Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Секерин, Теорема о носителе для комплексного преобразования Радона обобщенных функций, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 719–727

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:10:48

УДК 517.552

ТЕОРЕМА О НОСИТЕЛЕ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

А. Б. Секерин

Рассматриваются свойства комплексного преобразования Радона распределений с компактным носителем. Для таких распределений доказывается теорема о носителе, позволяющая описать носитель распределения по носителю его преобразования Радона.

Библиография: 9 названий.

Классическое действительное (комплексное) преобразование Радона сопоставляет достаточно быстро убывающей непрерывной функции набор интегралов от нее по всем действительным (комплексным) гиперплоскостям [1]. Будем говорить, что для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) верна теорема о носителе для преобразования Радона, если любая финитная непрерывная функция φ равна нулю вне K при условии, что равны нулю интегралы от этой функции по всем действительным (комплексным) гиперплоскостям, не пересекающим K . В случае действительного преобразования Радона теорема о носителе доказана для любого выпуклого компакта K [2], [3].

Для комплексного преобразования Радона теоремы о носителе имеет смысл рассматривать для компактов, линейно выпуклых по Мартино. Напомним, что *линейно выпуклым по Мартино* называется компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ такой, что для каждой точки $z \notin K$ существует комплексная гиперплоскость, содержащая z и не пересекающая K . В работе автора [4] выделен класс компактов, линейно выпуклых по Мартино, для которых верна теорема о носителе. Целью данной работы является доказательство теоремы о носителе для комплексного преобразования Радона распределений с компактным носителем.

Через $B^n(z, R)$ и $\overline{B}^n(z, R)$ будем соответственно обозначать открытый и замкнутый шар радиуса R в $\mathbb{C}^n$ с центром в точке z . Единичная сфера в $\mathbb{C}^n$ обозначается через S^{2n-1} , $d\sigma$ – элемент площади сферы, $d\omega_{2n}$ – стандартная мера Лебега в $\mathbb{C}^n$.

Следуя Л. Шварцу, через $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ будем обозначать пространства функций класса $C^\infty(\mathbb{C}^n)$, быстро убывающих со всеми производными и, соответственно, имеющих компактный носитель; $\mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ – пространство $C^\infty(\mathbb{C}^n)$, наделенное топологией равномерной сходимости функций и их производных на компактах. Классическое комплексное преобразование Радона функции $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ задается равенством

$$\varphi(s, \xi) = \frac{1}{|\xi|^2} \int_{\langle z, \frac{\xi}{|\xi|} \rangle = \frac{s}{|\xi|}} \varphi(z) d\lambda(z), \quad (s, \xi) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n \setminus 0), \quad (1)$$

Работа выполнена по гранту Минобразования РФ Е00-1.0-105.

где $d\lambda$ – элемент площади на гиперплоскости $z: \langle z, \xi / |\xi| \rangle = s / |\xi|$.

Пусть $C^\infty(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ – пространство функций $h(s, w)$ таких, что частные производные любого порядка

$$\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial s^{k_1} \partial \bar{s}^{k_2}} h(s, w)$$

существуют и непрерывны по совокупности переменных. Через $\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ будем обозначать пространство функций из $C^\infty(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, носители которых – компакты в $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$. Пусть далее $\mathcal{R}\mathcal{D}$ – подпространство в $\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, образованное преобразованиями Радона функций из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$.

Пространство $\mathcal{R}\mathcal{D}$ допускает внутреннее описание. Функция $\varphi(s, w)$ принадлежит пространству $\mathcal{R}\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- а) функция $\varphi(s, w)$ является сужением на $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$ функции $\varphi(s, \xi) \in C^\infty(\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n \setminus 0))$, удовлетворяющей для любого комплексного $\alpha \neq 0$ условию однородности $\varphi(\alpha s, \alpha \xi) = |\alpha|^{-2} \varphi(s, \xi)$;
- б) функция $\varphi(s, \xi)$ удовлетворяет условиям аналога теоремы Пэли–Винера для преобразования Радона [1, с. 170];
- в) для некоторого $R > 0$ функция $\varphi(s, w)$ обращается в нуль на множестве $\{|s| > R\} \times S^{2n-1}$.

Условия а) и б) представляют собой необходимое и достаточное условие того, что функция $\varphi(s, w)$ является преобразованием Радона некоторой функции $f(z)$ из $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ [1, с. 170]. Из условия в) следует тогда, что равны нулю интегралы от функции $f(z)$ по всем комплексным гиперплоскостям, не пересекающим шар радиуса R с центром в нуле. Отсюда очевидно вытекает, что равны нулю интегралы от функции $f(z)$ по всем действительным гиперплоскостям, не пересекающим этот шар. Тогда по теореме Хелгасона о носителе для действительного преобразования Радона [2, с. 39] $\text{supp}(f) \subset \{|z| \leq R\}$.

Зададим на $C^\infty(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ стандартную топологию, определяемую системой полунорм

$$q_k(f) = \max_{k_1+k_2 \leq k} \max_{|s| \leq k} \max_{w \in S^{2n-1}} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2} f(s, w)}{\partial s^{k_1} \partial \bar{s}^{k_2}} \right|. \quad (2)$$

Пространство $C^\infty(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ с такой топологией будем обозначать через $\mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Пусть

$$R^*: \mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1}) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$$

оператор дуального преобразования Радона:

$$[R^*(f)](z) = \int_{S^{2n-1}} f(\langle z, w \rangle, w) d\sigma(w).$$

Нетрудно видеть, что оператор R^* непрерывен. Кроме того, справедлива следующая формула [5, с. 10]:

$$\int_{\mathbb{C}^n} [R^*(f)](z) \varphi(z) d\omega_{2n}(z) = \int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} f(s, w) \hat{\varphi}(s, w) d\sigma(w) d\omega_2(s), \quad (3)$$

где $\varphi(z)$ – любая функция из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, $\hat{\varphi}(s, w)$ – преобразование Радона функции φ .

Заметим, что для любого $\theta \in [0, 2\pi]$ значения оператора R^* на функциях $f(s, w) \in \mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ и $f(se^{i\theta}, we^{i\theta})$ совпадают. Поэтому, полагая для функции $f(s, w) \in \mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$

$$\tilde{f}(s, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(se^{i\theta}, we^{i\theta}) d\theta,$$

получаем

$$R^*(\tilde{f}) = R^*(f).$$

Таким образом, оператор R^* фактически задан на функциях из $\mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, удовлетворяющих условию

$$h(e^{i\theta}s, e^{i\theta}w) \equiv h(s, w), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (4)$$

Пусть M – пространство функций вида

$$\psi(s, w) = \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} \hat{\varphi}(s, w), \quad \hat{\varphi}(s, w) \in \mathcal{R}\mathcal{D}. \quad (5)$$

Функция $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ выражается через свое преобразование Радона $\hat{\varphi}(s, w)$ по формуле [1, с. 165]

$$\varphi = (-1)^{n-1} c_n R^* \left(\frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} \hat{\varphi} \right), \quad (6)$$

где число $c_n > 0$ зависит только от размерности n . Поэтому, если $\psi \in M$, то функция $\varphi(z)$, преобразование Радона $\hat{\varphi}(s, w)$ которой связано с функцией $\psi(s, w)$ равенством (5), определяется единственным образом:

$$\varphi(z) = (-1)^{n-1} c_n R^*(\psi).$$

Имеется ряд различных подходов к понятию преобразования Радона обобщенных функций [1]–[3], [6]. Мы будем использовать подход, предложенный в монографии И.М. Гельфанда и др. [1]:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [1]. Преобразованием Радона распределения $F \in \mathcal{D}'$ называется функционал RF на пространстве M , определяемый равенством

$$\langle RF, \psi \rangle = \langle F, R^*(\psi) \rangle. \quad (7)$$

В зависимости от пространства основных функций ($\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, $\mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ и др.) в дальнейшем под преобразованием Радона функционала F будем понимать продолжение функционала RF с пространства M на соответствующее пространство. Данное продолжение, вообще говоря, неоднозначно. Для основных функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ обобщенное преобразование Радона совпадает с обычным [1, с. 171] (в этом случае функционал $R\varphi$ формулой (7) задается на всем пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$).

Для любой функции $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ имеем $R^*(f) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$. Если $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ – распределение с компактным носителем, то RF формулой (7) задается на всем пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Таким образом, в случае $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ функционал RF непосредственно продолжается с пространства M на $\mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. При этом в силу непрерывности R^* данное продолжение непрерывно в заданной выше топологии $\mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Именно это продолжение будет в дальнейшем подразумеваться под преобразованием Радона

распределения с компактным носителем. Далее, в силу непрерывности RF для некоторых $C > 0$ и k имеем $|R(F)(f)| \leq Cq_k(f)$, где полунормы $q_k(f)$ определены соотношением (2). Тогда, если носитель функции $f(s, w) \in \mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ не пересекается с множеством $\{|s| \leq k\} \times S^{2n-1}$, то $RF(f) = 0$, т.е. носитель функционала RF содержится в $\{|s| \leq k\} \times S^{2n-1}$. Таким образом, преобразование Радона распределения с компактным носителем также имеет компактный носитель.

В достаточно общей ситуации можно указать необходимое и достаточное условие компактности носителя исходного функционала при условии компактности носителя его преобразования Радона. Рассмотрим любую функцию $h(s, w) \in \mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$. Пусть

$$u(s, w) = \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} h(s, w), \quad F(z) = (-1)^{n-1} c_n [R^*(u)](z). \quad (8)$$

Функция $F(z)$ является бесконечно дифференцируемой функцией в $\mathbb{C}^n$. Поэтому мы можем рассматривать ее как обобщенную функцию и задать ее преобразование Радона RF в соответствии с приведенным выше определением. В этих обозначениях справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Преобразование Радона RF функции F совпадает с $h(s, w)$. Функция $F(z)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда функция $h(s, w)$ принадлежит пространству $\mathcal{RD}$, т.е. является преобразованием Радона некоторой функции из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – введенное выше пространство и $\psi(s, w) \in M$. По определению M имеем

$$\psi(s, w) = \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} \hat{\varphi}(s, w),$$

где $\hat{\varphi}(s, w)$ – преобразование Радона некоторой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. По формуле обращения (6) $\varphi(z) = c_n (-1)^{n-1} [R^*(\psi)](z)$. Тогда по построению функции $F(z)$ верно

$$\langle F, R^*(\psi) \rangle = \langle (-1)^{n-1} c_n [R^*(u)](z), [R^*(\psi)](z) \rangle = \langle [R^*(u)](z), \varphi(z) \rangle.$$

Используя (3), получаем

$$\langle F, R^*(\psi) \rangle = \int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} u(s, w) \hat{\varphi}(s, w) d\sigma(w) d\omega_2(s).$$

Поэтому из (8) следует

$$\langle F, R^*(\psi) \rangle = \int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} h(s, w) \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} \hat{\varphi}(s, w) d\sigma(w) d\omega_2(s).$$

Таким образом, для любой функции $\psi(s, w) \in M$ имеем

$$\langle F, R^*(\psi) \rangle = \int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} h(s, w) \psi(s, w) d\sigma(w) d\omega_2(s).$$

Это означает, что в соответствии с (7) преобразование Радона RF функционала F задается функцией $h(s, w)$ и, в частности, имеет компактный носитель.

Докажем второе утверждение. Пусть $h(s, w) \in \mathcal{RD}$, т.е. $h(s, w)$ – преобразование Радона некоторой функции $h(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. Тогда по построению функции $F(z)$ и в силу формулы обращения (6) имеем $F(z) \equiv h(z)$, т.е. $F(z)$ – функция с компактным носителем. Обратно, предположим, что функция $F(z)$ имеет компактный носитель. Тогда $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. С одной стороны, для любой функции $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ имеем в силу (3)

$$\begin{aligned} \langle F, \varphi \rangle &= \langle (-1)^{n-1} c_n [R^*(u)](z), \varphi \rangle \\ &= (-1)^{n-1} c_n \int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} u(s, w) \hat{\varphi}(s, w) d\sigma(w) d\omega_2(s). \end{aligned} \quad (9)$$

С другой стороны, так как $F \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, по формуле Планшереля для преобразования Радона [1, с. 168] имеем

$$\langle F, \varphi \rangle = (-1)^{n-1} c_n \int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} \frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} \hat{F}(s, w) \hat{\varphi}(s, w) d\sigma(w) d\omega_2(s),$$

где $\hat{F}(s, w)$ – преобразование Радона функции $F(z)$. Тогда из (9) следует

$$\int_{\mathbb{C}} \int_{S^{2n-1}} \left(\frac{\partial^{2n-2}}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} \hat{F}(s, w) - u(s, w) \right) \hat{\varphi}(s, w) d\sigma(w) d\omega_2(s) = 0$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$. Таким образом, функция

$$v(s, w) = \frac{\partial^{2n-2} \hat{F}(s, w)}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} - u(s, w) = \frac{\partial^{2n-2} (\hat{F}(s, w) - h(s, w))}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}}$$

ортогональна $\mathcal{RD}$. Тогда [7, с. 49] для любой сферической гармоник $Y_m(w)$ степени m функция

$$a_m(s) = \int_{S^{2n-1}} v(s, w) Y_m(w) d\sigma(w)$$

представляет собой многочлен, степени строго меньшей m . Так как функция $v(s, w)$ имеет компактный носитель, то $a_m(s) = 0$ для $|s| > R$, но тогда $a_m(s) \equiv 0$. Таким образом, при любом фиксированном s функция $v(s, w)$ ортогональна на сфере всем сферическим гармоникам. Следовательно, $v(s, w) \equiv 0$. Поэтому

$$\frac{\partial^{2n-2} (\hat{F}(s, w) - h(s, w))}{\partial s^{n-1} \partial \bar{s}^{n-1}} \equiv 0.$$

Так как функция $\hat{F}(s, w) - h(s, w)$ финитна по s , отсюда следует, что $\hat{F}(s, w) - h(s, w) \equiv 0$, т.е. $h(s, w) \in \mathcal{RD}$. Предложение доказано.

Из приведенного выше описания пространства $\mathcal{RD}$ и аналога теоремы Пэли–Винера для преобразования Радона следует, что $\mathcal{RD}$ является собственным подпространством в пространстве функций из $\mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, удовлетворяющих соотношению (4). Поэтому, если в обозначениях предложения 1 функция $h(s, w)$ не принадлежит пространству $\mathcal{RD}$, то из предложения 1 вытекает, что носитель функционала, задаваемого функцией $F(z)$, не компактен, несмотря на то что его преобразование Радона имеет компактный носитель.

Рассмотрим задачу восстановления носителя функционала $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ по носителю его преобразования Радона. Для множества $A \subset \mathbb{C}^n$ через $\hat{A}$ будем обозначать множество таких $(s, w) \in \mathbb{C} \times S^{2n-1}$, что гиперплоскость $z: \langle z, w \rangle = s$ пересекает множество A . Если A открытое множество или компакт в $\mathbb{C}^n$, то множество $\hat{A}$ соответственно открыто или компактно в $\mathbb{C} \times S^{2n-1}$ [8].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ – компакт, линейно выпуклый по Мартино. Предположим, что для каждой точки $z \notin K$ существует комплексная гиперплоскость $P = \{\lambda: \langle \lambda, \xi_0 \rangle = s_0\}$, содержащая точку z и удовлетворяющая следующим условиям:

- а) $P \cap K = \emptyset$;
- б) множество $\mathbb{C} \setminus K_{\xi_0}$ связно, где $K_{\xi_0} = \{\langle \lambda, \xi_0 \rangle\}_{\lambda \in K}$ – проекция компакта K на ξ_0 .

Пусть $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ – распределение с компактным носителем такое, что носитель его преобразования Радона RF содержится в $\hat{K}$. Тогда $\text{supp } F \subset K$.

Отметим, что априорное требование компактности носителя распределения F (принадлежность F пространству $\mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$) существенно в силу предложения 1 и сделанного выше замечания. Следует также отметить, что теорема 1 не предполагает связности компакта K .

Для случая, когда распределение F задается непрерывной функцией, теорема 1 доказана в работе [4]. Кроме того, в этой работе приведен пример связного компакта, линейно выпуклого по Мартино, для которого теорема о носителе неверна. Этот пример показывает, что условия, налагаемые теоремой 1 на компакт K , существенны. В действительном случае под линейно выпуклым компактом можно понимать такой компакт K , что через каждую точку, лежащую вне K , проходит действительная гиперплоскость, не пересекающая K . Для связного компакта это свойство эквивалентно обычной выпуклости. Поскольку для выпуклых компактов теорема о носителе действительного преобразования Радона верна, то упомянутый выше пример показывает также, что между свойствами носителей действительного и комплексного преобразований Радона нет полной аналогии.

В работе [8] доказана следующая теорема, которая будет лежать в основе доказательства теоремы 1:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi(z)$ – непрерывная в $\mathbb{C}^n$ функция с компактным носителем, $\hat{\varphi}(s, w)$ – комплексное преобразование Радона φ . Пусть точка (w_0, s_0) не принадлежит носителю $\hat{\varphi}$. Пусть далее существует открытое, связное, неограниченное множество $D \subset \mathbb{C}$ такое, что $s_0 \in D$ и пересечение $(D \times \{w_0\}) \cap \text{supp } \hat{\varphi}$ пусто. Тогда функция φ равна нулю на гиперплоскости $\{z: \langle z, w_0 \rangle = s_0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В следующих ниже рассуждениях будут использоваться свойства свертки распределений с гладкими функциями [9, с. 112, 113]. Пусть α_ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, – стандартное семейство функций из $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, аппроксимирующих δ -функцию, т.е. выполняются следующие условия: $0 \leq \alpha_\varepsilon$, $\text{supp } \alpha_\varepsilon \subset \{|z| \leq \varepsilon\}$,

$$\int_{\mathbb{C}^n} \alpha_\varepsilon(z) d\omega_{2n}(z) = 1.$$

Пусть $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{C}^n)$ и $\text{supp } RF \subset \hat{K}$. Рассмотрим обобщенную функцию $F_\varepsilon = F * \alpha_\varepsilon$. Функционал F_ε задается гладкой функцией с компактным носителем, которую будем обозначать через $F_\varepsilon(z)$. Преобразование Радона RF_ε функционала F_ε – регулярное распределение, задаваемое функцией $\hat{F}_\varepsilon(s, w)$. Для описания носителя функции $\hat{F}_\varepsilon(s, w)$ понадобится следующая

ЛЕММА 1. Для любой функции $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ верно

$$\alpha_\varepsilon * R^*[\psi] = R^*[(\hat{\alpha}_\varepsilon *_s \psi)(s, w)], \quad (10)$$

где R^* – оператор дуального преобразования Радона, $\hat{\alpha}_\varepsilon(s, w)$ – преобразование Радона функции $\alpha_\varepsilon(z)$, символом $*_s$ обозначается операция свертки в пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$ по первой переменной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Покажем, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ верно

$$\int_{\mathbb{C}^n} \{(\alpha_\varepsilon * R^*[\psi])(z) - R^*[\hat{\alpha}_\varepsilon *_s \psi](z)\} \varphi(z) d\omega_{2n}(z) = 0. \quad (11)$$

Из этого равенства будет следовать [10]. Имеем

$$\int_{\mathbb{C}^n} (\alpha_\varepsilon * R^*[\psi])(z) \varphi(z) d\omega_{2n}(z) = \int_{\mathbb{C}^n} [R^*[\psi](z) (\alpha_\varepsilon * \varphi)(z) d\omega_{2n}(z).$$

Последний интеграл обозначим через J . Из (3) следует

$$J = \int_{\mathbb{C} \times S^{2n-1}} \psi(s, w) \widehat{\alpha_\varepsilon * \varphi}(s, w) d\omega_2(s) d\sigma(w),$$

где $\widehat{\alpha_\varepsilon * \varphi}$ – преобразование Радона свертки $\alpha_\varepsilon * \varphi$. В силу формулы преобразования Радона свертки [1, с. 163] верно

$$\widehat{\alpha_\varepsilon * \varphi}(s, w) = (\hat{\alpha}_\varepsilon *_s \hat{\varphi})(s, w).$$

Тогда

$$J = \int_{\mathbb{C} \times S^{2n-1}} \psi(s, w) (\hat{\alpha}_\varepsilon *_s \hat{\varphi})(s, w) d\omega_2(s) d\sigma(w).$$

Последний интеграл равен

$$\int_{\mathbb{C} \times S^{2n-1}} (\psi *_s \hat{\alpha}_\varepsilon)(s, w) \hat{\varphi}(s, w) d\omega_2(s) d\sigma(w).$$

Тогда, вновь применяя (3), получаем

$$J = \int_{\mathbb{C}^n} R^*[\hat{\alpha}_\varepsilon *_s \psi](z) \varphi(z) d\omega_{2n}(z).$$

Таким образом, доказана формула (11), из которой следует (10). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Пусть K_ε – замкнутое ε -вздутие компакта K . Пусть $\hat{F}_\varepsilon(s, w)$ – преобразование Радона функции $F_\varepsilon(z)$. Покажем, что $\text{supp } \hat{F}_\varepsilon \subset \hat{K}_\varepsilon$. Гиперплоскость $z: \langle z, w \rangle = s$ пересекает K_ε тогда и только тогда, когда для некоторых $z^1 \in K$ и $z^2 \in \overline{B}^n(0, \varepsilon)$ верно $\langle z^1, w \rangle = s - \langle z^2, w \rangle$. Поэтому верно

$$\hat{K}_\varepsilon = \{(s + \overline{B}^1(0, \varepsilon), w) \mid (s, w) \in \hat{K}\}. \quad (12)$$

Пусть $h(s, w) \in \mathcal{D}(\mathbb{C} \times S^{2n-1})$, $\text{supp } h \cap \hat{K}_\varepsilon = \emptyset$. Согласно (7)

$$\langle RF_\varepsilon, h \rangle = \langle F_\varepsilon, R^*(h) \rangle = \langle F * \alpha_\varepsilon, R^*(h) \rangle = \langle F, \alpha_\varepsilon * R^*(h) \rangle.$$

По лемме 1 $\langle F, \alpha_\varepsilon * R^*(h) \rangle = \langle F, R^*(\hat{\alpha}_\varepsilon * h) \rangle$. Тогда

$$\langle RF_\varepsilon, h \rangle = \langle F, R^*(\hat{\alpha}_\varepsilon * h) \rangle = \langle RF, \hat{\alpha}_\varepsilon * h \rangle. \quad (13)$$

Покажем, что $\hat{K} \cap \text{supp}(\hat{\alpha}_\varepsilon * h) = \emptyset$. Если $(s_0, w_0) \in \hat{K} \cap \text{supp}(\hat{\alpha}_\varepsilon * h)$, то, так как $\hat{\alpha}_\varepsilon(s, w) = 0$ для $|s| \geq \varepsilon$, для некоторого $s_1 \in \overline{B}^1(0, \varepsilon)$ имеем $(s_0 + s_1, w_0) \in \text{supp } h$. Но в силу (12) $(s_0 + s_1, w_0) \in \hat{K}_\varepsilon$, что противоречит условию $\text{supp } h \cap \hat{K}_\varepsilon = \emptyset$. Таким образом, $\hat{K} \cap \text{supp}(\hat{\alpha}_\varepsilon * h) = \emptyset$ и, так как $\text{supp } RF \subset \hat{K}$, из (13) следует $\langle RF_\varepsilon, h \rangle = 0$. Следовательно,

$$\text{supp } \hat{F}_\varepsilon \subset \hat{K}_\varepsilon. \quad (14)$$

Для завершения доказательства теоремы 1 необходима

ЛЕММА 2. В условиях и обозначениях теоремы 1 для каждой точки $z_0 \notin K$ существуют окрестность V_{z_0} и $\delta > 0$ такие, что для $z \in V_{z_0}$ и $\varepsilon \leq \delta$ верно $F_\varepsilon(z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть $z_0 \notin K$. Тогда по условию существует точка $w_0 \in S^{2n-1}$ такая, что

$$\{\lambda: \langle \lambda, w_0 \rangle = \langle z_0, w_0 \rangle\} \cap K = \emptyset$$

и множество $\{\langle z, w_0 \rangle\}_{z \in K}$ имеет связанное дополнение. Тогда $(\langle z_0, w_0 \rangle, w_0) \notin \hat{K}$. Пусть

$$A = \{s \in \mathbb{C} \mid (s, w_0) \in \hat{K}\}, \quad A_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} \mid (s, w_0) \in \hat{K}_\varepsilon\}.$$

Из (12) следует, что $A_\varepsilon = A + \overline{B}^1(0, \varepsilon)$. Так как $\hat{K}$ – компакт, то A и A_ε – компакты. Считая $\varepsilon \leq 1$, имеем $A \cup A_\varepsilon \subset B^1(0, R)$. По условию $(\langle z_0, w_0 \rangle, w_0) \notin A$; тогда для некоторого $\gamma > 0$ и любого $\lambda \in \overline{B}^n(0, \gamma)$ имеем $\langle z_0 + \lambda, w_0 \rangle \notin A$. Следовательно, выпуклый компакт $\Gamma_1 = \{\langle z_0 + \overline{B}^n(0, \gamma), w_0 \rangle\}$ не пересекается с A . Зафиксируем $s_1 \in \mathbb{C}$, $|s_1| > R$. Тогда $s_1 \in \mathbb{C} \setminus A$. Так как $\mathbb{C} \setminus A$ связно, существует ломаная Γ_2 , соединяющая точки s_1 и $\langle z_0, w_0 \rangle$ и не пересекающаяся с A . Таким образом, $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap A = \emptyset$. Так как $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ и A – компакты, для некоторого $0 < \delta < 1$ и всех $\varepsilon \leq \delta$ имеем

$$\{(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) + B^1(0, \delta)\} \cap \{A + \overline{B}^1(0, \varepsilon)\} = \emptyset,$$

т.е. $\{(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) + B^1(0, \delta)\} \cap A_\varepsilon = \emptyset$. Так как $A_\varepsilon \subset B^1(0, R)$, полагая

$$D = \{s \in \mathbb{C}: |s| > R\} \cup \{(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) + B^1(0, \delta)\},$$

имеем $D \cap A_\varepsilon = \emptyset$. При этом D – неограниченное, связанное, открытое множество, содержащее любую точку $\langle z_0 + \lambda, w_0 \rangle$, $\lambda \in \overline{B}^n(0, \gamma)$. По определению A_ε имеем $(D \times \{w_0\}) \cap \hat{K}_\varepsilon = \emptyset$, $\varepsilon \leq \delta$. Тогда из (14) следует $(D \times \{w_0\}) \cap \text{supp } \hat{F}_\varepsilon = \emptyset$ для $\varepsilon \leq \delta$. По условию исходный функционал F имеет компактный носитель, поэтому носители функций F_ε также компактны. Тогда по теореме 2 для $\varepsilon \leq \delta$ и любого $\lambda \in \overline{B}^n(0, \gamma)$ функции F_ε обращаются в нуль на гиперплоскости $\{z: \langle z, w_0 \rangle = \langle z_0 + \lambda, w_0 \rangle\}$. Следовательно, для $\varepsilon \leq \delta$ имеем $F_\varepsilon(z) = 0$, $z \in \overline{B}^n(z_0, \gamma)$. Лемма доказана.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ и носитель φ не пересекается с K . Имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle F_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle. \quad (15)$$

Для каждой точки $z \in \text{supp } \varphi$ по лемме 2 существуют $\delta(z) > 0$ и шар $B^n(z, \gamma(z))$, в котором $F_\varepsilon(z) = 0$ для $\varepsilon \leq \delta(z)$. Так как носитель функции φ – компакт, то он может быть покрыт конечным набором таких шаров $B^n(z_k, \gamma(z_k))$. При этом во всех этих шарах $F_\varepsilon(z) = 0$ для $\varepsilon \leq \delta_0$, где $\delta_0 = \min \delta(z_k)$. Следовательно, для $\varepsilon \leq \delta_0$ функции F_ε равны нулю на носителе φ . Тогда из (15) следует $\langle F, \varphi \rangle = 0$. Так как здесь φ – любая гладкая функция, носитель которой не пересекается с K , то $\text{supp } F \subset K$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Наука, 1962.
- [2] Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
- [3] Ludwig D. The Radon transform on Euclidean space // Comm. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. P. 49–81.
- [4] Sekerin A. B. A support theorem for the complex Radon transform // Collectanea Mathematica. 1999. V. 50. P. 221–227.
- [5] Секерин А. Б. Применения преобразования Радона в теории аппроксимации. Уфа: Башкирск. научн. центр УрО АН СССР, 1991.
- [6] Hertle A. Continuity of the Radon transform and its inverse on Euclidean spaces // Math. Zeitschr. 1983. V. 184. P. 165–192.
- [7] Секерин А. Б. Применение преобразования Радона к аппроксимационным задачам многомерного комплексного анализа. Дисс. ... д.ф.-м.н. Уфа: Ин-т математики УрО РАН, 1992.
- [8] Sekerin A. B. Representation of functions by logarithmic potentials and reducibility of analytic functions of several variables // Collectanea Mathematica. 1996. V. 47. P. 187–206.
- [9] Хермандер Л. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

Орловский государственный университет
E-mail: sekerin@orel.ru

Поступило
17.12.2002