следующими знаками: 0, –, +, ..., + (–). Функция $h^{(n-1)}$ есть непрерывная ломаная с конечным числом звеньев;

значит, она абсолютно непрерывна. Тогда по лемме 1 существует $n + 1$ точка, в которых $h^{(n)}$ принимает значения с чередующимися знаками, что противоречит включению $h^{(n)} \in PC[t_0, \dots, t_n]$. Значит, $h \geq 0$ на отрезке $[t_0, t_n]$.

Докажем пункт 2) леммы; пункт 1) будет доказан ниже. Поскольку $h(t_0) = 0$ и $h(t_n) > 0$, функция h' с учетом краевых условий принимает в трех последовательных точках знаки $0, +, -$. Точно также получаем для функции h'' знаки $0, +, -$, $+$ и так далее. В итоге мы найдем $n + 1$ точку, в которых $h^{(n-1)}$ принимает знаки $0, +, -, \dots, +(-)$. Отсюда по лемме 1 будет следовать наличие у $h^{(n)}$ ровно n точек со знаками $+, -, \dots, +(-)$. Учитывая, что функция $h^{(n)} \in PC[t_0, \dots, t_n]$, получаем требуемый результат.

Докажем теперь пункт 1) леммы. От противного, пусть существует такая точка $x_0 \neq t_0$, что $h(x_0) = 0$. Мы доказали, что $h^{(n)} \neq 0$, значит, функция h не может иметь участков тождественного равенства нулю. Поскольку $h \geq 0$, то существует точка $x_1 \in (t_0, x_0)$, в которой $h(x_1) > 0$. Это значит, что на интервале (x_1, x_0) функция h' принимает знак $-$, а на интервале (x_0, t_n) принимает знак $+$, кроме того, из краевых условий следует, что $h'(t_0) = 0$ и $h'(t_n) < 0$. Таким образом, мы получили четыре последовательные точки, в которых h' принимает знаки $0, -, +, -$. Продолжив рассуждения так же, как и в начале доказательства этой леммы, получим противоречие. Лемма доказана.

Имеет место и “симметричная” лемма, а именно.

ЛЕММА 4. Пусть $n \geq 1$ и дан набор точек $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, а также набор чисел $\{l_i\}_{i=0}^{n-1}$. Пусть все числа $l_i > 0$. Тогда существует единственный сплайн $h \in S_n[t_0, t_1, \dots, t_n]$, удовлетворяющий краевым условиям $h^{(i)}(t_0) = l_i$ и $h^{(i)}(t_n) = 0$ при $i \in 0, \dots, n-1$.

Более того, выполняются следующие условия:

- 1) $h > 0$ на промежутке $[t_0, t_n]$;
- 2) $h^{(n)}$ принимает на интервалах (t_i, t_{i+1}) значения с чередующимися знаками, начиная с отрицательного, т.е. $\text{sign}(h^{(n)}|_{(t_i, t_{i+1})}) = (-1)^{i+1}$ при $i = 0, \dots, n-1$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предыдущей, кроме того, ее можно получить из леммы 3 заменой переменных.

ЛЕММА 5. Для любых двух точек $c < d$ и любых чисел $y_0 > 0, y_1, \dots, y_{n-1}$ существует функция $h \in AC^{(n-1)}[c, d]$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $h \geq 0$ на отрезке $[c, d]$;
- 2) $h(c) = h'(c) = \dots = h^{(n-1)}(c) = 0$ и $h(d) = y_0, h'(d) = y_1, \dots, h^{(n-1)}(d) = y_{n-1}$;
- 3) $h^{(n)}$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополним список условий на функцию h еще двумя:

- 4) $h^{(n)}(c) = 1$;
- 5) $h^{(n)}(d) = 0$.

Выделим на интервале (c, d) произвольный набор из n точек $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, и построим функцию $h_1 \in S_{n+1}[c, a_1, \dots, a_n, d]$, удовлетворяющую условиям 2)–5). Такой сплайн существует и единственен (см., например, [2, с. 26–28]), но может оказаться нарушенным условие 1). Тем не менее, поскольку $h_1(d) = y_0 > 0$, и первая ненулевая

производная функции h_1 в точке c больше нуля ($h_1^{(n)}(c) = 1$), мы можем утверждать, что существует константа $\delta > 0$ такая, что на промежутках $(c, c + \delta)$ и $(d - \delta, d]$ функция $h_1 > 0$.

Известно, что для любых чисел $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ существует так называемый “гладкий пенек” – функция $H \in C^\infty$ такая, что $0 \leq H \leq 1$, $H \equiv 1$ на отрезке $[a_2, a_3]$, и $H \equiv 0$ вне отрезка $[a_1, a_4]$. Построим функцию h_2 – “гладкий пенек” с условиями $h_2 \equiv 0$ на отрезках $[c, c + \delta/3]$ и $[d - \delta/3, d]$, и $h_2 \equiv 2\|h_1\|_{C[a,b]}$ на $[c + 2\delta/3, d - 2\delta/3]$; $h_2 \geq 0$. Очевидно, что функция $h = h_1 + h_2$ удовлетворяет всем условиям леммы. Лемма доказана.

Кроме того, нам понадобится так называемая теорема Будана–Фурье для сплайнов. Полную формулировку и доказательство этой теоремы можно найти в [3]; мы приведем ее в менее общей формулировке.

ТЕОРЕМА БУДАНА–ФУРЬЕ. Пусть сплайн $h \in S_n[t_0, t_1, \dots, t_s]$. Тогда количество нулей сплайна h на отрезке $[t_0, t_s]$ с учетом их кратности не превосходит размерности пространства $S_n[t_0, t_1, \dots, t_s]$ без единицы, т.е. $s + n - 1$.

Определение кратности нуля сплайна в этой теореме обобщает понятие кратности нуля обычного полинома и совпадает с ним при отсутствии у сплайна нулей в узлах. В любом случае, нуль кратности k по обычному определению будет учтен как нуль кратности не меньше k по определению теоремы Будана–Фурье.

3.3. Доказательство теоремы 2. Поскольку теорема для случая $n = 1$ доказана Корнейчуком, далее в доказательстве считаем, что

$$n \geq 2. \quad (3)$$

Достаточность. Докажем от противного. Пусть существует функция g , которая удовлетворяет условиям теоремы, но не является ЭНП. Поскольку множество $\mathcal{D}^n$ является замкнутым и локально компактным, хотя бы один ЭНП всегда существует (см., например, [4, с. 11]), обозначим его через g_* . Рассмотрим функцию $h = g_* - g$. Поскольку функция g – не наилучшая, то $\|f - g_*\| < \|f - g\|$; значит

$$h > 0 \quad \forall x \in Q_{+1}(g) \quad \text{и} \quad h < 0 \quad \forall x \in Q_{-1}(g). \quad (4)$$

Это значит, что функция h принимает в точках $\{x_i\}_{i=1}^k$ чередующиеся по знаку значения; следовательно, по лемме 1 найдутся точки $\{y_j\}_{j=1}^{k-n}$ ($t_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{k-n} < t_s$) вместе с некоторыми окрестностями, в которых функция $h^{(n)}$ принимает значения с чередующимися знаками. При этом $\text{sign } h^{(n)}(y_1) = (-1)^n \text{sign } h(x_1)$.

Предположим, что найдется такой отрезок $[t_i, t_{i+1}]$, на котором лежат две или более точек из построенного набора $\{y_j\}$. Тогда в одной из этих двух точек (а также в некоторой ее окрестности) знаки функций $g^{(n)}$ и $h^{(n)}$ совпадут. Следовательно, в этой окрестности выполнено $|g_*^{(n)}| = |g^{(n)}| + |h^{(n)}| = 1 + |h^{(n)}| > 1$, т.е. $g_* \notin \mathcal{D}^n$. Таким образом, на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ лежит не более одной точки из набора $\{y_j\}$; следовательно, верно неравенство $k - n \leq s$. Поскольку по п. 2) теоремы $k - n \geq s$, можно утверждать, что $k - n = s$ и $y_j \in (t_{j-1}, t_j)$ при $j = 1, \dots, s$.

Поскольку точка $y_1 \in (t_0, t_1)$, согласно п. 1) теоремы верно равенство $\text{sign } g^{(n)}(y_1) = (-1)^n \text{sign } (f - g)(x_1)$. С другой стороны, по (4) верно равенство $\text{sign } (f - g)(x_1) = \text{sign } h(x_1)$; значит,

$$\text{sign } g^{(n)}(y_1) = (-1)^n \text{sign } (f - g)(x_1) = (-1)^n \text{sign } h(x_1) = \text{sign } h^{(n)}(y_1).$$

Таким образом, в точке $y_1 \in (t_0, t_1)$ знаки функций $g^{(n)}$ и $h^{(n)}$ совпали, что противоречит включению $g_* \in \mathcal{D}^n$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть дан элемент наилучшего приближения g_* ; необходимо проверить для него выполнение всех условий теоремы. Далее под *уклонением* мы будем понимать величину $\|f - g_*\|$. Доказательство мы разобьем на несколько этапов.

Этап 1. Определим множество M как

$$M = \left\{ x \in [a, b]: \overline{\lim}_{y \rightarrow x} g_*^{(n)}(y) = 1 \text{ или } \underline{\lim}_{y \rightarrow x} g_*^{(n)}(y) = -1 \right\}.$$

Обозначим $\overline{M} = [a, b] \setminus M$. Поскольку множество M замкнутое, на любом отрезке $[u, v] \subset \overline{M}$ выполнено $\|g_*^{(n)}\|_{C[u, v]} < 1 - r([u, v])$ для некоторой константы $r([u, v]) > 0$, зависящей от $[u, v]$.

Выберем произвольный непустой отрезок $[c, d] \subset [a, b]$. Выделим рядом с ним (если $a < c$) непустой отрезок $[c_1, c]$. Аналогично выделим непустой отрезок $[d, d_1]$. Предположим, что $[c_1, d_1]$ — это “+”-отрезок, а отрезки $[c_1, c]$ и $[d, d_1]$ принадлежат $\overline{M}$.

На отрезке $[c, d]$ определим функцию $h(x) = -g_*(x) + A$. Тогда на отрезке $[c, d]$ выполнится равенство $h^{(n)} = -g_*^{(n)}$. Кроме того, увеличивая константу A в определении h можно добиться выполнения неравенства $h > 0$ на отрезке $[c, d]$. По лемме 5 можно построить положительную функцию $h_1 \in AC^{n-1}[c_1, c]$ такую, что $h_1^{(i)}(c_1) = 0$ и $h_1^{(i)}(c) = h^{(i)}(c)$ для $i \in 0, \dots, n-1$. Пусть функция $h(x) \equiv 0$ при $x < c_1$, $h \equiv h_1$ на отрезке $[c_1, c]$. Аналогично продолжим функцию h справа от точки d .

В результате мы получили функцию h , удовлетворяющую лемме 2 на отрезке $[c_1, d_1]$ и равную нулю вне его; следовательно, существует функция $g_\varepsilon > 0$ такая, что $\|f - g_\varepsilon\| \leq \|f - g_*\|$ и $g_\varepsilon \in \mathcal{D}^n$. При этом выполняется неравенство $\|f - g_\varepsilon\|_{C[c, d]} < \|f - g_*\|_{C[c, d]}$.

Таким образом, если есть некоторый отрезок $[c, d]$, к которому примыкает интервал $(c_1, c) \subset \overline{M}$ (или $c = a$) и примыкает $(d, d_1) \subset \overline{M}$ (или $d = b$), причем (c_1, d_1) является “+”- или “-”-интервалом, то можно построить такую поправку εh к функции g_* , которая в целом на $[a, b]$ не увеличивает уклонение и не выводит g_* за пределы $\mathcal{D}^n$, но локально на $[c, d]$ уменьшает уклонение и удаляет точки из M .

Значит, можно считать, что множество M

1) не пусто, так как иначе при помощи описанной процедуры легко уменьшить уклонение на всем отрезке, что противоречит наилучшести g_* ;

2) состоит только из отрезков длиной не менее чем $\gamma/4$ (см. (2)), так как более короткие отрезки и изолированные точки будут заведомо “+”- или “-”-отрезками, и иметь примыкающие интервалы, лежащие в $\overline{M}$;

3) каждый из отрезков, найденных в предыдущем пункте, есть замыкание набора интервалов, на которых $g_*^{(n)} \equiv 1$ или $g_*^{(n)} \equiv -1$. От противного, пусть есть отрезок $[c, d] \subset M$, не удовлетворяющий этому высказыванию. Это значит, что на нем найдется интервал (u, v) такой, что внутри него нет ни одного интервала постоянства $g_*^{(n)}$.

Поскольку производная непрерывна в некоторой окрестности каждой точки своего существования, можно сделать вывод, что на интервале (u, v) функция $g_*^{(n)}$ не существует, что противоречит включению $g_* \in \mathcal{D}^n$.

Этап 2. Назовем *участком пилообразности* набор смежных интервалов, на которых поочередно $g_*^{(n)} \equiv 1$ или $g_*^{(n)} \equiv -1$. Друг от друга интервалы отделены точками разрыва функции $g_*^{(n)}$. Под *мощностью* участка пилообразности мы будем понимать количество смежных интервалов, из которых он состоит.

Выше мы доказали, что если функция $g_* - \text{ЭНП}$, то существует хотя бы один участок пилообразности, по крайней мере, из одного интервала. Кроме того, можно считать, что все множество M есть объединение конечного числа участков пилообразности, которые, впрочем, могут состоять из бесконечного числа смежных интервалов. На любом интервале внутри участка пилообразности точки разрыва $g_*^{(n)}$ не могут быть всюду плотны (так как тогда $g_*^{(n)}$ на этом интервале не существует), но они могут иметь точки сгущения. Точки сгущения разрывов также не могут быть плотны на любом интервале. Это значит, что в любой достаточно малой окрестности любой точки сгущения нет других точек сгущения и, следовательно, есть (по крайней мере, с одной стороны от нее) участок пилообразности из произвольного конечного количества интервалов.

Пусть имеется некоторый отрезок $[u, v] \subset [a, b]$ такой, что к нему примыкают два участка пилообразности: $\{(u_{i-1}, u_i)\}_{i=-n-1}^0$ и $\{(v_j, v_{j+1})\}_{j=0}^{n+1}$, причем $u_0 = u$ и $v_0 = v$, а отрезок $[u_{-n-1}, v_{n+1}]$ является “+”-отрезком. Определим на отрезке $[u, v]$ функцию

$$h(x) = -g_*(x) + A + B \cdot \left(x - \frac{u+v}{2}\right)^{n-1}.$$

Видно, что выполняется равенство $h^{(n)} = -g_*^{(n)}$. Кроме того, увеличивая A , можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство $h > 0$ на отрезке $[u, v]$, а увеличивая B , можно добиться еще и выполнения равенств $\text{sign } h^{(i)}(u) = (-1)^i$ и $h^{(i)}(v) > 0$ при $i \in 0, \dots, n-1$.

Построим сплайн $h_1 \in S_n[u_{-n}, u_{-n+1}, \dots, u_0]$, определяемый следующими краевыми условиями: при $i \in 0, \dots, n-1$ выполняются равенства $h_1^{(i)}(u_{-n}) = 0$ и $h_1^{(i)}(u_0) = h^{(i)}(u_0)$. По лемме 3 такой сплайн существует. Также построим сплайн $h_2 \in S_n[v_0, v_1, \dots, v_n]$ с краевыми условиями $h_2^{(i)}(v_n) = 0$ и $h_2^{(i)}(v_0) = h^{(i)}(v_0)$ при $i \in 0, \dots, n-1$. Этот сплайн существует по лемме 4. Пусть функция h на отрезке $[u_{-n}, u_0]$ равна функции h_1 , а на отрезке $[v_0, v_n]$ — функции h_2 . Если окажется, что на отрезке $[u_{-n}, u_0]$ выполнено $\text{sign } g_*^{(n)} = \text{sign } h^{(n)}$, то необходимо присоединить к $[u, v]$ интервал (u_1, u_0) и повторить все рассуждения на отрезке $[u_{-n-1}, u_1]$. Мы снова попадем в условия леммы 3, но на этот раз получим $\text{sign } g_*^{(n)} = -\text{sign } h^{(n)}$. При необходимости аналогично можно поступить и на отрезке $[v_0, v_{n+1}]$. Продолжим функцию h на оставшийся отрезок $[a, b]$ тождественным нулем. Получили функцию h , удовлетворяющую условиям леммы 2 на отрезке $[u_{-n}, v_n]$; значит, существует функция $g_\varepsilon \in \mathcal{D}^n$ такая, что на отрезке $[u_{-n}, v_n]$ нет точек из множеств $Q_{+1}(g_\varepsilon)$ и $Q_{-1}(g_\varepsilon)$ и участков пилообразности функции g_ε . При этом неважно, сколько точек сгущения лежало на отрезке $[u, v]$.

Таким образом, мы можем считать, что если участок пилообразности является “+”-или “-”-отрезком и на нем можно выделить по $n+1$ смежному интервалу с каждого конца, то он состоит не более чем из $2n+3$ интервалов. Следовательно, можно считать,

что у нас нет точек сгущения, к которым точки разрывов сгущаются с двух сторон, поскольку достаточно малая окрестность самой точки сгущения будет заведомо “+”- или “-”-отрезком, а также будет иметь по набору из $n + 1$ интервалов с каждого конца. Кроме того, мы можем считать, что у односторонних точек сгущения со стороны сгущения участок пилообразности сколь угодно короткий, а далее есть интервал, на котором $|g_*^{(n)}| < 1 - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и нет точек максимального уклонения. Таким образом, можно считать, что есть только участки пилообразности конечной мощности, возможно с примыкающими к ним на краях точками сгущения.

Этап 3. Рассмотрим произвольный максимальный по включению участок пилообразности конечной мощности. Покажем, что если на нем нет жесткого звена, то можно построить поправку к g_* , которая на этом участке одновременно уменьшит уклонение и уменьшит модуль $g_*^{(n)}$, тем самым мы избавимся от этого участка пилообразности. Действуя таким образом, мы или найдем жесткое звено, или покажем, что g_* не является ЭНП.

Предположим, что на рассматриваемом участке пилообразности нет жесткого звена. По определению он состоит из s смежных интервалов $\{(t_i, t_{i+1})\}_{i=0}^{s-1}$. Из максимальной по включению следует, что либо существует константа $\delta > 0$ такая, что на интервале $(t_0 - \delta, t_0)$ выполнено неравенство $|g_*^{(n)}(x)| < 1$, либо t_0 – односторонняя точка сгущения (разрывы сгущаются слева). В обоих случаях мы можем считать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на интервале $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 - \varepsilon)$ нет точек максимального уклонения и выполнено неравенство $|g_*^{(n)}| \leq 1 - \varepsilon_1$ для какой-то константы $\varepsilon_1 > 0$. Аналогично можно считать, что на интервале $(t_s + \varepsilon, t_s + 2\varepsilon)$ выполнено неравенство $|g_*^{(n)}| \leq 1 - \varepsilon_1$.

Построим на $[t_0, t_s]$ функцию h такую, что

$$h > 0 \text{ на } Q_{+1}(g_*) \text{ и } h < 0 \text{ на } Q_{-1}(g_*), \quad (5)$$

и, кроме того,

$$\text{sign } h^{(n)} = -\text{sign } g_*^{(n)}. \quad (6)$$

Продолжим построенную функцию h влево от точки t_0 с гладкостью $n - 1$ полиномом степени $n - 1$ до точки $t_0 - \varepsilon$. Поскольку число ε сколь угодно мало, можно считать, что выполнено равенство $\text{sign}(h|_{(t_0-\varepsilon, t_0)}) = \text{sign } h(t_0)$. Далее продолжим функцию h на интервал $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 - \varepsilon)$ по лемме 5 так, чтобы выполнились условия $h^{(i)}(t_0 - 2\varepsilon) = 0$ при $i \in 0, \dots, n - 1$. Совершенно аналогично поступим и справа от точки t_s . Пусть $h \equiv 0$ вне отрезка $[t_0 - 2\varepsilon, t_s + 2\varepsilon]$. Получим функцию h , удовлетворяющую лемме 2. Следовательно, имея такую функцию h , мы сможем избавиться от участка пилообразности $[t_0, t_s]$ вне зависимости от возможного наличия точек сгущения на его концах.

Таким образом, для доказательства теоремы нам осталось показать, что мы можем построить функцию h с условиями (5) и (6). При этом поведение этой функции вне отрезка $[t_0, t_s]$ можно не учитывать, мы всегда сможем ее продолжить за пределы отрезка $[t_0, t_s]$ описанным выше образом.

Мы будем строить функцию h в виде сплайна из класса $S_n[t_0, t_1, \dots, t_s]$. Ниже мы наложим на h интерполяционные условия, обеспечивающие выполнение требования (5). Эти условия будут строиться на основе альтернансного разбиения отрезка $[t_0, t_s]$. Если количество точек в разбиении будет малым, то условий будет недостаточно для однозначного определения сплайна, в этом случае нам понадобятся дополнительные условия. Удобнее всего получить недостающие условия, добавляя в альтернанс “фиктивные

точки". При построении интерполяционных условий мы не будем различать настоящие и фиктивные точки альтернанса. Поскольку будем только добавлять условия, сплайн, построенный с учетом новых условий, будет удовлетворять нашим начальным требованиям. Кроме того, мы будем расширять отрезок $[t_0, t_s]$, т.е. увеличивать область определения сплайна, что тоже никак не скажется на выполнении требований (5) и (6) на исходном отрезке $[t_0, t_s]$. Мы покажем ниже, что наши интерполяционные условия обеспечат и выполнение условия (6). С учетом всех этих оговорок, приступим к построению функции h .

Построим на отрезке $[t_0, t_s]$ расширенный альтернанс $\{X_i\}_{i=1}^k$. Введем обозначение: $S_i = \text{sign}((f - g_*)|_{X_i})$. Имеет место следующее очевидное соотношение $S_i = (-1)^{i+1} S_1$. Поскольку $[t_0, t_s]$ – участок пилообразности, можно ввести следующее обозначение:

$G_i = g_*^{(n)}|_{(t_i, t_{i+1})}$. Также имеет место соотношение $G_i = (-1)^i G_0$.

Обозначим через $D_{i,j}$ разность между количеством выпуклых оболочек множеств расширенного альтернанса $\overline{X_i}$, пересекающихся с $[t_i, t_j]$, и числом $j - i$. Имеет место следующее свойство символа $D_{i,j}$: пусть $p < q < r$; тогда

$$D_{p,r} = D_{p,q} + D_{q,r} - \delta(q), \quad (7)$$

где $\delta(q) = 1$, если $t_q \in \overline{X_l}$ для некоторого l , и $\delta(q) = 0$ в противном случае.

Через W_i будем обозначать номер первого из множеств расширенного альтернанса, пересекающихся с отрезком $[t_i, t_s]$. Пусть $w = W_i$; поскольку на любом отрезке $[t_i, t_j]$ нет жесткого звена, то

$$\begin{aligned} D_{i,j} &\leq n - 1, & \text{если } G_i &= (-1)^n S_w, \\ D_{i,j} &\leq n, & \text{если } G_i &= -(-1)^n S_w. \end{aligned} \quad (8)$$

Это значит, что

$$D_{i,j} \leq n \quad \forall \quad 0 \leq i < j \leq s. \quad (9)$$

Применив условия (8) к отрезку $[t_0, t_s]$, получаем неравенства

$$\begin{aligned} D_{0,s} &\leq n - 1, & \text{если } G_0 &= (-1)^n S_1, \\ D_{0,s} &\leq n, & \text{если } G_0 &= -(-1)^n S_1. \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$G_0 = -(-1)^n S_1. \quad (10)$$

В самом деле, если это не так, то мы можем добавить фиктивную точку альтернанса $x_0 = t_0 - 1$ со знаком уклонения $-S_1$, и принять за новый (t_0, t_1) интервал (x_0, t_1) , считая, что $g_*^{(n)}|_{(x_0, t_0)} \equiv g_*^{(n)}|_{(t_0, t_1)}$. Ясно, что если у нас до добавления не было жесткого звена, то оно и не появилось, так как добавленная точка не может попасть в требуемый теоремой альтернанс из-за условия пункта 1 теоремы. В дальнейшем будем считать, что точки альтернанса пронумерованы с 1 до k и выполнено условие (10).

Рассмотрим три возможных случая: $D_{0,s} = n$, $D_{0,s} = n - 1$ и $D_{0,s} \leq n - 2$.

а) Случай $D_{0,s} = n$. Построим на $[t_0, t_s]$ альтернансное разбиение $\{z_i\}_{i=0}^k$. Введем набор точек $\{y_i\}_{i=0}^k$ и положим $y_i = z_i$. Это значит, что верны неравенства

$$X_i < y_i < X_{i+1} \quad \text{при } i \in 1, \dots, k-1. \quad (11)$$

Наложим на h следующие k интерполяционных условий: $h(y_0) = S_1$, $h(y_i) = 0$ при $i \in 1, \dots, k-1$. Необходимое и достаточное условие существования и единственности такого интерполяционного сплайна заключается (см., например, [2, с. 26–28]) в выполнении равенства $k = s + n$ и в справедливости неравенств $y_{i-1} < t_i < y_{i+n}$ при $i \in 1, \dots, s-1$. Вообще говоря, для исходного набора $\{y_i\}_{i=0}^k$ эти неравенства могут и не выполняться. Покажем, что его можно изменить так, что неравенства выполняются при сохранении (11). Пусть не выполнялось неравенство $t_i < y_{i+n}$. Поскольку $D_{0,i} \leq n$, верно неравенство $t_i < X_{i+n+1}$. Следовательно, точку y_{i+n} можно выбрать так, что выполняются неравенства $t_i < y_{i+n} < X_{i+n+1}$. Пусть не выполнялось неравенство $y_{i-1} < t_i$. Поскольку $D_{i,s} \leq n$, то $D_{0,i} = D_{0,s} - D_{i,s} + \delta(i) \geq n - n + \delta(i) \geq 0$; значит, верно неравенство $X_{i-1} < t_i$, и можно выбрать точку y_{i-1} так, чтобы выполнялись неравенства $X_{i-1} < y_{i-1} < t_i$. Заметим, что если исходная точка y_i не удовлетворяла левому неравенству (т.е. $y_i \geq t_{i+1}$), то она заведомо удовлетворяла правому неравенству (т.е. $y_i \geq t_{i-n}$) и наоборот. Это значит, что описанная процедура выбора точек $\{y_i\}$ корректна.

Значит, сплайн h , определяемый такими условиями, существует и единственен. По теореме Будана–Фурье для сплайнов (см. [3, с. 161]) количество нулей сплайна h с учетом кратности не превосходит $k-1$. Следовательно, кроме точек $\{y_i\}_{i=1}^{k-1}$, сплайн h не имеет других нулей, и все они простые. Кроме того, не существует интервалов, на которых $h \equiv 0$. По построению $h(t_0) = S_1$, функция h меняет знак только в точках y_i между множествами X_i ; следовательно, условие (5) выполнилось.

Мы получили, что функция h принимает значения с чередующимися знаками в k точках альтернанса. По лемме 1 найдется упорядоченный набор из $k-n = s$ точек $\{u_j\}_{j=1}^s$, в которых функция $h^{(n)}$ принимает значения с чередующимися знаками, причем по лемме 1 и соотношению (10) получаем $\text{sign } h^{(n)}(u_1) = (-1)^n \text{sign}(h|_{X_1}) = (-1)^n S_1 = -G_0$. Поскольку обе функции $h^{(n)}$ и $g_*^{(n)}$ лежат в классе $PC[t_0, t_1, \dots, t_s]$, условие (6) также выполнилось и, значит, в случае а) утверждение теоремы доказано.

б) Случай $D_{0,s} = n-1$. Добавим фиктивную точку альтернанса $x_{k+1} = t_s + 1$ с соответствующим знаком уклонения. Так же, как и раньше, расширим интервал (t_{s-1}, t_s) вправо до (t_{s-1}, x_{k+1}) . Покажем, что при таком добавлении не возникло жесткого звена. В самом деле, пусть жесткое звено возникает на отрезке $[t_i, t_s]$. Пусть $l = W_i$; тогда число множеств X_j , пересекавшихся с отрезком $[t_i, t_s]$ до добавления, было равно $D_{0,s} + s - l + 1 = s + n - l$; значит, до добавления выполнялось равенство $D_{i,s} = s + n - l - (s - i) = i + n - l$. Поскольку на отрезке $[t_i, t_s]$ жесткого звена не было, но при добавлении одной точки справа оно возникло, то до добавления выполнялось одно из равенств

- i) $D_{i,s} = n-1$, если $G_i = (-1)^n \cdot S_l$,
- ii) $D_{i,s} = n$, если $G_i = -(-1)^n \cdot S_l$.

В случае i) выполняется равенство $l = i+1$; следовательно,

$$G_0 = (-1)^i G_i = (-1)^{i+n} S_l = (-1)^{i+n+(l+1)} S_1 = (-1)^{2i+n+2} S_1 = (-1)^n S_1.$$

В случае ii) мы имеем равенство $i = l$; следовательно,

$$G_0 = (-1)^i G_i = (-1)^{i+n+1} S_l = (-1)^{i+n+1+(l+1)} S_1 = (-1)^{2i+n+2} S_1 = (-1)^n S_1.$$

В обоих случаях получили $G_0 = (-1)^n S_1$, что противоречит условию (10).

Это значит, что описанное выше добавление сводит случай б) к случаю а). Итак, в случае б) утверждение теоремы также доказано.

с) *Случай* $D_{0,s} \leq n - 2$. Будем добавлять слева и справа фиктивные точки альтернанса с соответствующими знаками уклонения, расширяя отрезок $[t_0, t_s]$ по мере надобности за счет удлинения крайних интервалов. При этом заметим, что если мы смогли добавить слева нечетное количество фиктивных точек, то сможем добавить еще одну; следовательно, по-прежнему будет выполнено условие (10).

В итоге мы либо получим один из двух рассмотренных выше случаев, либо возникнет ситуация, когда при добавлении дополнительной точки слева или справа возникает жесткое звено, но все равно выполнено неравенство

$$D_{0,s} \leq n - 2. \quad (12)$$

Положим

$$p = \max\{i: D_{0,i} \geq n - 1\}, \quad q = \min\{i: D_{i,s} \geq n - 1\}. \quad (13)$$

Множество таких i в обоих определениях не пусто, так как и слева, и справа нельзя добавить фиктивную точку альтернанса без возникновения жесткого звена. Из неравенства (12) следует, что $1 \leq p, q \leq s - 1$.

Согласно (9) и (13) выполняется неравенство $n - 1 \leq D_{0,p} \leq n$. Покажем, что $D_{0,p} = n - 1$. От противного, пусть $D_{0,p} = n$. По определению (13) выполняется неравенство

$$D_{0,p+1} \leq n - 2. \quad (14)$$

По свойству (7) имеем $D_{0,p+1} = D_{0,p} + D_{p,p+1} - \delta(p)$, а по определению $D_{i,j}$ выполняется неравенство $D_{p,p+1} \geq \delta(p) - 1$; следовательно, $D_{0,p+1} \geq D_{0,p} - 1 = n - 1$, что противоречит (14). Установили равенство

$$D_{0,p} = n - 1. \quad (15)$$

Покажем, что $q \geq p$. От противного, предположим, что $q < p$; тогда согласно (12)

$$D_{0,s} = (D_{0,q} + D_{q,p} + D_{p,s} - \delta(q) - \delta(p)) \leq n - 2. \quad (16)$$

Кроме того, по (7) и (13) получаем

$$D_{q,p} + D_{p,s} - \delta(p) = D_{q,s} \geq n - 1 \quad \text{и} \quad D_{0,q} + D_{q,p} - \delta(q) = D_{0,p} = n - 1. \quad (17)$$

Сложение двух этих неравенств дает

$$D_{q,p} \geq 2n - 2 - (D_{0,q} + D_{q,p} + D_{p,s} - \delta(q) - \delta(p)).$$

Применяя (16), получаем неравенство $D_{q,p} \geq n$; тогда из (9) следует, что $D_{q,p} = n$. Пусть $w = W_q$. Из равенства $D_{q,p} = n$ и неравенств (8) для отрезка $[t_q, t_p]$ следует, что

$$G_q = -(-1)^n S_w. \quad (18)$$

Подставляя равенство $D_{q,p} = n$ во второе из равенств (17), получаем равенство $D_{0,q} = -1 + \delta(q)$. С другой стороны, по определению $D_{0,q} = (w - 1) - q + \delta(q)$; значит, выполняется равенство $w = q$. Применяя (18), получаем следующее равенство:

$$G_0 = (-1)^q G_q = (-1)^{n+q+1} S_w = (-1)^{n+q+w} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (10).

Доказали, что $p \leq q$. Равенство $p = q$ также невозможно, так как в этом случае будет иметь место неравенство $D_{0,s} \geq D_{0,p} + D_{p,s} - 1 \geq 2n - 3$. Учитывая (3), получаем, что $D_{0,s} \geq 2n - 3 \geq n - 1$, что противоречит (12). Следовательно, верно неравенство $p < q$.

Введем следующие обозначения:

$$l = \max\{i: X_i \text{ пересекается с } [t_0, t_p]\}, \quad r = \max\{i: [t_0, t_i] \text{ не пересекается с } X_{l+1}\}.$$

Очевидно, что $p \leq r$. Заметим, что $l = D_{0,p} + p$, что с учетом (15) дает равенство $l = p + n - 1$. Поскольку $p \geq 1$ и $n \geq 2$, то $l \geq 2$.

Далее рассмотрим два подслучая:

- 1) $r \geq l$;
- 2) $r < l$.

1) Подслучай $r \geq l$. Это неравенство означает, что на $[t_p, t_l]$ нет точек из X_{l+1} . В этом случае мы построим функцию $h \in S_n[t_0, t_1, \dots, t_l]$ и продолжим ее при помощи тождественно равной нулю функции на $[t_l, t_s]$. Потребуем, чтобы h удовлетворяла условиям (5) и (6) только на промежутке $[t_0, t_l]$. Такая функция h позволит уменьшить отклонение не на всем отрезке $[t_0, t_s]$, а только на $[t_0, t_l]$. Кроме того, она избавит нас от участка пилообразности $[t_0, t_l]$. В результате мы вернемся на начало этапа с отрезком $[t_l, t_s]$ в качестве нового $[t_0, t_s]$. Поскольку $l \geq 2$, то в нем будет меньше интервалов (t_i, t_{i+1}) , чем в $[t_0, t_s]$.

Построим на отрезке $[t_0, t_l]$ альтернансное разбиение $\{z_i\}_{i=0}^l$. Введем в рассмотрение набор точек $\{y_i\}_{i=0}^l$ и первоначально положим $y_i = z_i$. Потребуем от h выполнения следующих интерполяционных условий:

- 1) $h(y_0) = S_1, h(y_i) = 0$ при $i \in 1, \dots, l - 1$;
- 2) в точке t_l функция h должна с гладкостью $n - 1$ сопрягаться с нулевой функцией, т.е. $h(t_l) = h'(t_l) = \dots = h^{(n-1)}(t_l) = 0$.

Необходимыми и достаточными условиями существования и единственности интерполяционного сплайна с краевыми условиями являются (см. [4, с. 85]):

- i) равенство количества условий интерполяции и числа свободных параметров;
- ii) выполнение неравенств $d_i \geq i + 1$, при $i \in 0, \dots, n + 1$, где d_i — есть количество условий, наложенных на сплайн и его производные вплоть до порядка i ;
- iii) выполнение неравенств $k_{ai} \geq i$ и $k_{bi} \geq l - i$, где k_{ai} и k_{bi} есть количество всех условий, наложенных на сплайн и все его производные на промежутках $[t_0, t_i]$ и $(t_i, t_l]$ соответственно.

Покажем, что эти условия выполняются.

i) Число условий интерполяции и число свободных параметров равно $l + n$.

ii) Имеется $l + 1$ интерполяционное условие на сам сплайн и по одному условию на каждую его производную вплоть до порядка $n - 1$. Это значит, что при $i \leq n - 1$ выполняется $d_i = l + 1 + i \geq i + 1$. Учитывая, что $l \geq 2$, получаем оставшиеся неравенства $d_n = l + n \geq n + 1$ и $d_{n+1} = l + n \geq n + 2$.

iii) Установим первое неравенство. От противного, пусть для какого-то i выполнено $k_{ai} < i$, т.е. $y_i > t_i$. Покажем, что мы можем выбрать точку y_i так, что выполнится $X_i < y_i < t_i$. В самом деле, это невозможно, только если множество X_i пересекается с отрезком $[t_i, t_p]$. Это означает, что

$$D_{i,p} \geq (l - (i - 1)) - (p - i) = n.$$

Из неравенства (9) следует, что $D_{i,p} = n$, а это с учетом (8) влечет равенство $G_i = -(-1)^n S_i$, и тогда

$$G_0 = (-1)^i G_i = (-1)^{n+1+i} S_i = (-1)^{n+1+i+(i-1)} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (10). Таким образом, мы всегда можем выбрать точку y_i между X_i и X_{i+1} так, что неравенство $k_{ai} \geq i$ выполнится.

Установим второе неравенство. При $i \geq p$ будет $l - i \leq n - 1$, при этом $k_{bi} = n$, так как в точке t_l имеется ровно n условий. Поэтому осталось установить неравенство только при $i < p$. Допустим противное, что $k_{bi} < l - i$ для некоторого i , т.е. число условий интерполяции на отрезке $[t_i, t_l]$ строго меньше $l - i$. В точке t_l наложено n условий интерполяции; на промежутке $(t_p, t_l]$ других условий нет; следовательно, на отрезке $[t_i, t_p]$ условий строго меньше, чем $l - i - n$. На отрезке $[t_0, t_p]$ имеется ровно l условий; значит, на отрезке $[t_0, t_i]$ их строго больше, чем $l - (l - i - n) = i + n$, т.е. $D_{0,i} > n$, что невозможно по (9).

Таким образом, такой сплайн h существует и единственен. По теореме Будана–Фурье для сплайнов других нулей, кроме точек $\{y_i\}_{i=1}^l$, у сплайна h нет. По построению точка t_l есть нуль кратности n ; следовательно, все остальные нули $\{y_i\}_{i=1}^{l-1}$ простые, в них сплайн меняет знак. Это значит, что на отрезке $[t_0, t_l]$ условие (5) выполнилось.

Покажем теперь, что на отрезке $[t_0, t_l]$ условие (6) также выполнилось. Доказательство этого факта похоже на доказательство леммы 3, поэтому приведем его схематично. Мы знаем, что сплайн h принимает на упорядоченном наборе из $l + 1$ точки (альтернанс и точка t_l) знаки $S_1, -S_1, \dots, \pm S_1, 0$. Следовательно, h' (с учетом краевого условия) принимает на другом упорядоченном наборе из $l + 1$ точки значения со знаками $-S_1, S_1, \dots, \mp S_1, 0$. Продолжая этот процесс, мы убедимся, что $h^{(n-1)}$ в $(l + 1)$ точке принимает значения со знаками $(-1)^{n-1} S_1, -(-1)^{n-1} S_1, \dots, \pm (-1)^{n-1} S_1, 0$. Таким образом, функция $h^{(n)}$ в l точках принимает значения со знаками $(-1)^n S_1, -(-1)^n S_1, \dots, \mp (-1)^n S_1$. Учитывая (10), получаем

$$\text{sign}(h^{(n)}|_{(t_0, t_1)}) = (-1)^n S_1 = -G_0 = -\text{sign}(g_*^{(n)}|_{(t_0, t_1)}).$$

Поскольку $h^{(n)} \in PC[t_0, \dots, t_l]$, на отрезке $[t_0, t_l]$ условие (6) также выполнилось.

2) Подслучай $r < l$. В этом случае мы добавим специальным образом внутрь отрезка $[t_0, t_s]$ две фиктивные точки альтернанса и покажем, что при этом не возникнет

жесткого звена. После этого надо будет вернуться на начало этапа, при этом k увеличится на 2, а s останется без изменений.

По построению, выполнено неравенство $p \leq r$, на $[t_0, t_r)$ нет точек из X_{l+1} , а также, по предположению,

$$r < l. \quad (19)$$

Опишем алгоритм добавления пары фиктивных точек альтернанса. Мы расположим их между множествами X_l и X_{l+1} с соответствующими знаками уклонения. Если $X_l \subset [t_0, t_p)$, то добавим две фиктивные точки альтернанса в промежуток (t_p, t_{p+1}) , иначе добавим их строго между X_l и следующей точкой t_i . Видно, что в любом случае они попадут внутрь одного интервала (t_i, t_{i+1}) , причем $i \geq p$.

Покажем, что добавление этих двух точек по описанному алгоритму не вызовет появления жесткого звена. В самом деле, пусть возникло жесткое звено на отрезке $[t_u, t_v]$. Поскольку обе добавленные точки альтернанса лежат на отрезке $[t_u, t_v]$, то $p < v$, что с учетом (13) дает неравенство

$$D_{0,v} \leq n - 2. \quad (20)$$

Покажем, что $u \geq p$. Предположим, что $u < p$; тогда получаем следующую цепочку неравенств: $0 \leq u < p < v$. Из (7) и (15) следует равенство

$$n - 1 = D_{0,p} = D_{0,u} + D_{u,p} - \delta(u), \quad (21)$$

поэтому

$$D_{u,p} = (n - 1) - D_{0,u} + \delta(u). \quad (22)$$

По свойству (7) и неравенству (20) получаем неравенство $D_{0,v} = D_{0,u} + D_{u,v} - \delta(u) \leq n - 2$, откуда $D_{0,u} \leq (n - 2) + \delta(u) - D_{u,v}$. Подставляя это неравенство в (22), получаем неравенство

$$D_{u,p} \geq D_{u,v} + 1. \quad (23)$$

Пусть $w = W_u$. Возникновение жесткого звена при добавлении этих двух точек означает, что до добавления выполнялось одно из двух неравенств:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & D_{u,v} \geq n - 2, \quad \text{если } G_u = (-1)^n S_w, \\ \text{ii)} \quad & D_{u,v} \geq n - 1, \quad \text{если } G_u = -(-1)^n S_w. \end{aligned} \quad (24)$$

В случае i) выполняется неравенство $D_{u,v} \geq n - 2$; подставляя его в (23), получаем неравенство $D_{u,p} \geq n - 1$. Поскольку $G_u = (-1)^n S_w$, и на отрезке $[t_u, t_p]$ нет жесткого звена, из (8) получаем $D_{u,p} \leq n - 1$. Значит, $D_{u,p} = n - 1$. Подставляя это равенство в (21), получаем равенство

$$D_{0,u} = \delta(u). \quad (25)$$

Поскольку X_w – первое из множеств, пересекающееся с $[t_u, t_s]$, то $\delta(u) = 1$, только если X_w пересекается и с $[t_0, t_u]$. Следовательно, равенство (25) означает, что $w - 1 = u$, и мы получаем

$$G_0 = (-1)^u G_u = (-1)^{n+u} S_w = (-1)^{n+u+w-1} S_1 = (-1)^{n+u+u} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (10).

Аналогично, в случае ii) выполняется неравенство $D_{u,v} \geq n - 1$. Подставляя его в (23), получаем $D_{u,p} \geq n$. Тогда из (9) следует, что $D_{u,p} = n$. Подставляя это равенство в (21), будем иметь $D_{0,u} = \delta(u) - 1$. Из этого равенства получаем, что $w - 1 = u - 1$. Следовательно,

$$G_0 = (-1)^u G_u = -(-1)^{n+u} S_w = -(-1)^{n+u+w-1} S_1 = -(-1)^{n+u+u-1} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (10). Следовательно, $p \leq u$.

Покажем, что $p < u$. Предположим противное; пусть $u = p$. Рассмотрим два случая:

i) $\delta(p) = 0$;

ii) $\delta(p) = 1$.

В случае i) X_l не пересекается с $[t_p, t_v]$; следовательно, с учетом (3) и (24) получаем соотношение $D_{0,v} = D_{0,p} + D_{p,v} \geq n - 1 + n - 2 = 2n - 3 \geq n - 1$, которое противоречит (20).

В случае ii) множество X_l является первым из множеств расширенного альтернанса, которые пересекаются с $[t_p, t_v]$; следовательно,

$$D_{0,v} = D_{0,p} + D_{p,v} - 1 \geq (n - 1) + (n - 2) - 1 = 2n - 4.$$

Применение (20) дает $2n - 4 \leq n - 2$, т.е. $n \leq 2$. Сопоставив последнее неравенство с (3), получаем, что в этом случае $n = 2$.

Поскольку $l = p + n - 1$, то

$$G_p = (-1)^p G_0 = -(-1)^{n+p} S_1 = -(-1)^{n+p+p+n} S_l = -S_l. \quad (26)$$

Подставляем $n = 2$ в (24); с учетом (26) будем иметь неравенство $D_{p,v} \geq n - 1$. Отсюда устанавливаем следующее неравенство:

$$D_{0,v} = D_{0,p} + D_{p,v} - 1 \geq (n - 1) + (n - 1) - 1 = 2n - 3 \geq n - 1,$$

что противоречит (20).

Таким образом, в любом случае верно неравенство $p < u$.

По алгоритму добавления точек выполнено неравенство $u \leq r$, т.е. верны следующие неравенства: $p < u \leq r$. Это значит, что на (t_p, t_u) не может быть других множеств альтернанса, кроме X_l ; отсюда $D_{0,u} = l - u = (p + n - 1) - u = (n - 1) - (u - p)$. По построению добавленные точки лежат правее t_u . Учитывая неравенство $u \geq p + 1$, можно утверждать, что добавленные точки лежат правее t_{p+1} . По алгоритму добавления точек получаем, что X_l пересекается с $[t_u, t_v]$, т.е. $\delta(u) = 1$. Таким образом, справедливы равенства

$$D_{0,v} = D_{0,u} + D_{u,v} - 1 = (n - 1) - (u - p) + D_{u,v} - 1.$$

В сочетании с (20) получаем неравенство

$$u - p \geq D_{u,v}. \quad (27)$$

В силу (24) в любом случае имеет место неравенство $D_{u,v} \geq n - 2$; отсюда по (27) следует, что $u - p \geq n - 2$, т.е. $u \geq p + n - 2 = l - 1$.

Рассмотрим два случая:

i) $u < r$;

ii) $u = r$.

В случае i) получаем $r > u \geq l - 1$, т.е. $r \geq l$, что противоречит (19).

В случае ii) справедливо неравенство $r \geq l - 1$. По (19) имеет место неравенство $r < l$, поэтому $u = r = l - 1$. Отсюда получаем, что

$$G_{l-1} = (-1)^{l-1} G_0 = (-1)^{n+l} S_1 = (-1)^{n+l+l-1} S_l = -(-1)^n S_l.$$

Поскольку X_l — первое из множеств расширенного альтернанса, пересекающихся с отрезком $[t_u, t_v]$, в формуле (24) надо использовать $w = l$. Следовательно, по формуле (24) и с учетом равенства $G_{l-1} = -(-1)^n S_l$ устанавливаем неравенство $D_{u,v} \geq n - 1$. Подставляя его в (27), получаем неравенство $u - p \geq n - 1$. Итак, имеет место неравенство $r - p \geq n - 1$, и, значит, $r \geq p + n - 1 = l$, что противоречит (19).

Таким образом, предположив, что при описанном добавлении двух фиктивных точек альтернанса возникает жесткое звено, мы пришли к противоречию. Подслучай 2) случая с) полностью рассмотрен.

Теорема доказана.

Автор благодарит В. И. Бердышева за постановку задачи и С. Н. Васильева за помощь в работе над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
- [2] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. М. Методы сплайн функций. М.: Наука, 1980.
- [3] Larry L. Schumaker Spline functions: basic theory. New York, 1981.
- [4] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.

Поступило
25.06.2002