Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Солдатенков, Об использовании преобразования Фурье для решения сингулярных интегральных уравнений, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 739–744

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:49:56

УДК 517.433

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. А. Солдатенков

Предлагается метод решения системы сингулярных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами. В основе метода лежит процедура сведения сингулярных уравнений к уравнениям с непрерывным разностным ядром, решение которых строится с помощью классического преобразования Фурье в классе абсолютно интегрируемых функций. Получены явные выражения для решения рассматриваемых сингулярных интегральных уравнений.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Излагаемый ниже материал касается построения в замкнутом виде решения системы линейных сингулярных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Aq(x) + B \int_{-a}^a \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} = f(x), \quad x \in (-a, a), \quad (1)$$

где A, B – постоянные матрицы $N \times N$, $N = 1, 2, \dots$, $f(x)$ и $q(x)$ – заданная и искомая вектор-функции размерности N , x – действительная переменная.

Классический подход к решению систем (1) основывается на их сведении к задаче линейного сопряжения для нескольких функций комплексного переменного [1], [2]. При таком подходе удастся построить решения более общих, чем (1), систем сингулярных интегральных уравнений, допускающих, в частности, зависимость матриц A, B от x и более сложные контуры интегрирования. Однако соответствующие алгоритмы построения решения включают в себя достаточно трудоемкие процедуры нахождения канонических решений задачи сопряжения, в результате чего построение в замкнутом виде решения уравнения (1) на основе классического подхода представляется затруднительным.

2. Основные соотношения. Запись $\varphi(x) \in H^*[-a, a]$ означает, что

$$\varphi(x) = \varphi^*(x)(a+x)^{-\varepsilon_1}(a-x)^{-\varepsilon_2}, \quad \varphi^*(x) \in H[-a, a], \quad \varepsilon_k < 1, \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00034, и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS), грант № 99-0671.

где $H[-a, a]$ – класс Гёльдера [1]. Предполагается, если другое не оговорено, что компоненты вектор-функций $f(x)$, $q(x)$ содержатся в $H^*[-a, a]$. Не ограничивая общности, компоненты f , q , A , B будем считать действительными, причем $\det A \neq 0$.

Преобразуем систему (1). Умножим ее на $(x - t)^{-1}$ при некотором $t \in (-a, a)$ и проинтегрируем по $x \in [-a, a]$. Затем, полагая $\det A \neq 0$, умножим полученное равенство на BA^{-1} и, пользуясь опять (1), заменим в нем интеграл $B \int_{-a}^a \frac{q(x) dx}{x-t}$ на $f(t) - Aq(t)$. Тогда можно прийти к уравнению

$$Aq(x) + n \int_{-a}^a \frac{dt}{t-x} \int_{-a}^a \frac{q(\xi) d\xi}{\xi-t} = d(x), \quad (3)$$

в котором $n = -BA^{-1}B$,

$$d(x) = f(x) - BA^{-1} \int_{-a}^a \frac{f(\xi) d\xi}{\xi-x} \in H^*[-a, a]. \quad (4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Множество решений уравнения (3) содержит все решения исходного уравнения (1).

В дальнейшем также будет использоваться следующая эквивалентная (3) запись, которая получается, если в (3) произвести перестановку порядка интегрирования на основе формулы Пуанкаре–Бертрана [1]:

$$mq(x) + n \int_{-a}^a k(\xi, x) q(\xi) d\xi = d(x), \quad (5)$$

где $m = A - \pi^2 n$, $k(\xi, x) = \frac{L(\xi) - L(x)}{\xi - x}$, $L(x) = \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$.

3. Решение уравнения (3) класса $H_{1/2}^*$. Запись $\varphi(x) \in H_{1/2}^*[-a, a]$ означает, что функция $\varphi(x)$ представима в виде (2) при $\varepsilon_k < 1/2$. Будем здесь полагать, что $f(x)$ и $q(x)$ принадлежат $H_{1/2}^*[-a, a]$, при этом функция $d(x)$ вида (4) также будет содержаться в $H_{1/2}^*[-a, a]$ [1]:

$$\{f(x), q(x), d(x)\} \in H_{1/2}^*[-a, a]. \quad (6)$$

Введем новую переменную s и соответствующие ей функции

$$2s = L(x), \quad x = a \operatorname{th} s, \quad Q(s) = q(a \operatorname{th} s), \quad D(s) = d(a \operatorname{th} s). \quad (7)$$

Тогда уравнению (5) можно придать вид

$$m\Phi(s) + 2n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(s-\eta)}{\operatorname{sh}(s-\eta)} \Phi(\eta) d\eta = R(s), \quad (8)$$

где $\Phi(s) = aQ(s)/\operatorname{ch} s$, $R(s) = aD(s)/\operatorname{ch} s$, причем в силу (6)

$$\{\Phi(s), R(s)\} \in H(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty). \quad (9)$$

Здесь $H(-\infty, \infty)$ обозначает класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера в некоторой окрестности любой точки действительной оси.

Далее будет использоваться классическое преобразование Фурье [3]:

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\lambda s} d\lambda, \quad f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda$$

и следующие соотношения для свертки $(f * g)(s)$:

$$(f * g)(s) \in C(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty), \quad \widetilde{(f * g)}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\lambda) \quad (10)$$

при $\{f(s), g(s)\} \in C(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty)$, $|f(s)| \leq \text{const}$;

$$(f * g)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) \tilde{g}(\lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda \quad (11)$$

при $\{f(s), g(s), \tilde{f}(\lambda)\} \in L(-\infty, \infty)$, $f(s) \in H(-\infty, \infty)$, $g(s) \in C(-\infty, \infty)$.

Воздействуем на обе части уравнения (8) преобразованием Фурье, при этом воспользуемся вторым соотношением (10), учитывая (9). В результате, обозначая

$$K_a(\lambda) = m\zeta(\lambda) + \pi^2 n, \quad \zeta(\lambda) = \text{ch}^2 \frac{\pi}{2} \lambda,$$

получим равенство $K_a(\lambda) \tilde{\Phi}(\lambda) = \zeta(\lambda) \tilde{R}(\lambda)$, в котором, учитывая (9), $\tilde{R}(\lambda) \in C(-\infty, \infty)$, $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \tilde{R}(\lambda) = 0$, $|\tilde{R}(\lambda)| \leq \text{const}$ [3]. Полученное равенство представляет собой алгебраическое уравнение для Фурье-образа $\tilde{\Phi}(\lambda)$ неизвестной функции $\Phi(s)$, условие разрешимости которого имеет вид [4]: $\det K_a(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$. В этом случае существует матрица $\tilde{h}_a(\lambda) = K_a^{-1}(\lambda)$ и

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \zeta(\lambda) \tilde{h}_a(\lambda) \tilde{R}(\lambda). \quad (12)$$

Представляя $\tilde{h}_a(\lambda) = M(\lambda) / \det K_a(\lambda)$, где $M(\lambda)$ – матрица $N \times N$ алгебраических дополнений элементов матрицы $K_a(\lambda)$, и полагая $\det m \neq 0$, можно установить следующие свойства $\tilde{h}_a(\lambda)$:

$$(1 + |\lambda|^l) \tilde{h}_a^{(k)}(\lambda) \in C(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty), \\ \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \lambda^l \tilde{h}_a^{(k)}(\lambda) = 0, \quad k, l = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

из которых вытекает существование Фурье-преобраза $h_a(s)$ матричной функции $\tilde{h}_a(\lambda)$ такого, что [3]

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} s^k h_a^{(l)}(s) = 0, \quad h_a^{(l)}(s) \in C(-\infty, \infty) \cap L(-\infty, \infty), \quad k, l = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Представим (12) в виде равенства $\tilde{\Phi}(\lambda) = m^{-1} \tilde{R}(\lambda) - \tilde{h}_a(\lambda) \pi^2 n m^{-1} \tilde{R}(\lambda)$ и воздействуем на него обратным преобразованием Фурье, учитывая вышеуказанные свойства функции $\tilde{R}(\lambda)$, а также (9), (11), (13) и (14). В результате, если вернуться к функциям

$Q(s) = a^{-1}\Phi(s) \operatorname{ch} s$, $D(s) = a^{-1}R(s) \operatorname{ch} s$, можно получить следующее выражение для $Q(s)$:

$$Q(s) = m^{-1}D(s) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{ch} s \int_{-\infty}^{\infty} h_a(s-\eta) \pi^2 n m^{-1} D(\eta) \frac{d\eta}{\operatorname{ch} \eta}. \quad (15)$$

Выражение (15) удовлетворяет сделанному допущению (6), если усилить первое свойство (14) и потребовать экспоненциального затухания на бесконечности известной матричной функции $h_a(s)$ и ее производной:

$$h_a^{(l)}(s) = \mathcal{O}(\operatorname{ch}^{-\beta} s), \quad \beta > 0, \quad l = 0, 1. \quad (16)$$

Ниже будет рассмотрен вопрос о возможности использования выражения (15) в качестве решения исходного уравнения (1).

4. Решение уравнения (3) класса H^* . Далее вместо (6) положим

$$\{f(x), q(x), d(x)\} \in H^*[-a, a]. \quad (17)$$

Для построения решения уравнения (3) из класса $H^*[-a, a]$ выполним тождественное преобразование этого уравнения. А именно, обратим дважды повторный интеграл в (3) с помощью известной формулы [1], [5]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - x} = \psi(x) \iff \varphi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \left[\int_{-a}^a \varphi(x) dx - \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2} \psi(\xi)}{\xi - x} d\xi \right].$$

В результате можно получить

$$\begin{aligned} & m \sqrt{a^2 - x^2} q(x) - \frac{A}{\pi^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \xi^2} q(\xi) k(\xi, x) d\xi \\ &= \sqrt{a^2 - x^2} d(x) - \frac{1}{\pi^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \xi^2} d(\xi) k(\xi, x) d\xi \\ &\quad - \left(\pi n P^0 + \frac{1}{\pi} n P^1 L(x) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$P^0 \equiv \int_{-a}^a q(x) dx, \quad P^1 \equiv \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x} = \int_{-a}^a q(x) L(x) dx. \quad (19)$$

По аналогии с предыдущим разделом можно ввести переменную s и соответствующие ей функции $Q(s)$, $D(s)$ (см. (7)), а также функции

$$\Psi(s) = \frac{a^2 Q(s)}{\operatorname{ch}^2 s}, \quad W(s) = \frac{a^2 D(s)}{\operatorname{ch}^2 s}.$$

Используя их, можно представить уравнение (18) в аналогичном (8) виде, после чего, воздействуя на него преобразованием Фурье, прийти, как и в предыдущем разделе, к следующему выражению для $Q(s)$:

$$Q(s) = m^{-1}D(s) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{ch}^2 s \int_{-\infty}^{\infty} h_b(s - \eta)(Am^{-1} - E)D(\eta) \frac{d\eta}{\operatorname{ch}^2 \eta} - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch}^2 s [\Gamma_0(s)P^0 + \Gamma_1(s)P^1], \quad (20)$$

где E – единичная матрица, $h_b(s)$ – Фурье-прообраз матричной функции $\tilde{h}_b(\lambda) = K_b^{-1}(\lambda)$, $K_b(\lambda) = m\zeta(\lambda) - A$, $\Gamma_0(s)$, $\Gamma_1(s)$ – Фурье-прообразы матричных функций $\tilde{\Gamma}_0(\lambda) = \sqrt{\pi/2\pi a} \operatorname{ch}(\pi\lambda/2)\tilde{h}_b(\lambda)n$, $\tilde{\Gamma}_1(\lambda) = i\sqrt{\pi/2\pi a} \operatorname{sh}(\pi\lambda/2)\tilde{h}_b(\lambda)n$. Существование функции $\tilde{h}_b(\lambda)$ обеспечивается условием [4] $\det K_b(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, при этом выражение (18) удовлетворяет сделанному допущению (17), если

$$h_b^{(l)}(s) = \mathcal{O}(\operatorname{ch}^{-\beta} s), \quad \Gamma_{0,1}^{(l)}(s) = \mathcal{O}(\operatorname{ch}^{-\varepsilon} s), \quad \beta > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad l = 0, 1. \quad (21)$$

5. Решение исходного уравнения (1). Выше был осуществлен переход от уравнения (1) к уравнению (3), решение $q(x) \in H_{1/2}^*[-a, a]$ которого имеет вид (15) при условиях $\det K_a(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, (6) и (16), тогда как решение $q(x) \in H^*[-a, a]$ определяется формулой (20) при условиях $\det K_b(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, (17) и (21), причем в обоих случаях предполагается, что $\det A \neq 0$, $\det m \neq 0$. Согласно утверждению 1 любое решение уравнения (1) удовлетворяет (3). Исследуем вопрос о возможности использования формул (15) и (20) в качестве решений исходного уравнения (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формула (15) единственным образом определяет решение уравнения (3), тогда как формула (20) зависит от двух постоянных векторов P^0 и P^1 , выбор которых произволен и приводит к решению $q(x)$ уравнения (3), удовлетворяющему условиям (19). Аналогичный результат имеет место в [1], [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. В случае $\det K_a(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, решение $q(x) \in H_{1/2}^*[-a, a]$ уравнения (3) при $f(x) \in H_{1/2}^*[-a, a]$ удовлетворяет уравнению (1). В случае $\det K_b(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, решение $q(x) \in H^*[-a, a]$ уравнения (3) при $f(x) \in H^*[-a, a]$ удовлетворяет уравнению (1) при условии, что

$$AP^0 + BP^1 = \int_{-a}^a f(x) dx, \quad \det B \neq 0. \quad (22)$$

Утверждение 3 определяет возможность использования формул (15) и (20) в качестве решения исходного уравнения (1), при этом константы P^0 , P^1 в (20) оказываются взаимосвязанными.

6. Пример. Рассмотрим уравнение (1) в виде, который встречается, например, в задачах теории упругости [6], [7]. Пусть $N = 2$, а компоненты A_{ij} , B_{ij} матриц A , B заданы следующим образом: $A_{ij} = B_{ij} = 0$, кроме $A_{11} = A_1$, $A_{22} = A_2$, $B_{12} = B_1$, $B_{21} = B_2$, где A_i , B_i – некоторые постоянные. В этом случае для компонент матриц n , m имеют место выражения: $n_{ij} = m_{ij} = 0$, кроме $n_{11} = -B_1B_2/A_2$, $n_{22} = -B_1B_2/A_1$,

$m_{11} = m_1 \equiv A_1 - \pi^2 n_1$, $m_{22} = m_2 \equiv A_2 - \pi^2 n_2$. Для обеспечения условий $\det A \neq 0$ и $\det m \neq 0$, а также последнего условия (22) положим $A_k \neq 0$, $m_k \neq 0$, $B_k \neq 0$.

Функции $h_{a,b}(s)$, $\Gamma_{0,1}(s)$ в рассматриваемом случае имеют вид

$$h_{a,b}(s) = \frac{(2/\pi)^{1/2} Z_{a,b}(s)}{\omega_{a,b} \sqrt{1 \pm \omega_{a,b}^2}} m^{-1}, \quad \Gamma_0(s) = \frac{\pi a \operatorname{ch} \Omega_b s}{\sqrt{1 - \omega_b^2} \operatorname{ch} s} n m^{-1},$$

$$\Gamma_1(s) = \frac{a \operatorname{sh} \Omega_b s}{\omega_b \operatorname{ch} s} n m^{-1}, \quad (23)$$

где m^{-1} – обратная к m матрица, $\omega_a^2 = A_1/m_1 - 1 \equiv A_2/m_2 - 1$, $\omega_b^2 = A_1/m_1 \equiv A_2/m_2$, $\Omega_a = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsch} \omega_a$, $\Omega_b = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsin} \omega_b$, $Z_a(s) = \sin \Omega_a s / \operatorname{sh} s$, $Z_b(s) = \operatorname{sh} \Omega_b s / \operatorname{sh} s$, при этом условия $\det K_a(\lambda) \neq 0$, $\det K_b(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, обеспечиваются, соответственно, неравенствами $0 < A_1/m_1 \equiv A_2/m_2$, $0 < 1 - A_1/m_1 \equiv 1 - A_2/m_2$, которые определяют области применимости формул (15) и (20) в качестве решения уравнения (1). Отметим, что функции $h_{a,b}(s)$ и $\Gamma_{0,1}(s)$ вида (23) удовлетворяют условиям (16), (21).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968.
- [2] Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.
- [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Наука, 1971; Ч. 2. М.: Наука, 1973.
- [4] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1974.
- [5] Манжиров А. В., Полянин А. Д. Методы решения интегральных уравнений. Справочник. М.: Факториал, 1999.
- [6] Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
- [7] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.

Институт проблем механики РАН, г. Москва

Поступило

19.12.2001

Исправленный вариант

14.01.2002