Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, К задаче существования элемента с заданными уклонениями от расширяющейся системы подпространств, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 657–667

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3075>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 08:32:19

УДК 517.982.256

К ЗАДАЧЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТА С ЗАДАНЫМИ УКЛОНЕНИЯМИ ОТ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

П. А. Бородин

Задача о существовании элемента банахова пространства, имеющего заданные отклонения от расширяющейся системы строго вложенных (необязательно конечномерных) подпространств этого пространства, решается при дополнительных ограничениях на отклонения или на подпространства.

Библиография: 12 названий.

Указанная в заголовке задача формулируется так: пусть задана счетная система $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \dots$ строго вложенных линейных подпространств некоторого бесконечномерного банахова пространства $(X, \|\cdot\|)$, полная в X :

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} = X,$$

а также последовательность неотрицательных чисел $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots, d_n \rightarrow 0$. Существует ли элемент $x \in X$, отклонения $\rho(x, Y_n) := \inf\{\|x - y\| : y \in Y_n\}$ которого от подпространств Y_n равны этим числам:

$$\rho(x, Y_n) = d_n, \quad n = 1, 2, \dots? \quad (1)$$

Если такой элемент существует для любых таких подпространств Y_n и чисел d_n , то говорят, что пространство X обладает (В)-свойством.

Кроме гильбертова пространства, до сих пор неизвестно ни одного примера пространства X , обладающего (В)-свойством.

В работе изложена история задачи (1) (см. введение) и новые результаты, решающие ее при дополнительных условиях на числа d_n или на подпространства Y_n (см. теоремы 1, 2 и следствие 3).

1. Введение. История задачи (1) восходит к С.Н. Бернштейну [1], который положительно решил ее в случае, когда X есть пространство $C[a; b]$ действительных функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$, с равномерной нормой, а Y_n при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ является подпространством алгебраических многочленов

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00962.

степени не выше n . А. Ф. Тиман ([2; гл. 2, п. 2.5]) без особых усилий перенес доказательство Бернштейна на более общий случай произвольного банахова пространства X и системы строго вложенных конечномерных подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$. Основной составляющей этого доказательства является следующее утверждение.

ЛЕММА А (Бернштейн, Тиман). Пусть X – произвольное банахово пространство, $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset X$ – конечная система строго вложенных подпространств, $d_1 > d_2 > \dots > d_n \geq 0$, z – произвольный элемент из $X \setminus Y_n$. Тогда существует элемент $x \in X$, для которого $\rho(x, Y_k) = d_k$, $k = 1, \dots, n$, $\|x\| \leq d_1 + 1$, и $x - \lambda z \in Y_n$ для некоторого $\lambda > 0$.

В случае, когда все Y_k – подпространства существования (в частности, когда все Y_k конечномерны или когда X рефлексивно), это утверждение справедливо и для любого набора чисел $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$.

Напомним, что подпространство $Y \subset X$ называется подпространством существования, если для любого $x \in X$ в Y существует элемент y , ближайший к x : $\|x - y\| = \rho(x, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varepsilon = \min\{d_n - d_{n-1}, \dots, d_2 - d_1, 1\}$, $x_n = z$, и выберем произвольные элементы $x_k \in Y_{k+1} \setminus Y_k$, $k = 1, \dots, n-1$. Для $\lambda_n = d_n / \rho(x_n, Y_n)$ имеем $\rho(\lambda_n x_n, Y_n) = d_n$. В подпространстве Y_n найдется такой элемент y_n , что $\|\lambda_n x_n - y_n\| \leq d_n + \varepsilon$. Функция $f(\lambda) := \rho(\lambda_n x_n - y_n + \lambda x_{n-1}, Y_{n-1})$ непрерывна при $\lambda \in [0; \infty)$, $f(0) \leq \|\lambda_n x_n - y_n\| \leq d_n + \varepsilon \leq d_{n-1}$, и $f(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$, поэтому найдется такое $\lambda_{n-1} \in [0; \infty]$, что $f(\lambda_{n-1}) = d_{n-1}$, т.е. $\rho(\lambda_n x_n - y_n + \lambda_{n-1} x_{n-1}, Y_{n-1}) = d_{n-1}$. В подпространстве Y_{n-1} найдется такой элемент y_{n-1} , что $\|\lambda_n x_n - y_n + \lambda_{n-1} x_{n-1} - y_{n-1}\| \leq d_{n-1} + \varepsilon$. При этом $\rho(\lambda_n x_n - y_n + \lambda_{n-1} x_{n-1} - y_{n-1}, Y_n) = \rho(\lambda_n x_n, Y_n) = d_n$ и $\rho(\lambda_n x_n - y_n + \lambda_{n-1} x_{n-1} - y_{n-1}, Y_{n-1}) = \rho(\lambda_n x_n - y_n + \lambda_{n-1} x_{n-1}, Y_{n-1}) = d_{n-1}$. Повторяя эту процедуру еще $n-2$ раза, получим элемент $x = \lambda_n x_n - y_n + \lambda_{n-1} x_{n-1} - y_{n-1} + \dots + \lambda_2 x_2 - y_2 + \lambda_1 x_1 - y_1$, для которого $\rho(x, Y_k) = d_k$, $k = 1, \dots, n$, $\|x\| \leq d_1 + \varepsilon \leq d_1 + 1$, и $x - \lambda_n z \in Y_n$. При этом, если все Y_k – подпространства существования и $\varepsilon = 0$, то на каждом шаге в качестве $y_k \in Y_k$ берется элемент, ближайший в Y_k к элементу $\lambda_n x_n - y_n + \dots - y_{k+1} + \lambda_k x_k$.

Лемма А доказана.

Теорема Бернштейна–Тимана легко следует из леммы А: если $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ – счетная система строго вложенных конечномерных подпространств в X и $d_1 \geq d_2 \geq \dots$, $d_n \rightarrow 0$, то по лемме А строится последовательность элементов $x_m \in Y_{m+1}$ с $\rho(x_m, Y_k) = d_k$, $k = 1, \dots, m$, и $\|x_m\| \leq d_1 + 1$, $m = 1, 2, \dots$. Пусть y_{km} – элемент Y_k , ближайший к x_m . При каждом фиксированном k последовательность $\{y_{km}\}_{m=k}^\infty$ предкомпактна в силу конечномерности Y_k и того, что $\|y_{km}\| \leq \|x_m\| + \|x_m - y_{km}\| \leq d_1 + 1 + d_k \leq 2d_1 + 1$. Применяя диагональный процесс, найдем такую последовательность $\Lambda \subset \mathbb{N}$, что при каждом k последовательность $\{y_{km}\}_{m \in \Lambda}$ фундаментальна. Соответствующая последовательность $\{x_m\}_{m \in \Lambda}$ также фундаментальна в силу оценки

$$\|x_m - x_l\| \leq \|x_m - y_{km}\| + \|x_l - y_{kl}\| + \|y_{km} - y_{kl}\| = 2d_k + \|y_{km} - y_{kl}\|,$$

и для предельного элемента x имеем $\rho(x, Y_k) = d_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Как видно из этого рассуждения и доказательства леммы А, элементы x_m с $\rho(x_m, Y_k) = d_k$, $k = 1, \dots, m$, могут строиться по-разному и без предположения

конечномерности подпространств Y_k , и основная проблема при решении общей задачи (1) методом Бернштейна–Тимана состоит в доказательстве предкомпактности последовательности $\{x_m\}$.

В 1963 г. В. Н. Никольский [3] заметил, что для справедливости основного утверждения леммы А с произвольными $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ пространство X необходимо должно быть рефлексивным. Более точно, если для любой пары подпространств $Y_0 \subset Y_1 \subset X$, $Y_0 = \{0\}$, $Y_1 = \ker f := \{y \in X : f(y) = 0\}$, где $f \in X^*$ – некоторый ненулевой линейный непрерывный функционал на X , существует элемент $x \in X$ с $\rho(x, Y_0) = \rho(x, Y_1) = 1$, то X рефлексивно. Действительно, $\rho(x, Y_0) = \|x\|$, $\rho(x, Y_1) = f(x)/\|f\|$, и равенство $1 = \|x\| = f(x)/\|f\|$ означает, что функционал f достигает своей нормы на элементе x . Если же каждый функционал $f \in X^*$ достигает своей нормы, то X рефлексивно по теореме Джеймса [4]. Это замечание В. Н. Никольского показывает, что в случае произвольного X и произвольных Y_n можно надеяться на положительное решение задачи (1) только в случае строго монотонной последовательности уклонений $d_1 > d_2 > \dots$. Именно, если в нерефлексивном пространстве X взять нерефлексивное подпространство Y_2 с бесконечной коразмерностью, в Y_2 взять подпространство Y_1 – ядро некоторого функционала из Y_2^* , не достигающего своей нормы на Y_2 , в качестве Y_0 взять $\{0\}$, а в качестве $Y_3 \subset Y_4 \subset \dots$ – произвольные подпространства, содержащие Y_2 , то для системы подпространств $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ и чисел $d_0 = d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = \dots = 0$ задача (1) не имеет решения.

В то же время И. С. Тюремских [5] доказал, что в *гильбертовом* пространстве X задача (1) имеет положительное решение для любых Y_n и d_n (см. также следствие 2 ниже).

Шапиро [6] показал, что в любом бесконечномерном пространстве X для любых подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ и любых чисел $d_1 \geq d_2 \geq \dots$, $d_n \rightarrow 0$, существует такой элемент x , что $\rho(x, Y_n) \neq O(d_n)$, $n \rightarrow \infty$.

Этот результат был усилен Тюремских [7], который при тех же предположениях установил существование такого элемента $x \in X$, что $\rho(x, Y_n) \geq d_n$, $n = 1, 2, \dots$. Приведем свое доказательство этого утверждения. Если в X существует такое подпространство Z , что $Y_1 \subset Z$ и $0 < \dim(Y_k/Z) < \infty$ при каждом $k \geq 2$, то согласно теореме Бернштейна–Тимана в факторпространстве X/Z найдется такой класс смежности $[x]$, что $\rho([x], Y_n/Z) = d_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда для элемента x имеем $\rho(x, Y_n) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y_n\} \geq \inf\{\|x - y - z\| : y \in Y_n, z \in Z\} = \rho([x], Y_n/Z) = d_n$, т.е. $\rho(x, Y_n) \geq d_n$, $n = 1, 2, \dots$. Что касается подпространства Z , то его можно построить следующим образом. Возьмем какие-нибудь элементы $y_n \in Y_n \setminus Y_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, и построим с помощью теоремы Хана–Банаха такие функционалы $f_n \in X^*$, что $f_n(y_n) > 0$ и $Y_{n-1} \subset \ker f_n$, $n = 2, 3, \dots$. Положим $Z := \bigcap_{n=2}^\infty \ker f_n$. Имеем $Y_1 \subset Z$, а для $k \geq 2$ имеем $Y_k \subset \ker f_n$ при $n \geq k + 1$, поэтому $\dim Y_k/Z = \dim(Y_k / \bigcap_{n=2}^k \ker f_n) < \infty$. В то же время $y_k \notin Z$ и $y_k \in Y_k$, так что $\dim(Y_k/Z) \geq 1$. Доказательство закончено.

Этот результат Тюремских показывает, что пример отрицательного решения задачи (1) в случае строго монотонной последовательности d_n невозможно построить, “играя” на медленном убывании этой последовательности. Как показывают теорема 1 и следствие 1 (см. ниже), для построения такого примера не подойдут и быстро убывающие последовательности.

Отметим, что теорема Бернштейна–Тимана (случай конечномерных подпространств Y_n) обобщалась на различные классы линейных метрических пространств (см. работы [8], [9] и библиографию в них). Кроме того, в последнее время задача (1) решается в случае *нелинейных* множеств Y_n – например, множеств рациональных функций степени не выше n [10], [11].

2. Случай быстро убывающих уклонений d_n .

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – произвольное бесконечномерное банахово пространство, $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ – произвольная счетная система строго вложенных подпространств в X , а числовая последовательность $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ такова, что $d_n > \sum_{k=n+1}^\infty d_k$ для каждого натурального $n \geq n_0$, при котором $d_n > 0$. Тогда существует элемент $x \in X$, для которого $\rho(x, Y_n) = d_n$, $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай произвольного n_0 легко сводится к случаю $n_0 = 1$: умея строить элемент z с $\rho(z, Y_n) = d_n$ при $n \geq n_0$, мы по лемме А построим элемент x с $\rho(x, Y_k) = d_k$ при $k = 1, \dots, n_0$ и такой, что $x - \lambda z \in Y_{n_0}$ при некотором $\lambda > 0$. Но тогда $d_{n_0} = \rho(x, Y_{n_0}) = \rho(\lambda z, Y_{n_0}) = \lambda d_{n_0} \implies \lambda = 1$ и $\rho(x, Y_n) = d_n$ при всех $n \geq n_0$.

Ниже считаем $n_0 = 1$.

Если $d_n = 0$ для какого-то n , то искомым элемент существует по лемме А, примененной к пространству Y_n и подпространствам $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_{n-1}$ в нем. Поэтому ниже считаем $d_n > 0$ при всех n .

Для каждого натурального n положим

$$\varepsilon_n = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ d_k - \sum_{j=k+1}^\infty d_j \right\}.$$

В силу нашего предположения $\varepsilon_n > 0$, и по лемме А найдутся такие элементы $q_n \in Y_{n+1} \setminus Y_n$, что $\rho(q_n, Y_n) = 1$ и

$$\|q_n\| = \rho(q_n, \{0\}) = \frac{d_n + \varepsilon_n/2^n}{d_n} < 2.$$

Кроме того, найдется такой функционал $f_n \in Y_n^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \ \forall y \in Y_n\}$, что $\|f_n\| = 1 = f_n(q_n)$ (см. [12; гл. 2, п. 3, лемма 12]).

Положим $\lambda_n^n = d_n$. Очевидно, $\rho(\lambda_n^n q_n, Y_n) = d_n$. Пусть, для определенности, $f_{n-1}(q_n) \geq 0$. Тогда

$$\rho(\lambda_n^n q_n, Y_{n-1}) \leq \|\lambda_n^n q_n\| = d_n + \frac{\varepsilon_n}{2^n} < d_{n-1},$$

а с другой стороны,

$$\rho(\lambda_n^n q_n + d_{n-1} q_{n-1}, Y_{n-1}) \geq f_{n-1}(\lambda_n^n q_n + d_{n-1} q_{n-1}) \geq d_{n-1},$$

и потому найдется такое число $\lambda_{n-1}^n \in [0; d_{n-1}]$, что $\rho(\lambda_n^n q_n + \lambda_{n-1}^n q_{n-1}, Y_{n-1}) = d_{n-1}$. (Если $f_{n-1}(q_n) < 0$, то нужное число λ_{n-1}^n найдется на отрезке $[-d_{n-1}; 0]$.) В то же время $\rho(\lambda_n^n q_n + \lambda_{n-1}^n q_{n-1}, Y_n) = \rho(\lambda_n^n q_n, Y_n) = d_n$.

Пусть уже найдены такие числа $\lambda_n^n \in [-d_n; d_n], \dots, \lambda_k^n \in [-d_k; d_k]$, что $\rho(z_k := \lambda_n^n q_n + \dots + \lambda_k^n q_k, Y_m) = d_m$ при всех $m = k, \dots, n$. Пусть для определенности $f_{k-1}(z_k) \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(z_k, Y_{k-1}) &\leq \|z_k\| \leq \sum_{j=k}^n |\lambda_j^n| \|q_j\| \leq \sum_{j=k}^n d_j \frac{d_j + \varepsilon_j/2^j}{d_j} \\ &\leq \sum_{j=k}^n d_j + \varepsilon_{k-1} \sum_{j=k}^n \frac{1}{2^j} < \sum_{j=k}^n d_j + \varepsilon_{k-1} \leq d_{k-1}, \end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\rho(z_k + d_{k-1}q_{k-1}, Y_{k-1}) \geq f_{k-1}(z_k + d_{k-1}q_{k-1}) \geq d_{k-1},$$

и потому найдется такое число $\lambda_{k-1}^n \in [0; d_{k-1}]$, что $\rho(z_k + \lambda_{k-1}^n q_{k-1}, Y_{k-1}) = d_{k-1}$. (Если $f_{k-1}(z_k) < 0$, то нужное число λ_{k-1}^n найдется на отрезке $[-d_{k-1}; 0]$.) В то же время $\rho(z_k + \lambda_{k-1}^n q_{k-1}, Y_m) = \rho(z_k, Y_m) = d_m$ при каждом $m = k, \dots, n$.

Продолжая этот процесс до $k = 1$ включительно, получим элемент $x_n = \lambda_n^n q_n + \dots + \lambda_1^n q_1$, для которого $\rho(x_n, Y_k) = d_k$ и $|\lambda_k^n| \leq d_k$ при каждом $k = 1, \dots, n$. С помощью обычного диагонального процесса выберем последовательность Λ номеров n , для которых при каждом натуральном k имеет место сходимость $\lambda_k^n \rightarrow \lambda_k$ при $n \rightarrow \infty, n \in \Lambda$. Имеем $|\lambda_k| \leq d_k$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k q_k$ сходится по норме пространства X :

$$\left\| \sum_{k=m}^n \lambda_k q_k \right\| \leq \sum_{k=m}^n |\lambda_k| \|q_k\| \leq \sum_{k=m}^n d_k \cdot 2 \leq 2d_{m-1} \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Элемент $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k q_k$ является пределом последовательности $\{x_n\}_{n \in \Lambda}$:

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &\leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k^n - \lambda_k| \|q_k\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k| \|q_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^N |\lambda_k^n - \lambda_k| \|q_k\| + \sum_{k=N+1}^n (|\lambda_k^n| + |\lambda_k|) \|q_k\| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k| \|q_k\| \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^N |\lambda_k^n - \lambda_k| + \sum_{k=N+1}^n 2d_k \cdot 2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \cdot 2 \\ &\leq 2N \max_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k^n - \lambda_k| + 4d_N \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda, \quad N = N(n) \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho(x, Y_k) = \lim_{\Lambda \ni n \rightarrow \infty} \rho(x_n, Y_k) = d_k, k = 1, 2, \dots$.

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой системы подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ бесконечно-номерного банахова пространства X и любой последовательности $d_1 \geq d_2 \geq \dots, d_n \rightarrow 0$, существует такой элемент $x \in X$, что $\rho(x, Y_n) \leq d_n$, причем $d_n > 0 \implies \rho(x, Y_n) > 0, n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $h_1 := d_1$, $h_n := \min\{h_{n-1}/3, d_n\}$, $n = 2, 3, \dots$, при каждом n удовлетворяет условиям: $h_n \leq d_n$, $d_n > 0 \implies h_n > 0$ и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{h_n}{3^{k-n}} \leq h_n,$$

причем знак последнего неравенства строгий в случае $h_n > 0$.

Применяя теорему 1 к системе $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, получаем требуемый элемент x .

3. Дополнительные условия на подпространства Y_n .

ЛЕММА 1. Пусть $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n > 0$, а система строго вложенных подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n$ банахова пространства X удовлетворяет условию: существуют такие ненулевые элементы $q_n \in X \setminus Y_n$, $q_k \in Y_{k+1} \setminus Y_k$, $k = 1, \dots, n-1$, что для любого ненулевого элемента $q \in \langle q_k, \dots, q_n \rangle$ (из линейной оболочки $q_k, \dots, q_n$) выполняется неравенство

$$\frac{\rho(q, Y_k)}{\rho(q, Y_{k-1})} \geq \frac{d_k}{d_{k-1}}, \quad k = 2, \dots, n.$$

Тогда в подпространстве $\langle q_1, \dots, q_n \rangle$ найдется такой элемент x , что $\rho(x, Y_k) = d_k$, $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n .

При $n = 1$ в качестве искомого можно взять элемент

$$x = \frac{d_1}{\rho(q_1, Y_1)} q_1.$$

При $n = 2$ для любого элемента

$$x(\lambda) = \frac{d_2}{\rho(q_2, Y_2)} q_2 + \lambda q_1$$

имеем

$$\rho(x(\lambda), Y_2) = \rho\left(\frac{d_2}{\rho(q_2, Y_2)} q_2, Y_2\right) = d_2.$$

С другой стороны,

$$\rho(x(0), Y_1) = \rho\left(\frac{d_2}{\rho(q_2, Y_2)} q_2, Y_1\right) = \frac{d_2}{\rho(q_2, Y_2)} \rho(q_2, Y_1) \leq d_1$$

и $\rho(x(\lambda), Y_1) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$, поэтому найдется такое число λ_0 , что $\rho(x(\lambda_0), Y_1) = d_1$.

В случае $n \geq 3$ для любого ненулевого элемента $u \in \langle q_{n-1}, q_n \rangle$ и любого элемента $q \in \langle q_k, \dots, q_{n-2}, u \rangle$ имеем

$$\frac{\rho(q, Y_k)}{\rho(q, Y_{k-1})} \geq \frac{d_k}{d_{k-1}}, \quad k = 2, \dots, n-2, \quad \frac{\rho(u, Y_{n-1})}{\rho(u, Y_{n-2})} \geq \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}},$$

поэтому система $q_1, \dots, q_{n-2}, u$ удовлетворяет условиям леммы в отношении подпространств $Y_1, \dots, Y_{n-1}$. По предположению индукции существует такой элемент

$x(u) \in \langle q_1, \dots, q_{n-2}, u \rangle$, что $\rho(x(u), Y_k) = d_k$, $k = 1, \dots, n-1$. Обозначим через $\lambda(u)$ число, для которого $x(u) - \lambda(u)u \in \langle q_1, \dots, q_{n-2} \rangle$. Очевидно, $\lambda(u) = d_{n-1}/\rho(u, Y_{n-1})$, т.е. $\lambda(u)$ непрерывно зависит от u . Следовательно, функция $\rho(x(u), Y_n) = \rho(\lambda(u)u, Y_n)$ тоже непрерывно зависит от u . При этом $\rho(x(q_{n-1}), Y_n) = 0$, а

$$\rho(x(q_n), Y_n) = \rho(\lambda(q_n)q_n, Y_n) = \frac{d_{n-1}}{\rho(q_n, Y_{n-1})}\rho(q_n, Y_n) \geq d_n,$$

поэтому найдется такой элемент $u_n \in \langle q_{n-1}, q_n \rangle$, что для соответствующего элемента $x = x(u_n)$ выполняется дополнительное равенство $\rho(x, Y_n) = d_n$.

Лемма 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d_0 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots$, $d_n \rightarrow 0$, а счетная система строго вложенных подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ бесконечномерного банахова пространства X удовлетворяет условию: существуют такие ненулевые элементы $q_n \in Y_{n+1} \setminus Y_n$, $n = 1, 2, \dots$, что для любого $k \geq 1$ и любого элемента $q \in \langle q_k, q_{k+1}, \dots \rangle$ (из линейной оболочки $q_k, q_{k+1}, \dots$) выполняется неравенство

$$\|q\| \leq \frac{d_{k-1}}{d_k} \rho(q, Y_k).$$

Тогда в замыкании $\overline{\langle q_1, q_2, \dots \rangle}$ линейной оболочки элементов q_n найдется такой элемент x , что $\rho(x, Y_n) = d_n$, $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых натуральных чисел $2 \leq k < n$ и любого ненулевого элемента $q \in \langle q_k, \dots, q_n \rangle$ получаем

$$\frac{\rho(q, Y_k)}{\rho(q, Y_{k-1})} \geq \frac{\rho(q, Y_k)}{\|q\|} \geq \frac{d_k}{d_{k-1}}.$$

Следовательно, по лемме 1 найдутся такие элементы $x_n \in \langle q_1, \dots, q_n \rangle$, что $\rho(x, Y_k) = d_k$, $k = 1, \dots, n$.

Покажем, что из последовательности x_n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Пусть $x_n = y_k^n + v_k^n$, где $k < n$, $y_k^n \in \langle q_1, \dots, q_{k-1} \rangle$, $v_k^n \in \langle q_k, q_{k+1}, \dots \rangle$. Имеем

$$\begin{aligned} \|v_k^n\| &\leq \frac{d_{k-1}}{d_k} \rho(v_k^n, Y_k) = \frac{d_{k-1}}{d_k} \rho(x_n, Y_k) = d_{k-1}, \\ \|y_k^n\| &\leq \|x_n\| + \|v_k^n\| \leq \frac{d_0}{d_1} \rho(x_n, Y_1) + d_{k-1} = d_0 + d_{k-1}. \end{aligned}$$

С помощью диагонального процесса выберем такую последовательность $\Lambda \subset \mathbb{N}$, чтобы для каждого фиксированного k имела место сходимост $y_k^n \rightarrow y_k$, $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$ (при каждом фиксированном k элементы $\{y_k^n\}_{n=1}^\infty$ ограничены и лежат в конечномерном подпространстве). Тогда при $n, m \in \Lambda$ и $k < \min\{n, m\}$ получаем

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|y_k^n - y_k^m\| + \|v_k^n\| + \|v_k^m\| \\ &\leq \|y_k^n - y_k^m\| + 2d_{k-1} \rightarrow 0, \quad n, m, k(n, m) \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е. последовательность $\{x_n\}_{n \in \Lambda}$ фундаментальна и сходится к искомому элементу x .

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2 (Тюремских [5]). В гильбертовом пространстве X задача (1) решается положительно для любых Y_n и d_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве q_k любой ненулевой элемент из подпространства Y_{k+1} , ортогональный подпространству Y_k . Тогда для любого элемента $q \in \langle q_k, q_{k+1}, \dots \rangle$ имеем $q \perp Y_k$ и

$$\|q\| = \rho(q, Y_k) \leq \frac{d_{k-1}}{d_k} \rho(q, Y_k),$$

так что выполнены все условия теоремы 2 (число d_0 можно положить равным d_1).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X есть одно из пространств c_0 или ℓ_p , $1 < p < \infty$, $d_1 > d_2 > \dots$, $d_n \rightarrow 0$, а система строго вложенных подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$ такова, что для любого $n \geq n_0$ размерность факторпространства Y_{n+1}/Y_n бесконечна. Тогда в X существует такой элемент x , что $\rho(x, Y_n) = d_n$, $n = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай произвольного n_0 легко сводится к случаю $n_0 = 1$: умея строить элемент z с $\rho(z, Y_n) = d_n$ при $n \geq n_0$, мы по лемме А построим элемент x с $\rho(x, Y_k) = d_k$ при $k = 1, \dots, n_0$ и такой, что $x - \lambda z \in Y_{n_0}$ при некотором $\lambda > 0$. Но тогда $d_{n_0} = \rho(x, Y_{n_0}) = \rho(\lambda z, Y_{n_0}) = \lambda d_{n_0} \implies \lambda = 1$ и $\rho(x, Y_n) = \rho(z, Y_n) = d_n$ при всех $n \geq n_0$.

Дальнейшие рассуждения проведем в случае $n_0 = 1$ и $X = c_0$.

Построим индуктивно элементы q_n , требуемые в теореме 2.

Положим $d_0 = 2d_1$,

$$\varepsilon_k = \min_{1 \leq j \leq k} \frac{d_{j-1} - d_j}{4d_{j-1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Возьмем произвольный элемент $q_1 \in Y_2 \setminus Y_1$ со свойствами $\|q_1\| = 1$, $\rho(q_1, Y_1) > 1 - \varepsilon_1$. Существует такой функционал $f_1 \in Y_1^\perp \subset c_0^* = \ell_1$, что $\|f_1\| = 1$ и $f_1(q_1) > 1 - \varepsilon_1$. Выберем такой номер n_1 , что для координатного проектора $\pi_1: (x^1, x^2, \dots, x^{n_1}, \dots) \rightarrow (0, \dots, 0, x^{n_1}, x^{n_1+1}, \dots)$, действующего в пространствах c_0 и ℓ_1 , имеют место неравенства $\|\pi_1(q_1)\| \leq \varepsilon_1/2$, $\|\pi_1(f_1)\| \leq \varepsilon_1/2$.

Подпространство $\pi_1(c_0) = \{x \in c_0 : x^1 = x^2 = \dots = x^{n_1-1} = 0\}$ имеет конечную коразмерность в c_0 , а по условию $\dim Y_3/Y_2 = \infty$, поэтому $\dim[(Y_3 \cap \pi_1(c_0))/\pi_1(Y_2)] = \infty$, и в подпространстве $Y_3 \cap \pi_1(c_0)$ найдется такой элемент q_2 , что $\|q_2\| = \|\pi_1(q_2)\| = 1$ и $\rho(q_2, Y_2) \geq \rho(q_2, \pi_1(Y_2)) > 1 - \varepsilon_2$. Возьмем такой функционал $f_2 \in Y_2^\perp \cap \pi_1(\ell_1)$, что $\|f_2\| = 1$ и $f_2(q_2) > 1 - \varepsilon_2$. Выберем такой номер n_2 , что для координатного проектора $\pi_2: (x^1, x^2, \dots, x^{n_2}, \dots) \rightarrow (0, \dots, 0, x^{n_2}, x^{n_2+1}, \dots)$, действующего в пространствах c_0 и ℓ_1 , имеют место неравенства $\|\pi_2(q_1)\| \leq \varepsilon_1/2^2$, $\|\pi_2(f_1)\| \leq \varepsilon_1/2^2$, $\|\pi_2(q_2)\| \leq \varepsilon_2/2^2$, $\|\pi_2(f_2)\| \leq \varepsilon_2/2^2$.

Продолжая этот процесс по индукции, получим последовательности $\{n_k\}$ натуральных чисел, соответствующих координатных проекторов $\pi_k: (x^1, x^2, \dots, x^{n_k}, \dots) \rightarrow (0, \dots, 0, x^{n_k}, x^{n_k+1}, \dots)$, действующих в пространствах c_0 и ℓ_1 , элементов $q_k \in Y_{k+1} \cap \pi_{k-1}(c_0)$, элементов $f_k \in Y_k^\perp \cap \pi_{k-1}(\ell_1)$ со следующими свойствами: $\|q_k\| = 1$, $\|f_k\| = 1$, $f_k(q_k) > 1 - \varepsilon_k$; $\|\pi_k(q_j)\| \leq \varepsilon_j/2^k$, $1 \leq j \leq k$; $\|\pi_k(f_j)\| \leq \varepsilon_j/2^k$, $1 \leq j \leq k$.

Покажем, что последовательность $\{q_k\}$ удовлетворяет требованиям теоремы 2. Для этого возьмем произвольную конечную линейную комбинацию $q = \sum_{j=k}^N \lambda_j q_j$ с нормой $\|q\| = 1$ и докажем, что $\rho(q, Y_k) \geq d_k/d_{k-1}$.

Для каждого $m = k, \dots, N$ имеем

$$\begin{aligned} 1 = \|q\| &\geq \|\pi_{m-1}(q) - \pi_m(q)\| \geq \|(\pi_{m-1} - \pi_m)(\lambda_m q_m)\| \\ &- \sum_{j \neq m} \|(\pi_{m-1} - \pi_m)(\lambda_j q_j)\| = |\lambda_m| \|q_m\| - \sum_{j=k}^{m-1} \|(\pi_{m-1} - \pi_m)(\lambda_j q_j)\| \\ &\geq |\lambda_m| - \sum_{j=k}^{m-1} |\lambda_j| \|\pi_{m-1}(q_j)\| \geq |\lambda_m| - \sum_{j=k}^{m-1} |\lambda_j| \frac{\varepsilon_j}{2^{m-1}} \\ &\geq |\lambda_m| - \frac{\varepsilon_1}{2^{m-1}} \sum_{j=k}^{m-1} |\lambda_j| \geq |\lambda_m| - \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{j=k}^{m-1} |\lambda_j|, \end{aligned}$$

т.е. $|\lambda_k| \leq 1$ и

$$|\lambda_m| \leq 1 + \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{j=k}^{m-1} |\lambda_j|$$

при $m > k$, откуда по индукции доказывается, что $|\lambda_m| < 2$ при любом $m \geq k$.

В то же время найдется такое $s \geq k$, что $\|(\pi_{s-1} - \pi_s)(q)\| = \|q\| = 1$, откуда

$$\begin{aligned} |\lambda_s| = \|\lambda_s q_s\| &= \|(\pi_{s-1} - \pi_s)(\lambda_s q_s)\| \geq \|(\pi_{s-1} - \pi_s)(q)\| \\ &- \left\| \sum_{j \neq s} (\pi_{s-1} - \pi_s)(\lambda_j q_j) \right\| = 1 - \left\| \sum_{j=k}^{s-1} (\pi_{s-1} - \pi_s)(\lambda_j q_j) \right\| \\ &\geq 1 - \sum_{j=k}^{s-1} \|(\pi_{s-1} - \pi_s)(\lambda_j q_j)\| \geq 1 - \sum_{j=k}^{s-1} |\lambda_j| \|\pi_{s-1}(q_j)\| \\ &\geq 1 - \sum_{j=k}^{s-1} 2 \cdot \frac{\varepsilon_j}{2^{s-1}} \geq 1 - \varepsilon_k \frac{s-k}{2^{s-2}} \geq 1 - \varepsilon_k \frac{s-1}{2^{s-2}} \geq 1 - \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Далее, поскольку $f_s \in Y_s^\perp \subseteq Y_k^\perp$, то

$$\begin{aligned} \rho(q, Y_k) &\geq |f_s(q)| \geq |f_s(\lambda_s q_s)| - \sum_{j=k}^{s-1} |f_j(\lambda_j q_j)| - \sum_{j=s+1}^N |f_s(\lambda_j q_j)| \\ &\geq |\lambda_s| (1 - \varepsilon_k) - \sum_{j=k}^{s-1} |\lambda_j| |f_s(\pi_{s-1}(q_j))| - \sum_{j=s+1}^N |\lambda_j| |(\pi_{j-1}(f_s))(q_j)| \\ &\geq (1 - \varepsilon_k)^2 - \sum_{j=k}^{s-1} 2 \cdot \frac{\varepsilon_j}{2^{s-1}} - \sum_{j=s+1}^N 2 \cdot \frac{\varepsilon_s}{2^{j-1}} \\ &\geq (1 - \varepsilon_k)^2 - \varepsilon_k \frac{s-k}{2^{s-2}} - \varepsilon_s \frac{1}{2^{s-2}} \geq (1 - \varepsilon_k)^2 - \varepsilon_k \left(\frac{s-1}{2^{s-2}} + \frac{1}{2^{s-2}} \right) \\ &\geq (1 - \varepsilon_k)^2 - 2\varepsilon_k \geq 1 - 4\varepsilon_k \geq 1 - 4 \frac{d_{k-1} - d_k}{4d_{k-1}} = \frac{d_k}{d_{k-1}}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

4. Некоторые родственные задачи. (а) Если в условии задачи (1) отказаться от требования $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} = X$, то получится такая задача: пусть в бесконечномерном банаховом пространстве X задана счетная система строго вложенных линейных подпространств $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots$, а также задана последовательность неотрицательных чисел $d_1 \geq d_2 \geq \dots$ (уже необязательно стремящаяся к нулю). Существует ли элемент $x \in X$, для которого $\rho(x, Y_n) = d_n$, $n = 1, 2, \dots$?

Следующий пример показывает, что эта задача может не иметь решений для всех последовательностей $\{d_n\}$, не стремящихся к нулю и не становящихся постоянными, начиная с некоторого номера. Пусть Z – произвольное бесконечномерное банахово пространство, $L_1 \subset L_2 \subset \dots$ – строго вложенные линейные подпространства в Z , $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n} = Z$. Положим $X = Z \times \mathbb{R}$ с нормой $\|(z, t)\| = \max\{\|z\|, |t|\}$. Подпространства $Y_n = L_n \times \{0\}$ образуют строго расширяющуюся систему в X . Для любого элемента $x = (z, t) \in X$ имеем $\rho(x, Y_n) = \max\{\rho(z, L_n), |t|\}$, т.е. либо $\rho(x, Y_n) = \rho(z, L_n) \rightarrow 0$ (при $t = 0$), либо $\rho(x, Y_n) = |t| > 0$, начиная с некоторого номера n .

(б) В задаче (1) вместо счетной системы подпространств $\{Y_n\}$ можно рассматривать континуальную систему $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in [0;1]}$ строго вложенных подпространств: $Y_\alpha \subset Y_\beta$ при $\alpha < \beta$, и искать элемент x с $\rho(x, Y_\alpha) = \rho(\alpha)$ при любом $\alpha \in [0;1]$, где $\rho(\alpha)$ – (вообще говоря, нестрогая) убывающая неотрицательная функция на отрезке $[0;1]$.

Следующий пример показывает, что такая задача может не иметь решений для любой функции $\rho(\alpha)$, не являющейся функцией скачков. Пусть $X = \ell_2[0;1]$ – пространство функций $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной суммой $\|f\|^2 = \sum_{x \in [0;1]} |f(x)|^2$ (каждая такая функция отлична от нуля на не более чем счетном числе точек $x_k \in [0;1]$, составляющих носитель $\text{supp } f$ функции f). Возьмем в $\ell_2[0;1]$ систему строго вложенных подпространств $Y_\alpha = \{f \in \ell_2[0;1] : \text{supp } f \subset [0; \alpha]\}$, $\alpha \in [0;1]$. Для любой функции $f \in \ell_2[0;1]$ с $\text{supp } f = \{x_k\}$ имеем

$$\rho(f, Y_\alpha)^2 = \sum_{\alpha < x_k \leq 1} |f(x_k)|^2 = \sum_k |f(x_k)|^2 I_{[0; x_k)}(\alpha),$$

где функция $I_{[0; x_k)}(t)$ – индикатор промежутка $[0; x_k)$.

(в) Тюремских [7] исследовал задачу о существовании элемента с заданными отклонениями от *сжимающейся* системы строго вложенных подпространств $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$. Им доказана следующая

ТЕОРЕМА Б. Пусть X – бесконечномерное банахово пространство. Чтобы для любой системы строго вложенных подпространств $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$ в X и любой последовательности $d_1 \leq d_2 \leq \dots$ неотрицательных чисел с $d_n \rightarrow d > 0$ существовал элемент $x \in X$ с $\rho(x, Y_n) = d_n$, $n = 1, 2, \dots$, и $\|x\| = d$, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было рефлексивным.

Необходимость рефлексивности доказывается здесь так же, как в упоминавшемся выше результате Никольского (см. п. 1). В случае же рефлексивного X искомый элемент x может быть построен как элемент из второго сопряженного пространства $X^{**} = X$, т.е. как функционал на пространстве X^* , норма которого на подпространстве $Y_n^\perp \subset X^*$ ($Y_1^\perp \subset Y_2^\perp \subset \dots$) равна d_n , $n = 1, 2, \dots$. Это построение аналогично построению в доказательстве теоремы Хана–Банаха: сначала берется функционал на $Y_1^\perp$ с нормой d_1 , затем он продолжается на $Y_2^\perp$ с нормой d_2 , и т.д.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Бернштейн, “Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций”, *Собрание сочинений*, **2**, Изд-во АН СССР, 1954, 292–294.
- [2] А. Ф. Тиман, *Теория приближений функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960.
- [3] В. Н. Никольский, “О некоторых свойствах рефлексивных пространств”, *Уч. зап. Калин. гос. пед. ин-та*, **29** (1963), 121–125.
- [4] R. C. James, “Reflexivity and the supremum of linear functionals”, *Ann. of Math.*, **66**:1 (1957), 159–169.
- [5] И. С. Тюремских, “ (B) -свойство гильбертовых пространств”, *Уч. зап. Калин. гос. пед. ин-та*, **39** (1964), 53–64.
- [6] H. S. Shapiro, “Some negative theorems on approximation theory”, *Michigan Math. J.*, **11**:3 (1964), 211–217.
- [7] И. С. Тюремских, “Об одной задаче С. Н. Бернштейна”, *Уч. зап. Калин. гос. пед. ин-та*, **52** (1967), 123–129.
- [8] G. Lewicki, “Bernstein’s “lethargy” theorem in metrizable topological linear spaces”, *Monatsh. Math.*, **113**:3 (1992), 213–226.
- [9] А. И. Васильев, “Обратная задача теории наилучшего приближения в F -пространствах”, *Докл. РАН*, **365**:5 (1999), 583–585.
- [10] А. А. Пекарский, “Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями”, *Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук*, 1994, № 1, 23–26.
- [11] А. П. Старовойтов, “К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений”, *Матем. сб.*, **191**:6 (2000), 145–154.
- [12] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, УРСС, М., 2004.

П. А. Бородин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: jborodina@inbox.ru

Поступило

24.02.2006