Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Сагиров, О конечных группах, степени немономиальных характеров которых – простые числа, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 713–718

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:26:49

УДК 512.54

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, СТЕПЕНИ НЕМОНОМИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРОВ КОТОРЫХ – ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

И. А. Сагиров

Доказана разрешимость конечных групп, степени немонотомальных характеров которых являются простыми числами. Доказательство опирается на классификацию конечных простых групп.

Библиография: 7 названий.

Пусть $\text{Irr}(G)$ обозначает множество неприводимых характеров конечной группы G (рассматриваются только конечные группы), $\text{Lin}(G)$ – множество линейных неприводимых характеров G , $\text{Irr}_1(G) = \text{Irr}(G) \setminus \text{Lin}(G)$. Характер χ группы G называется *монотомальным*, если $\chi = \lambda^G$ для линейного характера λ некоторой подгруппы группы G . Конечная группа G называется *М-группой*, если каждый ее неприводимый характер монотомален. Известно, что М-группы разрешимы [1, 10.1]. С другой стороны, согласно результату Дэйда [2, V. 18.11] всякая разрешимая группа вкладывается в М-группу той же производной длины, а потому полная классификация М-групп вряд ли возможна. В связи с этим представляет интерес исследование групп, в некотором смысле несильно отличающихся от М-групп. Один из первых шагов в этом направлении был сделан И. А. Чубаровым, который, в частности, рассматривал простые группы, имеющие единственный немонотомальный характер [3]. В данной работе изучаются группы, степени немонотомальных характеров которых простые числа. Основным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА. *Если степени немонотомальных неприводимых характеров группы G простые числа, то G разрешима.*

При доказательстве используется классификация конечных простых групп. Кроме того, предполагается, что читатель знаком с теоремой Диксона о строении подгрупп группы $PSL_2(q)$ [2, II.8.27] и с таблицами характеров групп $PSL_2(q)$ с нечетным q [4, с. 260–263].

Пусть G – минимальный контрпример к гипотезе о разрешимости групп указанного вида. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , а фактор-группа G/N разрешима. Зафиксируем обозначения G и N до конца работы.

Пусть χ – неприводимый немонотомальный характер группы G . Тогда $\chi(1) = p$ – простое число и для любой подгруппы H , нормальной в G , либо $H' \leq \text{Ker}(\chi)$, либо $\chi|_H \in \text{Irr}(H)$. Допустим, что все точные неприводимые характеры G монотомальны.

Пусть ξ – точный неприводимый характер G наименьшей степени. Тогда $\xi = \lambda^G$ для некоторого $\lambda \in \text{Lin}(H)$, $H \leq G$. Из минимальности степени ξ следует, что

$$1_H^G = 1_G + \sum a_i \psi_i$$

с $N \leq \text{Ker}(\psi_i)$ для всех i , откуда $N \leq H'$, $N \leq \text{Ker}(\lambda)$ и, следовательно, $N \leq \text{Ker}(\xi)$; противоречие. Значит, группа G имеет точный неприводимый немонотонный характер χ .

Так как χ – точный неприводимый немонотонный характер G , то $\chi(1) = p$ простое. В силу минимальности $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные неабелевы простые группы ($1 \leq i \leq k$). Поскольку $\chi|_N \in \text{Irr}_1(N)$ и $\chi(1)$ – простое число, можно считать, что $\chi|_N = \phi \cdot 1_{N_2} \cdot \dots \cdot 1_{N_k}$, $\phi \in \text{Irr}_1(N_1)$. Тогда $N_2 \times \dots \times N_k \leq \text{Ker}(\chi)$. Отсюда $N = N_1$ – неабелева простая группа. Кроме того, поскольку $\chi(1) = p$ и $\chi|_N \in \text{Irr}_1(N)$, для $P \in \text{Syl}_p(N)$ выполняется $|P| = p$ [1, 18.4].

ЛЕММА 1 (Тейт, [3, IV.4.7]). Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$ и подгруппа M нормальна в группе G . Если $P \cap M \leq \Phi(P)$, где $\Phi(P)$ – подгруппа Фраттини группы P , то M имеет нормальное p -дополнение.

ЛЕММА 2. Пусть степени немонотонных характеров группы G простые числа. Если χ – точный неприводимый немонотонный характер степени p группы G , то G/N – циклическая группа, $|G : N| \mid p - 1$ и G/N вкладывается в $\text{Out } N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in \text{Syl}_p(N)$, $P_1 \in \text{Syl}_p(G)$ и $P \leq P_1$. По доказанному $|P| = p$. Пусть $z \in Z(P_1)$. Тогда $(|G : C_G(z)|, \chi(1)) = 1$ и по лемме Бернсайда либо $\chi(z) = 0$, либо $z \in Z(G)$. В силу минимальности N последнее невозможно и, значит, χ исчезает на $Z(P_1)^\#$. Отсюда $|Z(P_1)| \mid \chi(1) = p$. Так как $P_1 \cap N = P$ и $|P| = p$, то $Z(P_1) = P$.

Предположим, что P_1 неабелева. Тогда $P = Z(P_1) \leq P'_1 \leq \Phi(P)$. То есть $P_1 \cap N \leq \Phi(P_1)$ и по лемме 1 группа N имеет нормальное p -дополнение; противоречие. Значит, P_1 абелева и $P_1 = Z(P_1) = P$. Если теперь $z \in C_G(P)^\#$, то $\chi(z) = 0$, $|C_G(P)| \mid \chi(1) = p$ и $C_G(P) = P$. По лемме Фраттини $G = NN_G(P)$ и $N_G(P)$ – группа Фробениуса с ядром P . Поэтому $|G : N| = |N_G(P) : N_N(P)| \mid p - 1$ и G/N циклическая.

Если теперь элемент $g \in G \setminus N$, действуя сопряжениями, индуцирует внутренний автоморфизм группы N , то существует элемент $n \in N$, производящий тот же автоморфизм. Тогда $n^{-1}g$ централизует N , а так как $C_G(P) = P$, то $g \in N$; противоречие. Отсюда $G/N \leq \text{Out } N$.

Так как G/N – циклическая, то для любого $\phi \in \text{Irr}(G)$ $\phi|_N = \sum \xi^{g_i}$, где $\xi \in \text{Irr}(\phi|_N)$ и $G = \cup g_i I_G(\xi)$.

ЛЕММА 3. Пусть L – присоединенная группа Лиэва типа над полем характеристики p , St – характер Стейнберга группы L . Тогда для любого $\alpha \in \text{Aut } L$ выполняется $St^\alpha = St$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала L – группа Шевалле, а Π – система простых корней, соответствующая L . Тогда согласно [5, с. 230, 231] $St = \sum_{\pi} (-1)^{|\pi|} 1_{P_{\pi}}^L$, где сумма берется по всем подмножествам множества простых корней, а P_{π} – соответствующая π

параболическая подгруппа L . Если ϕ – внутренний автоморфизм группы L , то очевидно, $(1_{P_\pi}^L)^\phi = 1_{P_\pi}^L$. Если ϕ – диагональный или полевой автоморфизм L , то ϕ оставляет на месте корневые подгруппы L [5, с. 148], а потому также не изменяет $1_{P_\pi}^L$. Пусть поэтому ϕ – графовый автоморфизм L . Тогда $(1_{P_\pi}^L)^\phi = 1_{P_\pi^\phi}^L = 1_{P_{\pi\phi}}^L$, а $|\pi| = |\pi^\phi|$. Отсюда

$$St^\phi = \sum_{\pi} (-1)^{|\pi|} (1_{P_\pi}^L)^\phi = \sum_{\pi} (-1)^{|\pi^\phi|} 1_{P_{\pi\phi}}^L$$

и $St^\phi = St$.

Пусть теперь L – скрученная группа. Тогда L – множество неподвижных точек X_σ некоторого автоморфизма σ группы Шевалле X . В этом случае для любого σ -инвариантного подмножества π множества простых корней Π , соответствующего X , через π' обозначим множество σ -орбит в π . Тогда

$$St = \sum_{\pi} (-1)^{|\pi'|} 1_{P_\pi}^L,$$

где сумма берется по всем σ -инвариантным подмножествам множества простых корней, а P_π – параболическая подгруппа L , соответствующая π [5, с. 230, 231]. Графовых автоморфизмов скрученные группы не имеют [5, с. 180]. Если же ϕ – внутренний, диагональный или полевой автоморфизм L , то ϕ не изменяет $1_{P_\pi}^L$, а потому $St^\phi = St$.

Так как любой автоморфизм группы L является произведением внутреннего, диагонального, полевого и графового, то $St^\alpha = St$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Как и ранее через G мы обозначаем минимальный контрпример к гипотезе о разрешимости групп указанного вида.

Согласно классификации конечных простых групп N изоморфна либо простой группе лиева типа, либо знакопеременной группе подстановок n символов ($n \geq 5$), либо одной из 26 sporadic простых групп. Рассмотрим все возможности для N .

(i) Если N изоморфна простой группе лиева типа над полем характеристики r , то рассмотрим характер Стейнберга St группы N . Пусть $St \in \chi|_N$ для некоторого $\chi \in \text{Irr}(G)$. Допустим, что χ немонотонен. Тогда $\chi|_N = St$ и $\chi(1) = St(1) = |N|_r$ – простое число. Отсюда $|N|_r = r$, что возможно лишь в случае $N \cong PSL_2(r)$, r нечетно.

Таблица характеров группы $PSL_2(r)$ для нечетного r приведена в [4, с. 262, 263]. Если $r \equiv 1 \pmod{4}$, то $\text{Irr}_1(PSL_2(r))$ содержит два характера степени $(r+1)/2$, $k = (r-1)/4$ характеров степени $r-1$, характер Стейнберга степени r и $l = (r-5)/4$ характеров степени $r+1$. Если $r \equiv 3 \pmod{4}$, то $\text{Irr}_1(PSL_2(r))$ содержит два характера степени $(r-1)/2$, $k = (r-3)/4$ характеров степени $r-1$, характер Стейнберга степени r и $l = (r-3)/4$ характеров степени $r+1$. При этом значение характеров степени $r-1$ на r -элементах группы $PSL_2(r)$ равно -1 . Пусть $\phi_1, \dots, \phi_k$ – эти характеры. Так как $r-1 = \phi_1(1)$ не простое, то существует подгруппа H группы G и характер $\lambda \in \text{Lin}(H)$ такие, что $\lambda^G \in \text{Irr}_1(G)$ и $\phi_1 \in \lambda^G|_N$. Тогда $\lambda^G|_N = \sum_1^t \phi_i$ (можно считать, что $\lambda^G|_N$ содержит первые t характеров ϕ_i). Пусть $R \in \text{Syl}_r(N)$. Тогда для любого $y \in R^\#$ $\phi_i(y) = -1$, а потому можно считать, что $R \leq H \cap N$. По теореме

Диксона $H \cap N = R \rtimes K$, где K циклическая и возможно $K = 1$. Если $K \neq 1$, то $R \leq \text{Ker}(\lambda|_{H \cap N})$ и, с одной стороны, при $y \in R^\#$

$$(\lambda|_{H \cap N})^N(y) = \sum_i \dot{\lambda}(n_i y n_i^{-1}) > 0$$

($N = \bigcup_i n_i H \cap N$), а с другой стороны,

$$(\lambda|_{H \cap N})^N = \sum_1^t \phi_i(y) < 0$$

– противоречие. Значит, $H \cap N = R$. Но тогда $(\lambda|_{H \cap N})^N(1) = (r^2 - 1)/2$ и $(\lambda|_{H \cap N})^N$ – сумма $(r + 1)/2$ характера степени $r - 1$, что невозможно, поскольку $PSL_2(r)$ имеет не более $(r - 1)/4$ характеров степени $r - 1$.

Значит, характер χ мономиален и $\chi = \lambda^G$ для некоторого $\lambda \in \text{Lin}(H)$, $H \leq G$. Так как группа ${}^2F_4(2)'$ не имеет характеров простой степени, то $N \not\cong {}^2F_4(2)'$ и по лемме 3 группа инерции $I_G(St)$ характера Стейнберга совпадает с G . Поэтому $\lambda^G|_N = St$. С другой стороны, по теореме Макки $\lambda^G|_N = \sum (\lambda^{g_i}|_{H^{g_i} \cap N})^N$ ($G = \cup H N g_i$), откуда $St = (\lambda|_{H \cap N})^N$. Это означает, что группа N имеет p' -холлову подгруппу $H \cap N$. Последнее возможно только когда N изоморфна одной из групп $PSL_2(5)$, $PSL_2(7)$, $PSL_2(11)$ [6]. Однако все эти случаи уже исключены выше.

(ii) Пусть N – знакопеременная группа подстановок n символов ($n \geq 5$), а χ – точный немономиальный характер степени p группы G . Из доказательства леммы 2 следует, что если $P \in \text{Syl}_p(G)$, то $C_G(P) = P$. Так как цикл $(p + 1, p + 2, p + 3)$ централизует подгруппу $\langle (1, 2, \dots, p) \rangle \in \text{Syl}_p(N)$, то $p \leq n \leq p + 2$. Рассмотрим три возможных случая по отдельности.

(ii1) $N \cong A_p$. Найдем все степени характеров N , которые не делятся на p . Таким характерам отвечают разбиения числа p вида $(k + 1; \underbrace{1; \dots; 1}_{p-1-k})$ ($(p - 1)/2 \leq k \leq p - 1$).

Поэтому группа N имеет два характера степени

$$\frac{1}{2} \frac{p!}{p(\frac{p-1}{2})!}$$

и по одному характеру степеней

$$\frac{p!}{pk!(p-1-k)!} = C_{p-1}^k, \quad \frac{p-1}{2} < k \leq p-1,$$

а степени всех остальных характеров N делятся на p . Следовательно, группа N имеет единственный характер ϕ степени $p - 1$. Но тогда существует характер $\lambda \in \text{Lin}(H)$, $H \leq G$, такой, что $\lambda^G \in \text{Irr}(G)$ и $\lambda^G|_N = \phi$. Отсюда $\phi = (\lambda|_{H \cap N})^N$, что невозможно, поскольку группа A_p не имеет подгрупп индекса $p - 1$.

(ii2) $N \cong A_{p+1}$. Характерам N , степени которых не делятся на p , отвечают разбиения числа $p+1$ вида $(p+1)$ и $(k+1; 2; \underbrace{1; \dots; 1}_{p-k-2})$ ($(p-1)/2 \leq k \leq p-2$). Поэтому группа N имеет два характера степени

$$\frac{1}{2} \frac{(p+1)!}{p(\frac{p+1}{2})^2(\frac{p-3}{2})!} = \frac{1}{2}(p-1)C_{p-1}^{\frac{p+1}{2}},$$

по одному характеру степеней

$$\frac{(p+1)!}{p(k+1)(p-k)(k-1)!(p-k-2)!} = \frac{(p+1)k}{p-k} C_{p-1}^{k+1}, \quad \frac{p-1}{2} < k \leq p-2,$$

характер степени 1, а степени всех остальных характеров N делятся на p . Так как

$$\frac{(p+1)k}{p-k} C_{p-1}^{k+1}$$

убывает при k , пробегаяшем значения от $(p+1)/2$ до $p-2$, и

$$\frac{p-1}{2} C_{p-1}^{\frac{p+1}{2}} > \frac{(p+1)(p-2)}{2}$$

при $p > 5$, то $(p+1)(p-2)/2$ – наименьшая отличная от 1 степень характера N , не кратная p ($p > 5$) и в N имеется всего один характер ϕ такой степени. Пусть $H \leq G$, $\lambda \in \text{Lin}(H)$ такие, что $\lambda^G \in \text{Irr}(G)$ и $\phi = \lambda^G|_N = (\lambda|_{H \cap N})^N$. В силу минимальности степени ϕ $1_{H \cap N}^N = 1_N + \sum a_i \psi_i$, где $\psi_i \in \text{Irr}(N)$ и $p \mid \psi_i(1)$. Отсюда $(p+1)(p-2)/2 \equiv 1 \pmod{p}$, т.е. $4 \equiv 0 \pmod{p}$; противоречие. Если же $p = 5$, то $N \cong A_5 \cong \text{PSL}_2(5)$, а этот случай уже рассмотрен в (i).

(ii3) $N \cong A_{p+2}$. При $p > 3$ характерам N , степени которых не делятся на p , отвечают разбиения числа $p+2$ вида $(p+2)$, $(p+1; 1)$, $(p; 2)$, $(k+1; 3; \underbrace{1; \dots; 1}_{p-k-2})$ ($(p-1)/2 \leq k \leq p-2$)

и $(k+1; 2; 2; \underbrace{1; \dots; 1}_{p-k-3})$ ($(p-1)/2 \leq k \leq p-3$). Степени характеров N , которые не делятся на p следующие:

$$\begin{aligned} & 1, p+1, \frac{(p+2)(p-1)}{2}, \frac{(p+2)!}{2pk(k+1)(p-k+1)(k-2)!(p-k-2)!} \\ &= \frac{(p+2)(p+1)(k-1)}{2(p-k+1)} C_{p-1}^{k+1}, \quad \frac{p-1}{2} \leq k \leq p-2, \\ & \frac{(p+2)!}{2p(k+2)(p-k)(p-k-1)(k-1)!(p-k-3)!} \\ &= \frac{(p+2)(p+1)k(k+1)}{2(p-k)(p-k-1)} C_{p-1}^{k+2}, \quad \frac{p-1}{2} \leq k \leq p-3. \end{aligned}$$

Очевидно, N имеет единственный характер ϕ степени $p+1$. Тогда $\phi = (\lambda|_{H \cap N})^N$ для некоторого $\lambda \in \text{Irr}(H)$, $H \leq G$. Однако группа A_{p+2} не имеет подгрупп индекса $p+1$

и при $p > 3$ предположение относительно группы N неверно. При $p = 3$ $N \cong A_5 \cong PSL_2(5)$ и этот случай рассмотрен в (i).

(iii) Из [7] следует, что из 26 sporadicических простых групп только следующие имеют характеры простой степени p : M_{11} ($p = 11$), M_{12} ($p = 11$ – два характера), M_{24} ($p = 23$), Co_3 ($p = 23$), Co_2 ($p = 23$). Пусть сначала $N \in \{M_{11}, M_{24}, Co_3, Co_2\}$. Тогда $\text{Out } N = 1$ и по лемме 2 $G = N$. Группы M_{11} , M_{24} , Co_3 и Co_2 имеют характеры степеней 16, 45, 253 и 253 соответственно, но не имеют подгрупп такого индекса [7]. Если $N \cong M_{12}$, то либо $G = N$, либо $|G : N| = 2$. Пусть ϕ – единственный характер степени 45 в M_{12} . Тогда существуют такие $H \leq G$ и $\lambda \in \text{Irr}(H)$, что $\lambda^G|_H = \phi$, откуда $\phi = (\lambda|_{H \cap N})^N$. Однако группа M_{12} не имеет подгрупп индекса 45.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Feit W. Characters of Finite Groups. New York–Amsterdam: W. A. Benjamin, inc., 1967.
- [2] Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967.
- [3] Чубаров И. А. Связь свойств групп с мономиальностью их характеров. М.: Моск. физ.-тех. ин-т. Деп в ВИНТИ. 13 июня 1980, № 2365-80.
- [4] Белоногов В. А. Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск, 1990.
- [5] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
- [6] Казарин Л. С. О произведении конечных групп // Докл. АН. 1983. Т. 269. № 3. С. 528–531.
- [7] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of Finite Groups. London: Clarendon Press, 1985.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: nis@univ.uniya.ac.ru

Поступило
20.06.2001