Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Е. Бауман, Коэффициент растяжения кривой
Пеано–Гильберта, *Матем. заметки*, 2006, том 80, вы-
пуск 5, 643–656

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3074>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:15:19

УДК 514.8

КОЭФФИЦИЕНТ РАСТЯЖЕНИЯ КРИВОЙ ПЕАНО–ГИЛЬБЕРТА

К. Е. Бауман

Доказано, что наибольшее значение отношения $|p(x) - p(y)|^2 / |x - y|$ для кривой Пеано–Гильберта $p: [0, 1] \rightarrow I^2$ равно 6.

Библиография: 3 названия.

Введение. В настоящей статье найдено максимальное значение *квадрато-линейного отношения*

$$\frac{|p(x) - p(y)|^2}{|x - y|}$$

для классической кривой Пеано–Гильберта $p: I \rightarrow I^2$, отображающей единичный отрезок $I = [0, 1]$ на единичный квадрат.

А именно, в первой части статьи указаны пары точек, для которых квадрато-линейное отношение равно 6. Во второй части доказано, что квадрато-линейное отношение для любой пары точек кривой Пеано–Гильберта не превосходит 6.

Кривые Пеано применяются для кодирования информации (см. [1]), численного интегрирования и других приложений математики. *Квадрато-линейный коэффициент растяжения* кривой, определяемый как максимум квадрато-линейных отношений для всех пар точек, является важной характеристикой кривой Пеано. Как показано в [2] и [3], для приложений наибольший интерес представляют кривые с наименьшим квадрато-линейным коэффициентом растяжения.

Хотя квадрато-линейный коэффициент растяжения для явно заданной фрактальной кривой Пеано нетрудно определить с помощью компьютера, теоретическое обоснование того, что найденное компьютером значение действительно является наибольшим квадрато-линейным отношением, представляет значительные трудности.

Данная статья впервые дает такое теоретическое обоснование. Полученный результат относится к простейшей и самой известной кривой Пеано – кривой Пеано–Гильберта. В работе [2] построены кривые Пеано с меньшим, чем 6, квадрато-линейным отношением. Предположительно построенные там минимальные кривые фрактального рода 9 имеют квадрато-линейное отношение $5\frac{2}{3}$. Но этот результат теоретически не обоснован. Техника, разработанная автором в этой статье, использует высокую степень симметрии кривой Пеано–Гильберта и не переносится на случай менее симметричных кривых из [2].

Итак, основным результатом данной работы является

Работа выполнена при поддержке программы ОМН РАН “Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики”, проект “Дискретная геометрия”, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00993.

ТЕОРЕМА 1. *Квадрато-линейный коэффициент растяжения кривой Пеано–Гильберта равен 6.*

Кривая Пеано–Гильберта. Построение отображения $p: I \rightarrow Q$ данного отрезка I на данный квадрат Q начинаем с того, что определяем значение p в центре (середине) отрезка I как центр (симметрии) квадрата Q .

Разделим данный отрезок I на четыре равных отрезка I_1, I_2, I_3, I_4 и квадрат Q на четыре равных квадрата Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 . Построенные четыре отрезка называются *фракциями* исходного отрезка и пронумерованы таким образом, что фракция с большим номером лежит ближе к концу отрезка. В частности, начало отрезка содержится в I_1 и $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ при $k = 1, 2, 3$. Построенные квадраты, также называются *фракциями* исходного квадрата и пронумерованы так, что Q_k при $k = 1, 2, 3$ имеет с Q_{k+1} общую сторону.

Отображение p определяется на центрах фракций отрезка так, что образ центра I_k совпадает с центром Q_k , $k = 1, 2, 3, 4$.

Далее каждую фракцию отрезка I_k мы, в свою очередь, делим на четыре равные фракции $I_{k,1}, I_{k,2}, I_{k,3}, I_{k,4}$, называемые *фракциями второго порядка*, нумеруемые по тем же правилам, что применялись выше для фракций первого порядка. Отметим, что при этом получается, что $I_{k,4} \cap I_{k+1,1} \neq \emptyset$ при $k = 1, 2, 3$.

Аналогично Q_k разбивается на четыре фракции второго порядка $Q_{k,1}, Q_{k,2}, Q_{k,3}, Q_{k,4}$, нумерация которых определяется по правилам, описанным выше, с дополнительным условием $Q_{k,4} \cap Q_{k+1,1} \neq \emptyset$ при $k = 1, 2, 3$, выполнение которого всегда можно обеспечить ввиду свободы выбора первого элемента. В результате после второго подразделения отображение p доопределяется на всех центрах $I_{j,k}$ так, что переводит их в центры $Q_{j,k}$ – фракций второго порядка квадрата с тем же самым номером.

Рис. 1. Три шага построения кривой Пеано–Гильберта

Далее фракции второго порядка подразделяются на фракции третьего порядка, фракции третьего порядка на фракции четвертого и так до бесконечности. В результате отображение p определяется на всюду плотном множестве центров фракций всех порядков, с которого однозначно продолжается до непрерывного отображения исходного отрезка на квадрат. При этом построенное отображение переводит фракции отрезка в соответствующие (того же порядка) фракции квадрата.

Если линейно интерполировать определенное выше отображение центров фракций k -го порядка, то получатся кривые, приближающие кривую Пеано–Гильберта

с точностью до радиуса круга, описанного вокруг фракции k -го порядка. Интерполяционные кривые для первых трех шагов построения изображены на рис. 1.

Функциональное уравнение единичной (отображающей единичный отрезок на единичный квадрат) кривой Пеано–Гильберта в комплексной плоскости (надчеркивание означает комплексное сопряжение, i – мнимую единицу) согласно [2] может быть записано так:

$$2p(t) = \begin{cases} \overline{ip(4t)} & \text{для } 0 \leq t \leq 1/4; \\ i + p(4t - 1) & \text{для } 1/4 \leq t \leq 1/2; \\ i + 1 + p(4t - 2) & \text{для } 1/2 \leq t \leq 3/4; \\ i + 2 - \overline{ip(4t - 3)} & \text{для } 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Кривая Пеано–Гильберта является единственным непрерывным решением уравнения (1) и единственной правильной пеановской кривой фрактального рода 4 в смысле [3].

1. Оценка снизу. Договоримся отображаемый отрезок называть единичным временным отрезком. Тогда кривая будет траекторией, описываемой точкой за единичный отрезок времени. Соответственно, прообразы точек кривой можно называть моментами времени их прохождения.

ЛЕММА 1. *Единичная кривая Пеано–Гильберта с началом в левом нижнем углу квадрата проходит его левый верхний угол в момент $1/3$, правый верхний угол – в момент $2/3$, правый нижний угол – в момент 1 (см. рис. 2).*

Рис. 2. Времена прохождения углов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из функционального уравнения (1) получаем

$$\begin{aligned} 2p(0) &= \overline{ip(0)} \implies p(0) = 0, \\ 2p\left(\frac{1}{3}\right) &= i + p\left(\frac{4}{3} - 1\right) = i + p\left(\frac{1}{3}\right) \implies p\left(\frac{1}{3}\right) = i, \\ 2p\left(\frac{2}{3}\right) &= i + 1 + p\left(\frac{8}{3} - 1\right) = i + 1 + p\left(\frac{2}{3}\right) \implies p\left(\frac{2}{3}\right) = i + 1, \\ 2p(1) &= i + 2 - \overline{ip(4 - 3)} = i + 2 - \overline{ip(1)} \implies p(1) = 1. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. *Квадрато-линейный коэффициент растяжения единичной кривой Пеано–Гильберта не меньше 6.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из функционального уравнения кривой Пеано–Гильберта вытекает ее самоподобие: ограничение кривой на любую фракцию подобно всей кривой. Поэтому моменты времени прохождения углов фракций единичного квадрата в силу леммы 1 представляют собой третьи доли от времен прохождения этих фракций.

Таким образом, определенные времена прохождения углов фракций единичного квадрата изображены на рис. 3. На нем числами обозначены времена прохождения углов соответствующих фракций квадрата (некоторые углы, общие для разных фракций, кривая приходит неоднократно). Рассчитывая квадрато-линейное отношение для всех пар из получившихся точек, найдем среди них максимум; это и будет оценка снизу коэффициента квадрато-линейного растяжения.

Рис. 3. Времена прохождения углов фракций

Рис. 4. Пара точек с квадрато-линейным отношением, равным 6

На каждом следующем шаге построения кривой количество точек с известными временами учетверяется. Проводя такие расчеты, мы получим уже на четвертом шаге построения точки, проходимые в моменты $t_1 = 23/48$, $t_2 = 25/48$ (рис. 4), для которых квадрато-линейное отношение равно 6:

$$\frac{(1/2)^2}{25/48 - 23/48} = 6.$$

2. Оценка сверху. Деление отрезка на три равные части порождает деление квадрата, являющегося его образом при отображении Пеано–Гильберта на три части, которые мы будем называть *третьями* квадрата. Первая треть квадрата – это образ первой трети отрезка.

ЛЕММА 3. *Если углы единичного квадрата обходятся в следующем порядке – левый верхний, левый нижний, правый нижний, правый верхний, – то первая треть квадрата представляет собой объединение бесконечной последовательности фракций квадрата Q_k , $k = 1, 2, \dots$, таких, что*

$$Q_k = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2^k}, \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}} \right) \leq y \leq \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \right\},$$

где x обозначает расстояние от точки до левой стороны квадрата, а y – до верхней (рис. 5). При этом квадрат Q_k является образом временного интервала

$$\left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{k-1}} \right), \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^k} \right) \right].$$

Рис. 5. Треть и ее дополнение

Рис. 6. Оценка времени 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квадрат Q_1 является первой четвертью единичного, а первая треть единичного, очевидно, представляет собой объединение Q_1 и первой трети от второй четверти единичного квадрата. Далее, первая треть от второй четверти состоит из Q_2 , который является первой четвертью второй четверти единичного квадрата, и первой трети от второй четверти второй четверти. Аналогично доказывается, что первая треть содержит Q_3 и остальные Q_k . Так как Q_k проходятся в порядке возрастания номеров и время прохождения Q_k равно $1/4^k$, то момент прохождения Q_k определяется равенством

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^k} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^k}, \quad (2)$$

из которого вытекает утверждение леммы о временном интервале прохождения Q_k . Это равенство для $k = \infty$ влечет, что время прохождения совокупности Q_k в точности равно $1/3$.

ЛЕММА 4. Пусть точка $M(b, a)$ такова, что $1/2^{n+1} < a \leq 1/2^n$. Тогда время T , необходимое кривой Пеано–Гильберта для прохождения от $A(0, 0)$ до M , удовлетворяет неравенству

$$T \geq \frac{1}{3} \frac{a}{2^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $a = 1/2^n$. Не теряя общности, можем предполагать, что $a \geq b$. Действительно, в противном случае мы можем сменить обозначения $a \rightleftharpoons b$. Измерим время от точки A до верхней стороны (рис. 6) квадратной фракции n -го порядка (имеющей сторону $1/2^n$). Первая точка, в которую мы попадем на ней – это левый верхний угол. Как было доказано в лемме 1, время от A до угла

равно трети от времени прохождения всего этого квадрата, которое равно $1/4^n$. Следовательно, до M времени потребуется не меньше:

$$T \geq \frac{1}{3} \frac{1}{4^n} \geq \frac{1}{3} \frac{1}{2^n} a.$$

Эта же оценка верна и в случае, когда M не принадлежит первой трети рассматриваемой фракции кривой.

2) Пусть $1/2^{n+1} < a < 1/2^n$ и M принадлежит первой трети рассматриваемой фракции кривой. Тогда существует натуральное $m > 1$ такое, что

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m-1}} \leq a < \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m-1}} + \frac{1}{2^{n+m}}. \quad (3)$$

В силу леммы 3 это означает, что для того, чтобы дойти до точки M из A , нужно обойти целиком не менее одного раза квадраты со сторонами $1/2^{n+1}, 1/2^{n+2}, \dots, 1/2^{n+m-1}$. Следовательно, время достижения точки M не меньше, чем суммарное время прохождения этих квадратов, т.е.

$$T \geq \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \dots + \frac{1}{4^{n+m-1}} = \frac{1}{4^{n+1}} \frac{1 - 1/4^m}{1 - 1/4} = \frac{1}{3} \frac{1}{4^n} \left(1 - \frac{1}{4^m}\right).$$

Из неравенства (3) следует, что

$$a < \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - 1/2^{m+1}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right) \leq \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{4^m}\right).$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\frac{1}{3} \frac{1}{2^n} a < T.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если расстояние от некоторой точки до стороны единичного квадрата равно $a \geq 1/2$, то время T , необходимое единичной кривой Пеано–Гильберта для прохождения от этой точки до этой стороны, удовлетворяет неравенству $T \geq a/3$.

Квадрато-линейное отношение для пары моментов времени x, y кратко будем обозначать

$$F(x, y) = \frac{|p(x) - p(y)|^2}{|x - y|}.$$

ЛЕММА 5. Если $p(x)$ и $p(y)$ принадлежат фракциям K_x и K_y одинакового порядка, которые пересекаются по одному общему углу, то $F(x, y) \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку “масштабированная” кривая $kp(x/k^2)$ при любом положительном k имеет такое же квадрато-линейное растяжение, как единичная кривая Пеано–Гильберта $p(x)$, подбором масштаба $k = 1/2^n$ мы можем добиться того, чтобы квадраты K_x и K_y были единичными и проходились за единичное время.

Считаем, что правый верхний угол K_x совпадает с левым нижним углом K_y . Пусть Q_x обозначает четверть K_x , содержащую его левый нижний угол, а Q_y обозначает четверть K_y , содержащую его правый верхний угол (рис. 7).

Доказательство распадается на три случая в зависимости от расположения $p(x)$ и $p(y)$ в этих четвертях.

Первый случай: $p(x) \notin Q_x$ и $p(y) \notin Q_y$. В этом случае наиболее удаленными точками квадратов K_x и K_y без четвертей Q_x и Q_y являются правый нижний угол Q_x и левый верхний угол Q_y , квадрат расстояния между которыми равен $1^2 + 2^2 = 5$. Так как $|x - y| > 1$, в этом случае получаем, что $F(x, y) < 5$.

Второй случай: $p(x) \in Q_x$ и $p(y) \notin Q_y$. Тогда $p(x)$ и $p(y)$ удалены друг от друга не более, чем левый нижний угол квадрата K_x и левый верхний угол Q_y , квадрат расстояния между которыми равен $1.5^2 + 2^2 = 6.25$. А так как время от x до выхода из K_x в этом случае занимает не менее 0.25, то $|x - y| \geq 1.25$ и $F(x, y) \leq 6.25/1.25 = 5$. Случай $p(x) \notin Q_x$ и $p(y) \in Q_y$ аналогичен разобранному.

Третий случай: $p(x) \in Q_x$ и $p(y) \in Q_y$. В этом случае, с одной стороны, очевидно, что $|p(x) - p(y)|^2 \leq 2^2 + 2^2 = 8$, а с другой, — что $|x - y| \geq 1/4 + 1 + 1/4 = 1.5$. Поэтому $F(x, y) \leq 8/1.5 < 6$.

Рис. 7. Пара квадратов

Рис. 8. Восемь квадратов

На рис. 8 изображены восемь единичных квадратов. В последующих леммах рассматриваются некоторые варианты расположения двух точек в этих квадратах.

ЛЕММА 6. Если $p(x)$ принадлежит K_0 (согласно рис. 8), а $p(y)$ принадлежит K_2, K_3 или K_4 , то $F(x, y) \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как нетрудно видеть, “масштабированная” кривая $kp(x/k^2)$ при любом положительном k имеет такое же квадрато-линейное растяжение, что и единичная кривая Пеано–Гильберта $p(x)$. Поэтому подбором масштаба $k = 1/2^n$ мы можем добиться того, чтобы все квадраты K_i (на рис. 8) проходились за единичное время. При этом ограничение кривой на эти квадраты будет изометрично единичной кривой Пеано–Гильберта. При доказательстве этой леммы мы через p будем обозначать именно таким образом отмасштабированную кривую.

Будем считать, что время ориентировано так, что кривая выходит из K_0 , в котором лежит $p(x)$, и спустя некоторое время входит в один из перечисленных в условии леммы квадратов, в котором лежит $p(y)$. Через a обозначаем расстояние от $p(x)$ до стороны выхода из K_0 , а через b — расстояние от $p(y)$ до стороны входа в квадрат, в котором лежит $p(y)$.

Через $D(a, b)$ мы будем обозначать максимально возможный квадрат расстояния между $p(x)$ и $p(y)$, а через $T(a, b)$ – минимально необходимое время для прохождения от $p(x)$ до $p(y)$. В таком случае для квадрато-линейного отношения справедлива оценка

$$F(x, y) \leq \frac{D(a, b)}{T(a, b)}. \quad (4)$$

Последовательно рассмотрим все четыре случая расположения $p(y)$.

1) Пусть $p(y) \in K_2$. Если $a \geq 1/2$ и $b \geq 1/2$, то следствие 1 позволяет сделать такую оценку:

$$T(a, b) \geq 3 + \frac{1}{3}(a + b) \geq 3\frac{1}{3} = \frac{11}{3},$$

потому что путь от K_0 до K_2 содержит как минимум три полных квадрата. В свою очередь, $D(a, b)$, очевидно, оценивается сверху величиной $4^2 + 2^2 = 20$. Поэтому в этом случае

$$F(x, y) \leq \frac{D(a, b)}{T(a, b)} \leq \frac{60}{11} < 6.$$

Если $a < 1/2$ и $b \geq 1/2$, то

$$T(a, b) \geq 3 + \frac{b}{3} \geq 3\frac{1}{6},$$

а для $D(a, b)$ получаются три варианта оценки в зависимости от стороны выхода из K_0 и стороны входа в K_2 :

$$D(a, b) \leq \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + b + 2\right)^2 + 2^2, & \text{если выход сверху, а вход снизу;} \\ \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + (b + 1)^2, & \text{если выход сверху, а вход слева;} \\ (3 + b)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, & \text{если выход справа, а вход снизу.} \end{cases}$$

Максимум $D(a, b)$ достигается при $b = 1$ и равен $18\frac{1}{4}$. Поэтому в рассмотренных случаях получаем такую оценку квадрато-линейного отношения:

$$F(x, y) \leq \frac{18\frac{1}{4}}{3\frac{1}{6}} = \frac{219}{38} < 6.$$

В случае же боковых входа и выхода для $D(a, b)$ получается только тривиальная оценка $\leq 4^2 + 2^2 = 20$, но в этом случае путь будет содержать не меньше четырех полных квадратов, так что $T(a, b) > 4$ и $F(x, y) < 20/4 = 5 < 6$.

Случай $a \geq 1/2$ и $b < 1/2$ разбирается точно так же, как предыдущий. Его можно даже формально свести к предыдущему, если обратить время и поменять верх-низ и право-лево местами.

Наконец, пусть $a < 1/2$ и $b < 1/2$. Тогда имеем

$$D(a, b) \leq \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\right)^2 + 2^2, & \text{если выход сверху, а вход снизу;} \\ \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2, & \text{если выход сверху, а вход слева;} \\ \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, & \text{если выход справа, а вход снизу.} \end{cases}$$

Наибольшее значение равно $14\frac{1}{2}$, тогда как $T(a, b)$, очевидно, больше трех. Поэтому $F(x, y) < 14\frac{1}{2}/3 < 6$. Случай боковых входа и выхода, как и выше, дает оценку $T(a, b) > 4$; поэтому даже тривиальная оценка $D(a, b) < 4^2 + 2^2 = 20$ позволяет заключить, что в этом случае $F(x, y) < 20/4 = 5$.

Таким образом, случай второго квадрата разобран полностью.

2) Пусть $p(y) \in K_3$. Кривая Пеано–Гильберта устроена таким образом, что если путь от K_0 к K_3 не является прямым, то он проходит как минимум еще через три квадрата. Поэтому время от нулевого до третьего квадрата не меньше, чем 3, тогда как максимум квадратов расстояний между этими квадратами не превосходит $3^2 + 1^2 = 10$. Поэтому в этом случае $F(x, y) \leq 10/3 < 4$.

В случае прямого пути у нас всегда выход сверху, а вход снизу, поэтому $D(a, b) \leq (1 + a + b)^2 + 1$. Теперь если $a > 1/2$ и $b > 1/2$, то $T(a, b) \geq 1 + (a + b)/3$. Поэтому получаем такое неравенство:

$$F(x, y) \leq \frac{(1 + a + b)^2 + 1}{1 + (a + b)/3}.$$

Так как производная по переменной $a + b$ дроби в правой части положительна при неотрицательных $a, b \leq 1$, максимума дробь достигает при $a = b = 1$. Этот максимум равен 6.

Если $a \geq 1/2 > b$, то справедливы оценки $D(a, b) \leq (a + 1/2 + 1)^2 + 1$ и $T(a, b) \geq 1 + a/3$. Отсюда

$$F(x, y) \leq \frac{(a + 1/2 + 1)^2 + 1}{1 + a/3}.$$

Производная по a у дроби справа положительна; поэтому максимум ее достигается при $a = 1$ и этот максимум меньше, чем 6.

Случай $a < 1/2 \leq b$ аналогичен предыдущему. Наконец, если a и b меньше $1/2$, то $D(a, b) \leq 2^2 + 1 = 5$, а $T(a, b) > 1$, поэтому $F(x, y) \leq 5$.

3) Пусть $p(y) \in K_4$. В этом случае максимум квадрата расстояний между точками нулевого и четвертого квадратов равен $2^2 + 3^2 = 13$; поэтому путь, проходящий более двух целых квадратов, позволяет оценить $F(x, y) < 13/3$. Если же путь содержит только два целых квадрата, то из выхода нулевого квадрата и входа первого ровно один является боковым. Поэтому можно ограничиться рассмотрением случая выхода справа и входа снизу. В этом случае имеем оценку $D(a, b) \leq (2 + b)^2 + (1 + a)^2$. Если хотя бы одно из a и b больше $1/2$, то $T(a, b) \geq 2 + 1/6$. Поэтому $F(x, y) \leq 13/(2 + 1/6) = 6$. Если же $a, b < 1/2$, то $D(a, b) \leq (2 + 1/2)^2 + (1 + 1/2)^2 = 8\frac{1}{2}$ и, так как $T(a, b) > 2$, получим $F(x, y) < 5$.

ЛЕММА 7. Если $p(x) \in K_0$ (согласно рис. 8) и $p(y) \in K_1$, то $F(x, y) \leq 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Максимальный квадрат расстояния между точками K_0 и K_1 равен 17. Если совершать обход не напрямик, то между ними будет как минимум три квадрата. Следовательно, $F(x, y) \leq 17/3 < 6$. Это значит, что для доказательства можно ограничиться рассмотрением случая, когда обход совершается согласно рис. 9.

Последнюю треть K_0 (содержащего $p(x) = X$) и первую треть K_1 (где находится $p(y) = Y$) будем называть *ближними третями*.

Доказательство распадается на три различных случая в зависимости от того, в какой из третей своих квадратов находятся X и Y . Первый случай, когда X и Y

Рис. 9. Порядок обхода

Рис. 10. Случаи разных областей

находятся в ближних третях своих квадратов (левая часть рис. 10). Второй случай, когда или X или Y (ровно одна из них) находится в ближней трети своего квадрата (средняя часть рис. 10). Третий случай, когда и X и Y находятся за пределами ближних третей своих квадратов (правая часть рис. 10).

Третий случай сводится ко второму: достаточно только из двух точек выбрать ту, которая более удалена от левой вертикальной границы квадратов. Пусть это X (рис. 10). Затем выберем точку Z в ближней трети первого квадрата, находящуюся на том же расстоянии от X , что и точка Y ; тогда время до нее будет меньше, чем до Y , а значит, $F(x, z) > F(x, y)$.

Рассмотрим первый случай, когда точки X и Y находятся в ближних третях своих квадратов (рис. 10). Пусть X удалена от верхней границы своего квадрата на a , Y удалена от нижней границы своего квадрата на b . Предположим, что $a < 1/2$ и $b < 1/2$. В этом случае

$$|p(x) - p(y)|^2 \leq 1^2 + (a + b + 2)^2 \leq 1 + 3^2 = 10.$$

В то же время $|x - y| \geq 2$, потому что кривая по пути из нулевого квадрата в первый должна пройти, как минимум, два целых единичных квадрата. Следовательно, в этом случае $F(x, y) \leq 5$.

Предположим, что $a < 1/2$ и $b \geq 1/2$. В этом случае в силу следствия 1 имеет место неравенство

$$F(x, y) \leq \frac{(1/2)^2 + (2 + 1/2 + b)^2}{2 + b/3}.$$

Правая часть есть возрастающая функция, достигающая максимума при $b = 1$; следовательно, имеет место следующая оценка:

$$F(x, y) \leq \frac{75}{14} < 6.$$

Пусть теперь $a \geq 1/2$ и $b \geq 1/2$. Зафиксируем натуральные k и l так, что справедливы неравенства

$$1 - \frac{1}{2^{k-1}} \leq a \leq 1 - \frac{1}{2^k} \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{2^{l-1}} \leq b \leq 1 - \frac{1}{2^l}. \quad (5)$$

Пусть $t(x)$ – время от X до выхода из нулевого квадрата и $t(y)$ – время от входа первого квадрата до Y . Тогда в силу леммы 3 имеют место неравенства

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{k-1}} \right) \leq t(x) \leq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^k} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{l-1}} \right) \leq t(y) \leq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^l} \right). \quad (6)$$

Докажем, что $F(x, y)$ меньше 6 при любых k и l . Пусть для определенности $k = l + s$, где $s \geq 0$ (случай $k < l$ рассматривается аналогично). Тогда разность абсцисс точек $p(x)$ и $p(y)$ не превосходит $1/2^l$ в силу леммы 3; поэтому справедливо неравенство

$$F(x, y) \leq \frac{(2 + a + b)^2 + (1/2^l)^2}{2 + t(x) + t(y)}.$$

Значит, неравенство $F(x, y) < 6$ вытекает из следующего:

$$(2 + a + b)^2 + \left(\frac{1}{2^l} \right)^2 < 12 + 6(t(x) + t(y)).$$

Последнее неравенство, в свою очередь, вытекает из следующего, в котором a и b заменены их верхними оценками из (5), а $t(x)$ и $t(y)$ нижними оценками из (6):

$$\left(4 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l} \right)^2 + \left(\frac{1}{2^l} \right)^2 < 12 + 6 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{k-1}} + 1 - \frac{1}{4^{l-1}} \right).$$

Последнее неравенство серией равносильных преобразований приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} 16 + \frac{1}{4^k} + \frac{2}{4^l} - 8 \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l} \right) + \frac{2}{2^{k+l}} &< 16 - \frac{2}{4^{k-1}} - \frac{2}{4^{l-1}}, \\ \frac{9}{4^k} + \frac{10}{4^l} + \frac{2}{2^{k+l}} &< 8 \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l} \right), \\ 9 \frac{2^l}{2^k} + 10 \frac{2^k}{2^l} + 2 &< 8(2^k + 2^l), \\ 9 \cdot 2^{-s} + 10 \cdot 2^s + 2 &< 16(2^l + 2^{l+s}). \end{aligned}$$

Так как $l > 0$, то $16 \cdot 2^l > 2 + 9 \cdot 2^{-s}$, а $16 \cdot 2^{l+s} > 10 \cdot 2^s$. Значит, самое последнее неравенство верно, поэтому верно и первое, т.е. для любых $p(x)$ и $p(y)$ из близких третей своих квадратов-фракций имеем $F(x, y) < 6$.

Разберем теперь второй случай (рис. 10). Пусть X находится в ближней трети своего квадрата, а Y – за пределами ближней трети своего. (Ввиду горизонтальной симметрии нулевого и первого квадратов случай, когда Y находится в ближней трети, можно не рассматривать.)

Пусть X удалена от верхней границы своего квадрата на расстояние a , а от левой границы – на b , и пусть Y удалена от левой границы своего квадрата на c .

Предположим, что $a < 1/2$. В этом случае

$$|p(x) - p(y)|^2 \leq 1^2 + (a + 3)^2 \leq 1 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}.$$

В то же время $|x - y| \geq 2 + 1/3$, потому что кривая по пути из нулевого квадрата в первый должна пройти, как минимум, два целых единичных квадрата и треть квадрата с Y . Следовательно, в этом случае $F(x, y) < 6$.

Рис. 11. Верхний квадрат

Пусть теперь $a \geq 1/2$. Тогда по лемме 3 для некоторого натурального $k > 1$ выполняется

$$0 \leq b \leq \frac{1}{2^k}, \quad a \leq 1 - \frac{1}{2^{k-1}}. \quad (7)$$

Рассмотрим подробнее верхний квадрат (рис. 11). Для некоторого l выполняется неравенство $1/2^{l+1} \leq c \leq 1/2^l$. Тогда точка Y лежит в содержащей левый верхний угол первого квадрата фракции порядка l . Эта фракция состоит из четырех подфракций порядка $l + 1$, которые обходятся, начиная с левой нижней вверх, направо, вниз, и точка Y попадает в третью или четвертую подфракцию. Следовательно, время $t(y)$ от левого верхнего угла первого квадрата до Y занимает не менее половины времени прохождения фракции порядка l , т.е. имеет место неравенство

$$t(y) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^l} = \frac{1}{2^{2l+1}}. \quad (8)$$

Обозначим через s минимум из k и l . Тогда верхняя оценка для $F(x, y)$ выглядит следующим образом:

$$F(x, y) \leq \frac{(3 + a)^2 + (1/2^s)^2}{t(x) + 7/3 + t(y)}, \quad (9)$$

где $t(x)$ – время от точки X до левого верхнего угла нулевого квадрата – в силу леммы 3 удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{k-1}}\right) \leq t(x) \leq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^k}\right). \quad (10)$$

Заменяя a его верхней оценкой (7) в числителе дроби (9) и заменяя $t(x)$, $t(y)$ в знаменателе этой дроби их нижними оценками (10), (8), получаем неравенство

$$F(x, y) \leq \frac{(3 + 1 - 1/2^{k-1})^2 + (1/2^s)^2}{(1/3)(1 - 1/4^{k-1}) + 7/3 + 1/2^{2l+1}}. \quad (11)$$

Поэтому нам достаточно убедиться, что дробь в левой части (11) меньше 6 при любых натуральных k, l , т.е. достаточно проверить справедливость следующего неравенства:

$$\left(4 - \frac{2}{2^k}\right)^2 + \frac{1}{4^s} \leq 2\left(1 - \frac{1}{4^{k-1}}\right) + 14 + \frac{3}{4^l},$$

левая часть которого представляет собой числитель дроби (11), а правая – ее ушестеренный знаменатель. Раскрытие скобок в этом неравенстве приводит к равносильному неравенству

$$16 - \frac{16}{2^k} + \frac{4}{4^k} + \frac{1}{4^s} \leq 2 - \frac{8}{4^k} + 14 + \frac{3}{4^l}.$$

Наконец, приведение подобных с переносами отрицательных слагаемых позволяют преобразовать его к виду

$$\frac{12}{4^k} + \frac{1}{4^s} \leq \frac{16}{2^k} + \frac{3}{4^l},$$

в котором оба слагаемых в левой части, очевидным образом, не превосходят соответствующих слагаемых в правой части. Значит, последнее неравенство верно. Тем самым, завершено доказательство неравенства $F(x, y) \leq 6$ для второго случая расположения X и Y . Таким образом, были рассмотрены все случаи возможного расположения двух точек и во всех случаях было доказано неравенство $F(x, y) \leq 6$.

ЛЕММА 8. *Квадрато-линейный коэффициент растяжения кривой Пеано–Гильберта не превосходит 6.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольные точки на отрезке с координатами x и y соответственно. Их образами на квадрате служат $p(x)$ и $p(y)$.

Пусть n – наибольшее натуральное число такое, что x и y принадлежат соседним (в частности, совпадающим) фракциям n -го порядка отрезка. Тогда имеется несколько вариантов расположения фракций $(n+1)$ -го порядка, содержащих $p(x)$ и $p(y)$.

1) Пусть x и y принадлежат одной и той же фракции n -го порядка, а $p(x)$ и $p(y)$ принадлежат соседним фракциям порядка $n+1$. В этом случае

$$|p(x) - p(y)|^2 \leq \left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = \frac{5}{4^{n+1}}.$$

Так как по условию $|x - y| > 1/4^{n+1}$, то $F(x, y) < 5$.

2) Пусть x и y принадлежат одной и той же фракции n -го порядка, а $p(x)$ и $p(y)$ не принадлежат соседним фракциям порядка $n+1$. В этом случае обозначим через K_x фракцию $(n+1)$ -го порядка, содержащую $p(x)$, и через K_y – фракцию $(n+1)$ -го порядка, содержащую $p(y)$. Эти фракции должны пересекаться в рассматриваемом случае по углу. Поэтому неравенство $F(x, y) < 6$ для этого случая вытекает из леммы 5.

Теперь осталось разобраться со случаями, когда $p(x)$ и $p(y)$ лежат в соседних (по стороне) фракциях n -го порядка, которые мы будем обозначать через K_x и K_y соответственно. Также мы будем обозначать через $Q_x \subset K_x$ и $Q_y \subset K_y$ фракции $(n+1)$ -го порядка, содержащие $p(x)$ и $p(y)$ соответственно.

3) Пусть $Q_x \cap Q_y \neq \emptyset$. Если Q_x и Q_y пересекаются по углу, то неравенство $F(x, y) < 6$ вытекает из леммы 5. Если они пересекаются по стороне, то, так как Q_x не может непосредственно следовать за Q_y и непосредственно ему предшествовать в силу максимальности n , путь от Q_x до Q_y должен включать в себя, как минимум, две дополнительных фракции порядка $n+1$. Поэтому $|x - y| \geq 2/4^{n+1}$ и, очевидно, что $|p(x) - p(y)|^2 \leq 5/4^{n+1}$, откуда $F(x, y) < 2.5$.

4) $Q_x \cap K_y = \emptyset$ и Q_x симметрично Q_y относительно общей стороны K_x и K_y . Неравенство $F(x, y) \leq 6$ в этом случае следует из леммы 7.

5) $Q_x \cap K_y = \emptyset$ и Q_x несимметрично Q_y относительно общей стороны K_x и K_y . В этом случае неравенство $F(x, y) \leq 6$ следует из леммы 6.

6) $Q_y \cap K_x = \emptyset$ и Q_x несимметрично Q_y относительно общей стороны K_x и K_y . В этом случае изменение ориентации времени позволяет создать ситуацию, разобранную в предыдущем случае.

Теорема 1 теперь следует из лемм 2 и 8.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. В. Щепин, "Повышающие размерность отображения и непрерывная передача информации", *Вопросы чистой и прикладной математики*, **1**, Приокское книжное изд-во, Тула, 1987, 148–155.
- [2] Е. В. Щепин, К. Е. Бауман, "О кривых Пеано фрактального рода 9", *Моделирование и анализ данных*, Труды факультета информационных технологий МГППУ, вып. 1, Русавиа, М., 2004, 78–89.
- [3] Е. В. Щепин, "О фрактальных кривых Пеано", *Тр. МИАН*, **247** (2004), 204–303.

К. Е. Бауман

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

03.04.2006