Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Бутерин, Обратная спектральная задача восстановления оператора свертки, возмущенного одномерным оператором, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 668–682

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3076>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 11:22:48

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ, ВОЗМУЩЕННОГО ОДНОМЕРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

С. А. Бутерин

Рассматривается одномерное возмущение оператора свертки. Исследуется обратная задача восстановления сверточной компоненты по характеристическим числам в предположении, что возмущающее слагаемое известно априори. Задача сводится к решению так называемого основного нелинейного интегрального уравнения с особенностью. Доказывается глобальная разрешимость этого нелинейного уравнения. На основе этого доказана теорема единственности и получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Библиография: 8 названий.

Введение. Основные результаты по обратным задачам спектрального анализа относятся к дифференциальным операторам (см., например, обзоры в [1], [2]). По обратным задачам для интегральных операторов известна работа В. А. Юрко [3], где рассматривался оператор вида

$$Af = Mf + g(x) \int_0^\pi f(t)v(t) dt, \quad Mf = \int_0^x M(x,t)f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (0.1)$$

Исследовалась задача восстановления функций $g(x)$, $v(x)$ по спектральным данным оператора A в предположении, что функция $M(x, t)$ известна априори, и показана связь этой обратной задачи с обратной задачей Штурма–Лиувилля. Как известно, обратный оператор к дифференциальному оператору Штурма–Лиувилля является частным случаем оператора вида (0.1). Такой вид имеют и обратные операторы к дифференциальным и интегро-дифференциальным операторам Вольтерра высших порядков с краевыми условиями на концах, из которых только одно задано в точке π . Более общим краевым условиям соответствует конечномерное возмущение. Отметим, что прямые задачи для конечномерных возмущений вольтерровых операторов исследовались А. П. Хромовым (см., например, [4]) и другими авторами.

В настоящей работе исследуется иная обратная задача для оператора (0.1), а именно, задача восстановления оператора M в предположении, что функции $g(x)$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования, грант № E02-1.0-186, программы “Университеты России”, грант № УР.04.01.042, Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00007, и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ, грант № НШ-1295.2003.1.

$v(x)$ известны априори. В качестве спектральных данных используются характеристические числа оператора A . Нелинейное вхождение M в представление характеристической функции затрудняет решение этой обратной задачи. Рассматривается случай, когда $M(x, t)$ зависит только от разности аргументов, т.е. M является оператором свертки. Заметим, что в более общем случае функции $M(x, t)$ решение рассматриваемой обратной задачи, вообще говоря, неединственно. В разделе 1 устанавливается специальный вид ядра оператора преобразования, связанного с M , который позволяет свести обратную задачу к решению так называемого основного нелинейного интегрального уравнения с особенностью (2.1). Раздел 2 посвящен доказательству глобальной разрешимости этого нелинейного уравнения. Важной частью доказательства является исследование особенности. В разделе 3 с помощью полученных результатов доказана единственность решения обратной задачи и получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Доказательство конструктивно и дает возможность указать алгоритм решения обратной задачи. Основные результаты статьи содержатся в теоремах 3.1, 3.2.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим оператор $A = A(M, g, v)$ вида

$$Af = Mf + g(x) \int_0^\pi f(t)v(t) dt, \quad Mf = \int_0^x M(x-t)f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (1.1)$$

Пусть $M(x) \in W_2^2[0, T]$ для всех $T \in (0, \pi)$, $(\pi - x)M''(x) \in L_2(0, \pi)$; $M(0) = -i$, $M'(0) = 0$. При этих условиях оператор M^{-1} допускает представление

$$M^{-1}y = Dy := iy'(x) + \int_0^x H(x-t)y(t) dt, \quad y(0) = 0,$$

причем функции $N = M''(x)$, $H(x)$ связаны соотношением

$$N(x) = H(x) + i \int_0^x N(t) dt \int_0^{x-t} H(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

и, следовательно,

$$(\pi - x)H(x) \in L_2(0, \pi). \quad (1.3)$$

В дальнейшем считаем, что функция $M(x)$ удовлетворяет указанным условиям и $g(x), v(x) \in W_2^1[0, \pi]$. Если, кроме того, $a_1 a_2 \neq 0$, где

$$a_1 = 1 + ig(0)v(0) + \int_0^\pi v(x)Dg(x) dx, \quad a_2 = ig(0)v(\pi), \quad (1.4)$$

то будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}$.

Характеристические числа λ_k оператора A вида (1.1) совпадают с нулями его характеристической функции

$$\mathcal{L}(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^\pi v(x)g(x, \lambda) dx \quad (1.5)$$

с учетом кратности, где

$$g(x, \lambda) = (E - \lambda M)^{-1}g(x) = g(x) + \lambda \int_0^x M(x-t, \lambda)g(t) dt. \quad (1.6)$$

Здесь E – тождественный оператор, $M(x - t, \lambda)$ – ядро интегрального оператора $R_\lambda(M) = (E - \lambda M)^{-1}M$.

ЛЕММА 1.1. *Справедливо представление*

$$M(x, \lambda) = -i \left(\exp(-i\lambda x) + \int_0^x P(x, t) \exp(-i\lambda(x - t)) dt \right), \quad (1.7)$$

где

$$P(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu \frac{(x-t)^\nu}{\nu!} H^{*\nu}(t). \quad (1.8)$$

Здесь

$$H^{*1}(x) = H(x), \quad H^{*(\nu+1)}(x) = H * H^{*\nu}(x) = \int_0^x H(x-t) H^{*\nu}(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $R_\lambda(M) = M + \lambda M R_\lambda(M)$, то функции $M(x)$ и $M(x, \lambda)$ связаны соотношением

$$M(x, \lambda) = M(x) + \lambda \int_0^x M(x-t) M(t, \lambda) dt,$$

а значит, они обладают одинаковой гладкостью по x , и $M(0, \lambda) = -i$. Действуя оператором $(R_\lambda(M))^{-1} = M^{-1} - \lambda E$ на функцию $y(x) = R_\lambda(M)f(x)$, где $f \in L_2(0, \pi)$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} i \int_0^x M'(x-t, \lambda) f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \int_t^x H(x-\tau) M(\tau-t, \lambda) d\tau \\ = \lambda \int_0^x M(x-t, \lambda) f(t) dt, \end{aligned}$$

где “штрих” обозначает дифференцирование по x . В силу произвольности f функция $M(x, \lambda)$ является решением задачи Коши

$$iM'(x, \lambda) + \int_0^x H(x-t) M(t, \lambda) dt = \lambda M(x, \lambda), \quad M(0, \lambda) = -i$$

и, следовательно, имеет вид (1.7), если

$$\begin{aligned} P(x, x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) \exp(-i\lambda(x-t)) dt \\ = i \int_0^x H(t) \exp(-i\lambda(x-t)) dt \\ + i \int_0^x \exp(-i\lambda(x-t)) dt \int_0^t H(t-\tau) P(x-t+\tau, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

В силу произвольности λ последнее соотношение равносильно задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x, t) = iH(t) + i \int_0^t H(t-\tau) P(x-t+\tau, \tau) d\tau, \quad P(x, x) = 0, \quad 0 \leq t \leq x \leq \pi,$$

которая, в свою очередь, эквивалентна интегральному уравнению

$$P(x, t) = i(x - t)H(t) + i \int_0^{x-t} ds \int_0^t H(t - \tau)P(s + \tau, \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq x \leq \pi. \quad (1.9)$$

Таким образом, если функция $P(x, t)$ является решением уравнения (1.9), то имеет место (1.7). Решаем (1.9) методом последовательных приближений. Положим

$$P_1(x, t) = i(x - t)H(t), \quad P_{\nu+1}(x, t) = i \int_0^{x-t} ds \int_0^t H(t - \tau)P_\nu(s + \tau, \tau) d\tau$$

и по индукции получаем представление

$$P_\nu(x, t) = i^\nu \frac{(x - t)^\nu}{\nu!} H^{*\nu}(t).$$

Ряд в правой части (1.8) сходится равномерно при $0 \leq t \leq x \leq \pi$ и дает решение уравнения (1.9). Лемма 1.1 доказана.

Обозначим

$$\mu_0(x) = \int_x^\pi v(t)g(t - x) dt, \quad \mu(x) = \mu_0(x) + \int_x^\pi P(t, t - x)\mu_0(t) dt. \quad (1.10)$$

Нетрудно показать, что $\mu(x) \in W_2^2[0, \pi]$.

ЛЕММА 1.2. *Для характеристической функции оператора (1.1) справедливо представление*

$$\mathcal{L}(\lambda) = a_1 - a_2 \exp(-i\lambda\pi) + \int_0^\pi w(x) \exp(-i\lambda x) dx, \quad w(x) \in L_2(0, \pi), \quad (1.11)$$

где a_1, a_2 определены в (1.4),

$$w(x) = -i\mu''(x). \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (1.6) в (1.5), осуществляя замену $t \rightarrow x - t$ и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\mathcal{L}(\lambda) = 1 - \mu_0(0)\lambda - \lambda^2 \int_0^\pi \mu_0(x)M(x, \lambda) dx.$$

Используя (1.7), (1.10), приходим к

$$\mathcal{L}(\lambda) = 1 - \mu_0(0)\lambda + i\lambda^2 \int_0^\pi \mu(x) \exp(-i\lambda x) dx.$$

Дважды интегрируя по частям с учетом того, что $\mu(0) = \mu_0(0)$, $\mu(\pi) = 0$, $\mu'(0) = i(a_1 - 1)$, $\mu'(\pi) = ia_2$, получаем (1.11). Лемма 1.2 доказана.

Из представления (1.11) следует (см. [3]), что оператор $A \in \mathcal{A}$ имеет бесконечное множество характеристических чисел λ_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, вида

$$\lambda_k = 2k + \alpha + \kappa_k, \quad \{\kappa_k\} \in \ell_2, \quad \lambda_k \neq 0. \quad (1.13)$$

При этом функция $\mathcal{L}(\lambda)$ определяется своими нулями однозначно по формуле

$$\mathcal{L}(\lambda) = \exp(p\lambda) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right), \quad (1.14)$$

где

$$p = \begin{cases} \frac{i\pi}{\exp(-i\alpha\pi) - 1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^0} - \frac{1}{\lambda_k}\right), & \text{если } \exp(i\alpha\pi) \neq 1, \\ \frac{\pi}{2i} - \frac{1}{\lambda_{-\alpha/2}} + \sum_{k=-\infty, k \neq -\alpha/2}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^0} - \frac{1}{\lambda_k}\right), & \text{если } \exp(i\alpha\pi) = 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Здесь $\lambda_k^0 = 2k + \alpha$. В [3] также доказывается следующее обратное утверждение.

ЛЕММА 1.3. *Даны числа λ_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, вида (1.13). Тогда для функции $\mathcal{L}(\lambda)$, определяемой формулой (1.14), имеет место представление*

$$\mathcal{L}(\lambda) = \gamma(1 - \exp(i(\alpha - \lambda)\pi)) + \int_0^\pi w(x) \exp(-i\lambda x) dx \quad (1.16)$$

с некоторой функцией $w(x) \in L_2(0, \pi)$, где

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{1 - \exp(i\alpha\pi)} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}, & \text{если } \exp(i\alpha\pi) \neq 1, \\ \frac{i}{\pi\lambda_{-\alpha/2}} \prod_{k=-\infty, k \neq -\alpha/2}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}, & \text{если } \exp(i\alpha\pi) = 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

2. Основное нелинейное интегральное уравнение. На соотношение (1.12) можно смотреть как на нелинейное уравнение относительно функции $H(x)$. Дифференцируя (1.10) дважды, получаем с учетом (1.12) следующее уравнение ($a_2 \neq 0$):

$$(\pi - x)H(x) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(b_\nu(x)H^{*\nu}(x) + \int_0^x B_\nu(x, t)H^{*\nu}(t) dt \right), \quad 0 < x < \pi, \quad (2.1)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{iw(\pi - x) - \check{\mu}_0''(x)}{a_2}, \quad \check{\mu}_0(x) = \mu_0(\pi - x), \quad (2.2)$$

$$b_1(x) \equiv 0, \quad b_\nu(x) = i^{\nu+1} \frac{(\pi - x)^\nu}{\nu!}, \quad \nu \geq 2,$$

$$B_\nu(x, t) = -\frac{i^\nu (\pi - x)^{\nu-2}}{a_2 \nu!} (\nu(\nu - 1)\check{\mu}_0(x - t) - 2\nu(\pi - x)\check{\mu}_0'(x - t) + (\pi - x)^2\check{\mu}_0''(x - t)). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1) назовем основным нелинейным интегральным уравнением. Заметим, что условие (1.3) обеспечивает $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ и, кроме того,

$$\int_0^\pi (\pi - x)\varphi(x) dx = 0. \quad (2.4)$$

Действительно, согласно (1.12), (2.2) запишем $\mu''(x) = \mu_0''(x) + a_2\varphi(\pi - x)$, и так как $\mu'(\pi) = \mu_0'(\pi)$, $\mu(\pi) = \mu_0(\pi)$, то интегрируя это выражение дважды, получаем

$$\mu(x) = \mu_0(x) + a_2 \int_x^\pi dt \int_t^\pi \varphi(\pi - \tau) d\tau.$$

Поскольку $\mu(0) = \mu_0(0)$, приходим к (2.4). Настоящий раздел посвящен доказательству следующего обратного утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любой функции $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$, удовлетворяющей (2.4), уравнение (2.1) имеет единственное решение $H(x)$, $(\pi - x)H(x) \in L_2(0, \pi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. П. Хромовым [5] в связи с доказательством одной теоремы Л. А. Сахновича было дано решение уравнения

$$f(x) = y(x) + y * y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.5)$$

закрывающееся в следующем. Сначала решение $y(x)$ отыскивается при $0 < x < \delta$ для достаточно малого δ с помощью принципа сжимающих отображений. Перепишем (2.5) в виде

$$f(x) = y(x) + \int_0^\delta y(x-t)y(t) dt + \int_\delta^x y(x-t)y(t) dt. \quad (2.6)$$

Тогда при $x < 2\delta$ в первом интеграле известна $y(t)$, а во втором – $y(x-t)$. Поэтому (2.6) является уже линейным уравнением при $\delta < x < 2\delta$. Таким образом, зная решение уравнения (2.5) на $(0, \delta)$ при некотором $\delta \in (0, 1)$, можно найти решение на $(\delta, 2\delta)$, а значит, за конечное число шагов оно отыщется на всем интервале $(0, 1)$.

Использованное свойство свертки позволит решить уравнение и более общего вида

$$y(x) = \xi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\psi_\nu(x)y^{*\nu}(x) + \int_0^x \Psi_\nu(x,t)y^{*\nu}(t) dt \right), \quad 0 < x < T, \quad (2.7)$$

где $\psi_1(x) = 0$. Пусть функции $\psi_\nu(x)$, $\Psi_\nu(x,t)$ суммируемы с квадратом, и существуют суммируемые с квадратом функции $u(x)$, $U(x,t)$ такие, что $|\psi_\nu(x)| \leq u(x)$, $|\Psi_\nu(x,t)| \leq U(x,t)$, $0 < t < x < T$, для всех ν .

ТЕОРЕМА 2.2. *Для любой функции $\xi \in L_2(0, T)$ уравнение (2.7) имеет единственное решение $y \in L_2(0, T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что при достаточно малых $\delta > 0$ уравнение (2.7) имеет единственное решение $y(x)$, $0 < x < \delta$, в шаре $B_\delta = \{y : \|y\|_\delta \leq 1/2\}$, где $\|\cdot\|_\delta$ – норма в $L_2(0, \delta)$. Обозначим

$$\psi_\nu y = \psi_\nu(x)y^{*\nu}(x) + \int_0^x \Psi_\nu(x,t)y^{*\nu}(t) dt, \quad \Psi y = \xi + \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu y.$$

Пусть $y, \tilde{y} \in L_2(0, \delta)$. Неравенство Коши–Буняковского дает $|y * \tilde{y}(x)| \leq \|y\|_\delta \|\tilde{y}\|_\delta$ для всех $x \in [0, \delta]$. Для удобства будем считать $\delta \leq 1$. Тогда по индукции получим

оценку $|y^{*\nu}(x)| \leq \|y\|_\delta^\nu$, $\nu \geq 2$, и, следовательно,

$$\|\psi_\nu y\|_\delta \leq C_\delta \|y\|_\delta^\nu, \quad \text{где} \quad C_\delta = \|u\|_\delta + \left(\int_0^\delta \int_0^x U^2(x, t) dt dx \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Кроме того, поскольку

$$y^{*\nu} - \tilde{y}^{*\nu} = (y - \tilde{y}) * (y^{*(\nu-1)} + y^{*(\nu-2)} * \tilde{y}^{*1} + \dots + \tilde{y}^{*(\nu-1)}), \quad \nu \geq 2,$$

и $\|y^{*\nu}\|_\delta \leq \|y\|_\delta^\nu$, приходим к оценке

$$\|\psi_\nu y - \psi_\nu \tilde{y}\|_\delta \leq C_\delta \nu (\max\{\|y\|_\delta, \|\tilde{y}\|_\delta\})^{\nu-1} \|y - \tilde{y}\|_\delta. \quad (2.9)$$

Выберем δ так, чтобы $C_\delta < 1/4$, $\|\xi\|_\delta \leq 1/4$. Тогда из (2.8), (2.9) следует, что оператор Ψ отображает B_δ в B_δ и является сжатием в B_δ . Действительно, пусть $y, \tilde{y} \in B_\delta$; тогда

$$\begin{aligned} \|\Psi y\|_\delta &\leq \|\xi\|_\delta + \sum_{\nu=1}^{\infty} \|\psi_\nu y\|_\delta \leq \|\xi\|_\delta + C_\delta \sum_{\nu=1}^{\infty} \|y\|_\delta^\nu \leq \|\xi\|_\delta + C_\delta < \frac{1}{2}, \\ \|\Psi y - \Psi \tilde{y}\|_\delta &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \|\psi_\nu y - \psi_\nu \tilde{y}\|_\delta \leq C_\delta \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (\max\{\|y\|_\delta, \|\tilde{y}\|_\delta\})^{\nu-1} \|y - \tilde{y}\|_\delta \leq \alpha \|y - \tilde{y}\|_\delta, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = C_\delta \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{2^{\nu-1}} = 4C_\delta < 1.$$

Применяя принцип сжимающих отображений, получаем однозначную разрешимость уравнения (2.7) в B_δ .

Теперь, предполагая, что $y = y_1(x)$ – решение (2.7) при $0 < x < \delta$, $\delta \in (0, \pi)$, покажем, что (2.7) имеет единственное решение $y(x)$ в $L_2(0, 2\delta)$, совпадающее с $y_1(x)$ на $(0, \delta)$. Будем искать $y(x)$ в виде $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, где $y_1(x) = 0$ при $\delta < x < 2\delta$, а $y_2(x) = 0$ при $0 < x < \delta$. По индукции доказывается представление

$$y^{*\nu}(x) = (y_1 + y_2)^{*\nu}(x) = y_1^{*\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\nu-1} C_\nu^k (y_1^{*(\nu-k)} * y_2^{*k})(x) + y_2^{*\nu}(x), \quad \nu \geq 2, \quad (2.10)$$

где $C_\nu^k = \nu! / (k!(\nu - k)!)$. Так как $y_2(x) = 0$ на $(0, \delta)$, то $y_2^{*2}(x) \equiv 0$ на $[0, \delta]$ и

$$y_2^{*2}(x) = \int_\delta^x y_2(t) y_2(x - t) dt = \int_0^{x-\delta} y_2(x - t) y_2(t) dt = 0, \quad \delta \leq x \leq 2\delta.$$

Следовательно, при $\nu \geq 2$ имеем $y_2^{*\nu}(x) \equiv 0$ на $[0, 2\delta]$ и согласно (2.10) получаем выражение

$$y^{*\nu}(x) = y_1^{*\nu}(x) + \nu (y_1^{*(\nu-1)} * y_2)(x), \quad 0 \leq x \leq 2\delta, \quad \nu \geq 2.$$

Подставляя его в (2.7), приходим к линейному уравнению относительно $y_2(x)$:

$$y_2(x) = \zeta(x) + \int_\delta^x \Psi(x, t) y_2(t) dt, \quad \delta < x < 2\delta, \quad (2.11)$$

где функции

$$\zeta(x) = \xi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\psi_{\nu}(x) y_1^{*\nu}(x) + \int_0^x \Psi_{\nu}(x, t) y_1^{*\nu}(t) dt \right),$$

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \left(\psi_{\nu}(x) y_1^{*(\nu-1)}(x-t) + \int_0^{x-t} \Psi_{\nu}(x, t+\tau) y_1^{*(\nu-1)}(\tau) d\tau \right)$$

суммируемы с квадратом. Уравнение (2.11) имеет единственное решение, и поэтому функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является единственным решением уравнения (2.7) в $L_2(0, 2\delta)$, совпадающим с $y_1(x)$ на $(0, \delta)$. Продолжая процесс, за конечное число шагов получаем решение (2.7) на всем интервале $(0, T)$. Оно единственно. В самом деле, пусть $\tilde{y} \in L_2(0, T)$ – другое решение. При достаточно малом $\delta > 0$ обе функции $y(x)$, $\tilde{y}(x)$, $0 < x < \delta$, попадут в шар B_{δ} и согласно первой части доказательства окажутся равными почти всюду на $(0, \delta)$. В силу единственности продолжения решения получим $y(x) = \tilde{y}(x)$ почти всюду на $(0, T)$. Теорема 2.2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.1. Согласно теореме 2.2 существует единственное суммируемое с квадратом решение $H = H_1(x)$ уравнения (2.1) на интервале $(0, \pi/2)$. Как и при ее доказательстве, будем искать решение на $(0, \pi)$ в виде $H(x) = H_1(x) + H_2(x)$, где $H_1(x) = 0$ на $(\pi/2, \pi)$, а $H_2(x) = 0$ на $(0, \pi/2)$. Приходим к следующему уравнению относительно $H_2(x)$:

$$(\pi - x)H_2(x) = \zeta(x) + \int_{\pi/2}^x B(x, t)H_2(t) dt, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \quad (2.12)$$

где

$$\zeta(x) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(b_{\nu}(x) H_1^{*\nu}(x) + \int_0^x B_{\nu}(x, t) H_1^{*\nu}(t) dt \right),$$

$$B(x, t) = B_1(x, t) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \left(b_{\nu}(x) H_1^{*(\nu-1)}(x-t) + \int_0^{x-t} B_{\nu}(x, t+\tau) H_1^{*(\nu-1)}(\tau) d\tau \right).$$

Таким образом, уравнение (2.1) имеет единственное решение $H(x)$, $0 < x < \pi$, суммируемое с квадратом на всяком интервале $(0, T)$, $T \in (0, \pi)$. Однако пока трудно сказать что-либо о суммируемости $H(x)$ на всем $(0, \pi)$. Обозначим $h_2(x) = (\pi - x)H_2(x)$; тогда согласно (2.3) следующее уравнение эквивалентно (2.12):

$$h_2(x) = \zeta(x) + 2 \int_{\pi/2}^x \frac{h_2(t) dt}{\pi - t} + \int_{\pi/2}^x G(x, t) h_2(t) dt, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \quad (2.13)$$

где функция

$$G(x, t) = \frac{i}{a_2(\pi - t)} \left\{ 2 \int_t^x \check{\mu}_0''(x - \tau) d\tau - (\pi - x) \check{\mu}_0''(x - t) \right\}$$

$$+ \frac{1}{\pi - t} \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \left(b_{\nu}(x) H_1^{*(\nu-1)}(x-t) + \int_0^{x-t} B_{\nu}(x, t+\tau) H_1^{*(\nu-1)}(\tau) d\tau \right)$$

суммируема с квадратом при $0 < t < x < \pi$. Теорема 2.1 будет доказана, если показать, что его решение $h_2(x) \in L_2(\pi/2, \pi)$. Однако, как будет видно из леммы 2.2 (см. ниже), уравнение вида (2.13) с произвольно взятыми функциями $\zeta(x)$, $G(x, t)$, суммируемыми с квадратом, вообще говоря, может не иметь решения в нужном классе. Докажем несколько вспомогательных утверждений. Обозначим

$$T_\alpha f = \frac{1}{(b-x)^\alpha} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(b-t)^{1-\alpha}}, \quad T_\alpha^* f = \frac{1}{(b-x)^{1-\alpha}} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(b-t)^\alpha}, \quad a < x < b.$$

ЛЕММА 2.1. *Зафиксируем $\alpha < 1/2$. Тогда операторы T_α, T_α^* отображают $L_2(a, b)$ в $L_2(a, b)$ и ограничены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на применении обобщенного неравенства Минковского

$$\left\{ \int_a^b \left| \int_c^d f(x, t) dt \right|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \int_c^d \left\{ \int_a^b |f(x, t)|^2 dx \right\}^{1/2} dt, \quad (2.14)$$

которое понимается так, что “если правая часть (2.14) конечна, то конечна и левая, и обе части находятся в указанном соотношении” (см. [6; с. 179]). Пусть $f(x) \in L_2(a, b)$. Обозначим $\check{f}(x) = f(b-x)$. Делая последовательно замены $x \rightarrow b-x$, $t \rightarrow b-x$, имеем

$$\int_a^b |T_\alpha^* f(x)|^2 dx = \int_0^{b-a} \left| \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_{b-x}^b \frac{f(t) dt}{(b-t)^\alpha} \right|^2 dx = \int_0^{b-a} \left| \int_0^1 \frac{\check{f}(xt) dt}{t^\alpha} \right|^2 dx,$$

и согласно (2.14) приходим к оценке

$$\|T_\alpha^* f\| \leq \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} \left\{ \int_0^{b-a} |\check{f}(xt)|^2 dx \right\}^{1/2} dt,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(a, b)$. Далее, замена $x \rightarrow (b-x)/t$ дает

$$\|T_\alpha^* f\| \leq \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha+1/2}} \left\{ \int_{b(1-t)+at}^b |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} dt \leq \frac{2}{1-2\alpha} \|f\|,$$

т.е. оператор T_α^* действует из $L_2(a, b)$ в $L_2(a, b)$ и ограничен. В силу теоремы Фубини (см. [7; с. 208]) оператор T_α является сопряженным к T_α^* . Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. *Решение $y(x)$ уравнения*

$$y(x) = f(x) + 2 \int_a^x \frac{y(t) dt}{b-t}, \quad a < x < b, \quad (2.15)$$

удовлетворяет условию $(b-x)^\theta y(x) \in L_2(a, b)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий в зависимости от значения параметра θ :

- 1) $(b-x)^\theta f(x) \in L_2(a, b)$, при $\theta > 3/2$;
- 2) $(b-x)^\theta f(x) \in L_2(a, b)$,

$$\int_a^b (b-x)f(x) dx = 0 \quad (2.16)$$

при $0 \leq \theta < 3/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Делая подстановку, нетрудно убедиться, что решение уравнения (2.15) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \frac{2}{(b-x)^2} \int_a^x (b-t)f(t) dt. \quad (2.17)$$

Пусть $\theta > 3/2$. Легко видеть, что $(b-x)^\theta y(x) = f_0(x) + 2T_\alpha f_0(x)$, где $f_0(x) = (b-x)^\theta f(x) \in L_2(a, b)$, $\alpha = 2 - \theta < 1/2$. Применяя лемму 2.1, имеем $(b-x)^\theta y(x) \in L_2(a, b)$. Пусть теперь $\theta < 3/2$. Используя (2.16), преобразуем (2.17) к виду

$$y(x) = f(x) - \frac{2}{(b-x)^2} \int_x^b (b-t)f(t) dt,$$

откуда после умножения на $(b-x)^\theta$ получаем $(b-x)^\theta y(x) = f_0(x) - 2T_\alpha^* f_0(x)$, где $\alpha = \theta - 1 < 1/2$. Снова используя лемму 2.1, получаем $(b-x)^\theta y(x) \in L_2(a, b)$. Достаточность доказана, перейдем к необходимости. Согласно (2.15) имеем

$$(b-x)^\theta |f(x)| \leq |y_0(x)| + 2 \int_a^x \frac{|y_0(t)|}{b-t} dt \in L_2(a, b),$$

где $y_0(x) = (b-x)^\theta y(x) \in L_2(a, b)$. Пусть $\theta < 3/2$. Умножив обе части (2.15) на $b-x$ и проинтегрировав от 0 до π , получаем (2.16). Лемма 2.2 доказана.

Положим $\beta(x) = (x-b)^5/5$ и обозначим $L_{2,\beta}(a, b)$ – пространство функций $f(x)$, $a < x < b$, с нормой

$$\|f\|_{L_{2,\beta}} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 d\beta(x) \right)^{1/2} = \left(\int_a^b (b-x)^4 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

ЛЕММА 2.3. Для любой функции $f(x) \in L_{2,\beta}(a, b)$ уравнение

$$y(x) = f(x) + 2 \int_a^x \frac{y(t) dt}{b-t} + \int_a^x G(x, t)y(t) dt, \quad a < x < b, \quad (2.18)$$

где

$$\int_a^b \int_a^x |G(x, t)|^2 dt dx < \infty,$$

имеет единственное решение $y(x) \in L_{2,\beta}(a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть линейный ограниченный оператор F взаимно однозначно отображает банахово пространство $\mathcal{B}$ на себя, а линейный оператор $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ вполне непрерывен. Тогда если оператор $S = F + G$ является инъекцией, то он является и биекцией $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}$. Действительно, обозначив $S_1 = SF^{-1}$, имеем $S_1 = E + G_1$, где $G_1 = GF^{-1}$. Тогда S_1 – инъекция, а G_1 вполне непрерывен. Согласно альтернативе Фредгольма (см. [7; с. 649]) S_1 – биекция. Следовательно, S – тоже биекция. Обозначим $F = E - 2T_0$,

$$Gy = \int_a^x G(x, t)y(t) dt = \int_a^x G_\beta(x, t)y(t) d\beta(t), \quad G_\beta(x, t) = \frac{G(x, t)}{(b-t)^4},$$

и запишем уравнение (2.18) в операторном виде: $f = Fy - Gy$. Легко показать, что оператор F ограничен в $L_{2,\beta}(a, b)$ и согласно лемме 2.2 для $\theta = 2$ он является биекцией $L_{2,\beta}(a, b)$ на $L_{2,\beta}(a, b)$. Оператор G отображает $L_{2,\beta}(a, b)$ в себя. Поскольку

$$\int_a^b \int_a^x |G_{\beta}(x, t)|^2 d\beta(t) d\beta(x) \leq \int_a^b \int_a^x |G(x, t)|^2 dt dx < \infty,$$

G является оператором Гильберта–Шмидта, а значит, он вполне непрерывен (см., например, [8; с. 382]). Осталось заметить, что $F - G$ – инъекция, а следовательно, и биекция $L_{2,\beta}(a, b)$ на себя. Лемма 2.3 доказана.

Согласно лемме 2.3 уравнение (2.13) имеет единственное решение $h_2(x)$ такое, что $(\pi - x)^2 h_2(x) \in L_2(\pi/2, \pi)$. Следовательно, уравнение (2.12) имеет единственное решение $H_2(x)$, $(\pi - x)^3 H_2(x) \in L_2(\pi/2, \pi)$. Таким образом, уравнение (2.1) имеет единственное решение $H(x)$, $(\pi - x)^3 H(x) \in L_2(0, \pi)$. Осталось показать, что (2.4) влечет (1.3). Обозначим $h(x) = (\pi - x)H(x)$ и согласно (2.3) перепишем (2.1) в виде

$$h(x) = \varphi(x) + 2 \int_0^x \frac{h(t) dt}{\pi - t} + \alpha_1(x) + \alpha_2(x), \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= i \int_0^x \frac{h(t)}{a_2(\pi - t)} \left\{ 2 \int_0^{x-t} \ddot{\mu}_0''(\tau) d\tau - (\pi - x) \ddot{\mu}_0''(x - t) \right\} dt, \\ \alpha_2(x) &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(b_{\nu}(x) H^{*\nu}(x) + \int_0^x B_{\nu}(x, t) H^{*\nu}(t) dt \right). \end{aligned}$$

Наш дальнейший план – с помощью леммы 2.2 уточнить, что $h(x) \in L_2(0, \pi)$. Для этого докажем еще две леммы. Символом C будем обозначать различные константы в оценках, не зависящие от аргументов функций.

ЛЕММА 2.4. Если $(\pi - x)^l H(x) \in L_2(0, \pi)$, где $3/2 \leq l \leq 3$, то $(\pi - x)^{l-3/2} \alpha_k(x) \in L_2(0, \pi)$, $k = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $h_0(x) = (\pi - x)^{l-1} h(x)$. Тогда по условию леммы $h_0(x) \in L_2(0, \pi)$. Неравенство Коши–Буняковского дает

$$\begin{aligned} |\alpha_1(x)| &\leq C \int_0^x \frac{|h_0(t)| dt}{(\pi - t)^{l-1/2}} \\ &\quad + C(\pi - x) \left(\int_0^x \frac{dt}{(\pi - t)^{2l}} \right)^{1/2} \left(\int_0^x |h_0(t)|^2 |\ddot{\mu}_0''(x - t)|^2 dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда получаем доказываемое для $\alpha_1(x)$, поскольку свертка суммируемых функций есть суммируемая функция. Далее, имеем $\alpha_2(x) = \alpha_{2,1}(x) + \alpha_{2,2}(x)$, где

$$\begin{aligned} \alpha_{2,1}(x) &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \left(b_{\nu}(x) H_1^{*\nu}(x) + \int_0^x B_{\nu}(x, t) H_1^{*\nu}(t) dt \right), \quad \alpha_{2,2}(x) = \int_0^x \Phi(x, t) H_2(t) dt, \\ \Phi(x, t) &= \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \left(b_{\nu}(x) H_1^{*(\nu-1)}(x - t) + \int_0^{x-t} B_{\nu}(x, t + \tau) H_1^{*(\nu-1)}(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Ясно, что $|\alpha_{2,1}(x)| < C$. Кроме того, легко получить оценку

$$|\alpha_{2,2}(x)| \leq C \int_0^x |H_1(x-t)| \frac{|h_2^0(t)| dt}{(\pi-t)^{l-2}} + C \int_0^x \frac{|h_2^0(t)| dt}{(\pi-t)^{l-1}} + C,$$

$h_2^0(x) = (\pi-x)^l H_2(x)$. Отсюда следует $(\pi-x)^{l-3/2} \alpha_{2,2}(x) \in L_2(0, \pi)$. Лемма 2.4 доказана.

ЛЕММА 2.5. Если $(\pi-x)^l H(x) \in L_2(0, \pi)$ при некотором $l < 3$, то

$$\int_0^\pi (\pi-x) \alpha_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\alpha_1(x) = \alpha_{1,1}(x) + \alpha_{1,2}(x)$, где

$$\alpha_{1,1}(x) = \frac{2i}{a_2} \int_0^x \frac{h(t)}{\pi-t} dt \int_0^{x-t} \check{\mu}_0''(\tau) d\tau, \quad \alpha_{1,2}(x) = -i \frac{\pi-x}{a_2} \int_0^x \frac{h(t) \check{\mu}_0''(x-t) dt}{\pi-t}.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_0^s (\pi-x) \alpha_{1,1}(x) dx &= \left\{ -i \frac{(\pi-x)^2}{a_2} \int_0^x \frac{h(t) dt}{\pi-t} \int_0^{x-t} \check{\mu}_0''(\tau) d\tau \right\} \Big|_{x=0}^s \\ &\quad + i \int_0^s \frac{(\pi-x)^2}{a_2} dx \int_0^x \frac{h(t) \check{\mu}_0''(x-t) dt}{\pi-t}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\int_0^s (\pi-x) \alpha_1(x) dx = -i \frac{(\pi-s)^2}{a_2} \int_0^s \frac{h_0(t) dt}{(\pi-t)^3} \int_0^{s-t} \check{\mu}_0''(\tau) d\tau,$$

где $h_0(x) = (\pi-x)^3 H(x)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $s_1 \in (0, \pi)$, чтобы

$$\left(\int_0^{\pi-s_1} |\check{\mu}_0''(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Пусть $s > s_1$; тогда в силу неравенства Коши–Буняковского получаем оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_0^s (\pi-x) \alpha_1(x) dx \right| &\leq C(\pi-s)^2 \int_0^{s_1} \frac{|h_0(t)| dt}{(\pi-t)^3} + C\varepsilon(\pi-s)^2 \int_{s_1}^s \frac{|h_0(t)| dt}{(\pi-t)^{5/2}}, \\ &\int_{s_1}^s \frac{|h_0(t)| dt}{(\pi-t)^{5/2}} \leq C \frac{1}{(\pi-s)^2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Второе слагаемое в (2.21) может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора s_1 , а первое слагаемое стремится к нулю при $s \rightarrow \pi$. Поскольку согласно лемме 2.4 $(\pi-x) \alpha_1(x) \in L(0, \pi)$, приходим к (2.20) для $k = 1$. Далее, обозначим

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \sum_{\nu=2}^{\infty} i^\nu \frac{(\pi-x)^\nu}{\nu!} \int_0^x H^{*\nu}(t) \check{\mu}_0(x-t) dt \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} i^\nu \frac{(\pi-x)^\nu}{\nu!} \left\{ \int_0^x H_1^{*\nu}(t) \check{\mu}_0(x-t) dt \right. \\ &\quad \left. + \nu \int_0^x \frac{h_2^0(t) dt}{(\pi-t)^3} \int_0^{x-t} \check{\mu}_0'(x-t-\tau) d\tau \int_0^\tau H_1^{*(\nu-1)}(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

где $h_2^0(x) = (\pi - x)^3 H_2(x) \in L_2(0, \pi)$. Имеем оценку

$$|\mu_1(x)| \leq C(\pi - x)^2 \left(1 + \int_0^x \frac{|h_2^0(t)| dt}{(\pi - t)^2} \right). \quad (2.22)$$

Кроме того, для всех $T \in (0, \pi)$ имеем $\mu_1(x) \in W_2^2[0, T]$. Дифференцируя, легко убедиться, что $\mu_1''(x) = -a_2 \alpha_2(x)$. Так как $\mu_1(0) = \mu_1'(0) = 0$, то

$$\mu_1(x) = -a_2 \int_0^x (x - t) \alpha_2(t) dt, \quad 0 \leq x < \pi.$$

Поскольку $(\pi - x) \alpha_2(x) \in L(0, \pi)$, устремляя x к π , с учетом (2.22) приходим к (2.20) и для $k = 2$. Лемма 2.5 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2.1. Рассмотрим соотношение (2.19). Так как $(\pi - x)^3 H(x) \in L_2(0, \pi)$, в силу леммы 2.4 $(\pi - x)^{3/2} \alpha_k(x) \in L_2(0, \pi)$, $k = 1, 2$. Согласно лемме 2.2 для $\theta = 8/5$ заключаем, что $(\pi - x)^{8/5} h(x) \in L_2(0, \pi)$, или, что то же самое, $(\pi - x)^{13/5} H(x) \in L_2(0, \pi)$. Далее, согласно лемме 2.5 имеем (2.20). Поскольку выполнено и (2.4), применяя лемму 2.4 вместе с леммой 2.2 для $0 \leq \theta < 3/2$ еще четыре раза, окончательно уточняем, что $h(x) \in L_2(0, \pi)$, или, что то же самое, $(\pi - x) H(x) \in L_2(0, \pi)$. Теорема 2.1 доказана.

3. Обратная задача. Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 3.1. По характеристическим числам $\{\lambda_k\}$ оператора $A(M, g, v)$ вида (1.1) найти оператор M в предположении, что функции $g(x)$, $v(x)$ известны априори.

Для определенности будем решать задачу 3.1 в классе $\mathcal{A}$. Наряду с оператором $A = A(M, g, v) \in \mathcal{A}$ рассмотрим оператор $\tilde{A} = A(\tilde{M}, g, v) \in \mathcal{A}$. Условимся, что если некоторый символ χ обозначает объект, относящийся к оператору A , то этот символ с тильдой $\tilde{\chi}$ обозначает аналогичный объект, соответствующий оператору $\tilde{A}$. Справедлива теорема единственности решения обратной задачи.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $\{\lambda_k\} = \{\tilde{\lambda}_k\}$, то $M = \tilde{M}$. То есть задание характеристических чисел оператора $A(M, g, v) \in \mathcal{A}$ определяет оператор M однозначно в предположении, что функции $g(x)$, $v(x)$ известны априори.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1.14) из совпадения спектров операторов A , $\tilde{A}$ следует $\mathcal{L}(\lambda) \equiv \tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Отсюда в силу (1.11) приходим к $w(x) = \tilde{w}(x)$ и, следовательно, $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ почти всюду на $(0, \pi)$. Таким образом, обе функции $H(x)$, $\tilde{H}(x)$ удовлетворяют уравнению (2.1). В силу теоремы 2.1 $H(x) = \tilde{H}(x)$, и согласно (1.2) $M''(x) = \tilde{M}''(x)$ почти всюду на $(0, \pi)$, а значит, $M = \tilde{M}$. Теорема 3.1 доказана.

Дадим необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть заданы функции $g(x), v(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $g(0)v(\pi) \neq 0$, и последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда для того, чтобы существовал оператор $A(M, g, v) \in \mathcal{A}$ с характеристическими числами $\{\lambda_k\}$ необходимо и достаточно, чтобы последние имели вид (1.13) и были выполнены условия согласования

$$p = - \int_0^\pi g(x)v(x) dx, \quad \gamma \exp(i\alpha\pi) = ig(0)v(\pi), \quad (3.1)$$

где числа p, γ определяются по формулам (1.15), (1.17) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Асимптотика (1.13) была установлена ранее. Логарифмируя, а затем дифференцируя (1.5) и (1.14), получаем при $\lambda = 0$

$$\mathcal{L}'(0) = - \int_0^\pi g(x)v(x) dx, \quad \mathcal{L}'(0) = p,$$

что дает первое из соотношений (3.1). Второе соотношение получается из сравнения представлений (1.11), (1.16).

Достаточность. По заданной последовательности $\{\lambda_k\}$ строим функцию $\mathcal{L}(\lambda)$ по формуле (1.14). Согласно лемме 1.3 для $\mathcal{L}(\lambda)$ имеет место представление (1.16) с некоторой функцией $w(x) \in L_2(0, \pi)$. Покажем, что если выполнены условия (3.1), то функция $\varphi(x)$, определенная по формуле (2.2) с этой функцией $w(x)$, удовлетворяет условию (2.4). Обозначим

$$w_1(x) = -a_2 + \int_x^\pi w(t) dt, \quad w_2(x) = - \int_x^\pi w_1(t) dt. \quad (3.2)$$

Дважды интегрируя по частям в (1.16), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda) &= \gamma + w_1(0) + i\lambda w_2(0) - (\gamma \exp(i\alpha\pi) - a_2) \exp(-i\lambda\pi) \\ &\quad + \lambda^2 \int_0^\pi w_2(x) \exp(-i\lambda x) dx, \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$\mathcal{L}'(0) = iw_2(0) + i\pi(\gamma \exp(i\alpha\pi) - a_2). \quad (3.3)$$

С другой стороны, в силу (1.14) имеем $\mathcal{L}'(0) = p$, а также согласно (2.2), (3.2)

$$w_2(x) = i\mu_0(x) + ia_2 \int_x^\pi dt \int_t^\pi \varphi(\pi - \tau) d\tau.$$

Поэтому (3.3) можно переписать в виде

$$p = - \int_0^\pi g(x)v(x) dx - a_2 \int_0^\pi (\pi - x)\varphi(x) dx + i\pi(\gamma \exp(i\alpha\pi) - ig(0)v(\pi)),$$

а поскольку $a_2 \neq 0$, то согласно (3.1) имеем (2.4). По теореме 2.1 уравнение (2.1) имеет единственное решение $H(x)$, удовлетворяющее условию (1.3). Находим функцию $N(x)$, $(\pi - x)N(x) \in L_2(0, \pi)$, из уравнения (1.2) и строим $M(x)$ по формуле

$$M(x) = -i + \int_0^x (x - t)N(t) dt.$$

Рассмотрим оператор $A = A(M, g, v)$ вида (1.1). Пусть $\mathcal{L}_1(\lambda)$ – его характеристическая функция. Тогда согласно лемме 1.2 имеем

$$\mathcal{L}_1(\lambda) = a_1 - a_2 \exp(-i\lambda\pi) + \int_0^\pi w(x) \exp(-i\lambda x) dx. \quad (3.4)$$

Вычитая (1.16) из (3.4) и учитывая второе соотношение в (3.1), имеем

$$\mathcal{L}_1(\lambda) - \mathcal{L}(\lambda) = a_1 - \gamma.$$

Так как $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}_1(0) = 1$, то $a_1 = \gamma \neq 0$ и $\mathcal{L}_1(\lambda) \equiv \mathcal{L}(\lambda)$. Следовательно, A является оператором класса $\mathcal{A}$, и его характеристические числа совпадают с $\{\lambda_k\}$. Теорема 3.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Подобные результаты справедливы и для случая, когда M^{-1} является интегро-дифференциальным оператором произвольного натурального порядка.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. А. Юрко за поставленную задачу и руководство ходом исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Юрко, *Обратные спектральные задачи и их приложения*, Изд-во СПИ, Саратов, 2001.
- [2] V. Yurko, *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series*, VSP, Utrecht, 2002.
- [3] В. А. Юрко, “Обратная задача для интегральных операторов”, *Матем. заметки*, **37**:5 (1985), 690–701.
- [4] А. П. Хромов, “Конечномерные возмущения вольтерровых операторов”, Автореферат дисс. ... д.ф.-м.н., *Матем. заметки*, **16**:4 (1974), 669–680.
- [5] А. П. Хромов, “О порождающих функциях интегральных вольтерровых операторов”, *Теория функций и приближений*. Ч. 1, Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 1987, 90–96.
- [6] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [7] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [8] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

С. А. Бутерин

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: buterinsa@info.sgu.ru

Поступило

04.10.2004