Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Вакулов, Операторы сферической свертки в пространствах переменной гёльдеровости, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 5, 683–695

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3077>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:13:45

ОПЕРАТОРЫ СФЕРИЧЕСКОЙ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРЕМЕННОЙ ГЁЛЬДЕРОВОСТИ

Б. Г. Вакулов

В работе исследуются образы оператора типа сферического потенциала комплексного порядка и сферических сверток с ядрами, зависящими от скалярного произведения и имеющими мультипликатор по сферическим гармоникам заданной асимптотики на бесконечности. На основании теорем о действии этих операторов в пространствах переменной гёльдеровости строятся изоморфизмы этих пространств. Изучается действие в пространствах Гёльдера переменного порядка сферических потенциалов с особенностями на полюсах сферы. С помощью стереографической проекции получаются аналогичные изоморфизмы пространств переменной гёльдеровости по n -мерному евклидову пространству (в случае его одноточечной компактификации) с некоторыми степенными весами.

Библиография: 22 названия.

Введение. В работе исследуются сферический оператор типа потенциала K^α и связанный с ним гиперсингулярный интеграл D^α в случае комплексных порядков. Оператор типа потенциала $K^\alpha f$ при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ определяется как оператор сферической свертки в виде

$$(K^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_{n-1}(\alpha)} \int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|x - \sigma|^{n-1-\alpha}} d\sigma, \quad x \in S_{n-1}, \quad (0.1)$$

где $\gamma_{n-1}(\alpha)$ – нормировочная константа (см. вспомогательные сведения в п. 1) и $\alpha \neq n-1, n+1, \dots$. При $\alpha = n-1, n+1, \dots$ оператор K^α модифицируется обычным образом (см., например, [1]–[4]). Для $0 \leq \operatorname{Re} \alpha < 2$ сферический гиперсингулярный интеграл $D^\alpha f$ определяется следующим образом:

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma_{n-1}(-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{S_{n-1} \\ |x - \sigma| \geq \varepsilon}} \frac{f(\sigma) - f(x)}{|x - \sigma|^{n-1+\alpha}} d\sigma, \quad x \in S_{n-1}. \quad (0.2)$$

В работах [5]–[11] для сферического потенциала K^α , гиперсингулярного интеграла D^α при $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$ и $D^{i\theta}$ ($\forall \theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$) при $\operatorname{Re} \alpha = 0$ выясняется их действие в обобщенных классах Гёльдера $H^\omega(S_{n-1})$. Там предполагалось, что характеристика $\omega(t)$ принадлежит классу Φ_β^δ типа Бари–Стечкина, причем β и δ определяются в зависимости от n и $\operatorname{Re} \alpha$. Наряду с операторами K^α , D^α в [8]–[10], [12] рассматривались также операторы

$$\mathcal{D}^\alpha = \frac{1}{b_n} I + D^\alpha, \quad b_n = \frac{\Gamma((n-1-\alpha)/2)}{\Gamma((n-1+\alpha)/2)}, \quad (0.3)$$

для которых при $0 \leq \operatorname{Re} \alpha < 2$, $\alpha \neq 0$, справедливы соотношения

$$\mathcal{D}^\alpha K^\alpha = I, \quad K^\alpha \mathcal{D}^\alpha = I, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 2, \quad \mathcal{D}^{i\theta} \mathcal{D}^{-i\theta} = I \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}. \quad (0.4)$$

На основе полученных результатов, в частности, при $\omega(t) = t^\lambda$, показывалось, что оператор K^α с $0 \leq \operatorname{Re} \alpha < 1$ осуществляет следующий изоморфизм:

$$K^\alpha [H^\lambda(S_{n-1})] = H^{\lambda+\operatorname{Re} \alpha}(S_{n-1}), \quad 0 < \lambda, \quad \operatorname{Re} \alpha < 1, \quad \lambda + \operatorname{Re} \alpha < 1, \quad (0.5)$$

$$\mathcal{D}^{\pm i\theta} [H^\lambda(S_{n-1})] = H^\lambda(S_{n-1}) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (0.6)$$

В [7]–[10] эти результаты обобщались на случай степенного веса.

В настоящей работе операторы (0.1)–(0.3) изучаются в пространствах переменной гёльдеровости. Центральным результатом здесь является получение изоморфизмов

$$K^\alpha [H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})] = H_{k+[\operatorname{Re} \alpha]}^{\lambda(x)+\{\operatorname{Re} \alpha\}}(S_{n-1}), \quad (0.7)$$

$$\mathcal{D}^{\pm i\theta} [H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})] = H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1}) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, \quad (0.8)$$

при условиях

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \inf_{x \in S_{n-1}} \lambda(x) > 0, \quad \{\operatorname{Re} \alpha\} + \sup_{x \in S_{n-1}} \lambda(x) < 1$$

и в предположении, что $\lambda(x)$ удовлетворяет условию

$$|\lambda(y) - \lambda(x)| \leq c |\ln |x - y||^{-1}, \quad x, y \in S_{n-1}, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}. \quad (0.9)$$

Для K^α рассмотрен также случай $\operatorname{Re} \alpha + \sup_{x \in S_{n-1}} \lambda(x) = 1$.

В качестве следствия получен также (с помощью стереографической проекции) изоморфизм пространств переменной гёльдеровости с некоторыми степенными весами в $\mathbb{R}^n$, осуществляемый риссовым потенциалом по $\mathbb{R}^n$.

Отметим еще, что дробные интегралы и дробные производные на отрезке вещественной оси в пространствах Гёльдера переменного порядка ранее рассматривались в [11], [13]–[15]. При изучении дробной производной, а следовательно, и при установлении соответствующего изоморфизма и там возникало условие типа (0.9).

Все встречающиеся ниже постоянные, если не оговорено, будем обозначать одной c . Кроме того, считаем $n \geq 3$. Случай $n = 2$ несколько отличается технически, но также может быть рассмотрен.

1. Вспомогательные сведения. Будем использовать следующие стандартные обозначения многомерного анализа на сфере S_{n-1} в $\mathbb{R}^n$:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

$$S_{n-1} = \{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}, \quad |S_{n-1}| = 2\pi^{(n-1)/2} \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

$$\gamma_{n-1}(\alpha) = 2^\alpha \pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1-\alpha}{2}\right).$$

Отметим, что для придания смысла нормировочному коэффициенту $\gamma_{n-1}(\alpha)$ при $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$, $\alpha \neq 0, -2, \dots$ следует в его выражении множитель $\Gamma(\alpha/2)$ понимать как аналитическое продолжение по α .

Приведем некоторые факты, которыми будем пользоваться. Известен следующий частный случай формулы Функа–Гекке, называемый также формулой Каталана (см., например, [16; с. 20]):

$$\int_{S_{n-1}} f(x \cdot \sigma) d\sigma = C_n \int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt, \quad x \in S_{n-1}, \quad (1.1)$$

где $C_n = |S_{n-2}| = 2\pi^{(n-1)/2}\Gamma^{-1}((n-1)/2)$ означает площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^{n-1}$. С помощью метода вращений, который используется для доказательства формулы (1.1), и с учетом того, что $|x - \sigma| = \sqrt{2(1 - x \cdot \sigma)}$ вычисляются и оцениваются интегралы вида

$$J(a, b, x) = \int_{a < |x - \sigma| < b} g(|x - \sigma|, x) d\sigma, \quad x \in S_{n-1}, \quad (1.2)$$

где $0 \leq a < b \leq 2$. А именно, справедлива

ЛЕММА 1.1. Пусть $n \geq 2$. Тогда с учетом (1.2) имеем

$$J(a, b, x) = 2^{3-n} C_n \int_a^b g(u, x) u^{n-2} (4-u^2)^{(n-3)/2} du, \quad (1.3)$$

и, в частности, при $n \geq 3$

$$|J(a, b, x)| \leq C_n \int_a^b |g(u, x)| u^{n-2} du. \quad (1.4)$$

Из формулы (1.3), в частности, следует, что

$$\int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma}{|x - \sigma|^{n-1-\alpha}} = \gamma_{n-1}(\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

Отметим еще, что

$$\int_{a < |x - \sigma| < b} g(|x - \sigma|) d\sigma = \int_{a < |y - \sigma| < b} g(|y - \sigma|) d\sigma \quad \forall x, y \in S_{n-1}. \quad (1.5)$$

Следующая оценка, представляющая интерес при $\gamma > n - 1$, выводится из формулы (1.4):

$$\int_{|y - \sigma| > 2|x - y|} \frac{d\sigma}{|\sigma - y|^\gamma} \leq \int_{|y - \sigma| > |x - y|} \frac{d\sigma}{|\sigma - y|^\gamma} \leq c|x - y|^{-\gamma+n-1}, \quad \gamma > n - 1, \quad (1.6)$$

см. подробности в [3], [7].

В дальнейшем нам понадобятся известные классические числовые неравенства, которые мы приведем здесь для случая комплексных показателей:

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c|x - y|x^{\operatorname{Re} \mu - 1}, \quad x \geq y > 0, \quad \operatorname{Re} \mu \geq 0, \quad (1.7)$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c|x - y|y^{\operatorname{Re} \mu - 1}, \quad x \geq y > 0, \quad \operatorname{Re} \mu \leq 1, \quad (1.8)$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c|x - y|^{\operatorname{Re} \mu}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad 0 < \operatorname{Re} \mu \leq 1, \quad (1.9)$$

$$|x^\mu - y^\mu| \leq c|x - y|(x + y)^{\operatorname{Re} \mu - 1}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad \operatorname{Re} \mu \geq 1. \quad (1.10)$$

При оценке сферических операторов возникает необходимость в оценках на части сферы, определяемой неравенством $|x - \sigma| \geq 2|x - y|$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $x, y \in S_{n-1}$ и

$$|x - \sigma| \geq 2|x - y|. \quad (1.11)$$

Тогда при $\operatorname{Re} \gamma > 0$ справедливы неравенства

$$||x - \sigma|^{-\gamma} - |y - \sigma|^{-\gamma}| \leq c \frac{|x - y|}{|x - \sigma|^{\operatorname{Re} \gamma} (|x - \sigma| + |x - y|)} \leq c \frac{|x - y|}{|x - \sigma|^{\operatorname{Re} \gamma + 1}}. \quad (1.12)$$

Для доказательства леммы 1.2 вначале заметим, что из упомянутых выше числовых неравенств (1.7)–(1.10) выводится следующее: пусть $a > 0$, $b > 0$ и, кроме того, $a \geq 2|b - a|$, $\operatorname{Re} \gamma > 0$; тогда справедливо неравенство

$$|a^{-\gamma} - b^{-\gamma}| \leq \frac{c}{a^{\operatorname{Re} \gamma}} \cdot \frac{|a - b|}{a + |a - b|}. \quad (1.13)$$

Чтобы вывести отсюда лемму 1.2, полагаем $a = |x - \sigma|$, $b = |y - \sigma|$, так что условие $a \geq 2|b - a|$ выполнено в силу (1.11). Остается применить (1.13) и воспользоваться монотонным возрастанием по ξ функции $\xi/(a + \xi)$, $a > 0$, $\xi > 0$, что приводит к (1.12), см. подробности в [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Через $H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ обозначим банахово пространство непрерывных на S_{n-1} функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\lambda} = \|f\|_C + A_f, \quad A_f = \sup_{x, y \in S_{n-1}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\lambda(x)}} = \sup_{x, y \in S_{n-1}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\lambda(y)}}.$$

Всюду в дальнейшем обозначаем

$$\lambda_- = \inf_{x \in S_{n-1}} \lambda(x), \quad \lambda_+ = \sup_{x \in S_{n-1}} \lambda(x),$$

и предполагаем, что

$$0 < \lambda_- \leq \lambda(x) \leq \lambda_+ < 1.$$

Через K обозначаем оператор сферической свертки, инвариантный относительно всех вращений на сфере,

$$(Kf)(x) = \int_{S_{n-1}} k(x \cdot \sigma) f(\sigma) d\sigma, \quad x \in S_{n-1}. \quad (1.14)$$

Пусть $f_{m\nu}$ – коэффициенты $f(x) \in C^\infty(S_{n-1})$ при ее разложении в ряд Фурье–Лапласа по сферическим гармоникам; как известно, действие оператора K на сферических гармониках сводится к умножению $f_{m\nu}$ на последовательность $\{k_m\}_{m=0}^\infty$, называемую мультипликатором Фурье–Лапласа оператора K и определяемую через ядро $k(t)$, $-1 < t < 1$, по формуле

$$k_m = |S_{n-2}| \int_{-1}^1 k(t) P_m(t) (1 - t^2)^{(n-2)/2} dt,$$

где $P_m(t) = (C_{m+n-3}^m)^{-1} C_m^{(n-2)/2}(t)$ и $C_m^{(n-2)/2}(t)$ – многочлены Гегенбауэра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Через $W_{\lambda,N}$ обозначим класс мультипликаторов $\{k_m\}_{m=0}^\infty$ по сферическим гармоникам, $|k_m| < \infty$, допускающих асимптотику вида

$$k_m = \sum_{j=0}^N c_j m^{\lambda-j} + O(m^{\lambda-N-\varepsilon}), \quad m \rightarrow \infty,$$

где $c_0 \neq 0$, $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$, $N = 0, 1, \dots$.

Еще нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 1.3. Если $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{\lambda,N}$ и $k_m \neq 0$, $m = 0, 1, \dots$, то $\{k_m^{-1}\}_{m=0}^\infty \in W_{\lambda,N}$. Если $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{\lambda,N}$, $\{l_m\}_{m=0}^\infty \in W_{\mu,N}$, то $\{k_m l_m\}_{m=0}^\infty \in W_{\lambda+\mu,N}$.

Доказывается непосредственной проверкой.

ЛЕММА 1.4. Если $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{-\lambda,N}$, где $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\lambda \neq n-1+2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $N \geq [(n+1)/2]$, то оператор, отвечающий этому мультипликатору, имеет вид

$$A\varphi = K^\lambda(aI + B)\varphi = K^\lambda\left(a\varphi + \int_{S_{n-1}} k(x \cdot \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma\right), \quad (1.15)$$

где $k(t) \in L_1([-1, 1])$, $(1-t^2)^{(n-3)/2}$ и $a = \lim_{m \rightarrow \infty} m^\lambda k_m$. Если $N > n+1 - \operatorname{Re} \lambda$, то оператор, отвечающий этому мультипликатору, имеет вид

$$A\varphi = \int_{S_{n-1}} k(x \cdot \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma + \sum_{j=0}^N c_j K^{\lambda+j}$$

в случае $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и

$$A\varphi = c_0\varphi + \int_{S_{n-1}} k(x \cdot \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma + \sum_{j=1}^N c_j K^j \quad (1.16)$$

в случае $\lambda = 0$. Здесь $k(t) \in C^1([-1, 1])$, $c_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} m^\lambda k_m$.

Лемма 1.4 следует из вида мультипликатора по сферическим гармоникам для оператора (0.1):

$$k_m = \frac{\Gamma(m + (n-1-\alpha)/2)}{\Gamma(m + (n-1+\alpha)/2)}, \quad (1.17)$$

известного асимптотического представления для $\Gamma(z+a)/\Gamma(z+b)$ при $z \rightarrow \infty$ (см. [17; с. 20]) и леммы 1.3 (подробнее см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Через $C^\lambda(S_{n-1})$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ обозначаем замыкание пространства $C^\infty(S_{n-1})$ по норме $\|f\|_{C(S_{n-1})} + \|D^\lambda f\|_{C(S_{n-1})}$, где D^λ произвольный оператор сферического дифференцирования (сферический оператор свертки) с мультипликатором класса $W_{\lambda,N}$, $N \geq [(n+1)/2]$ ($[\cdot]$ – целая часть числа).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пространствами переменной гёльдеровости старших порядков на сфере S_{n-1} назовем пространство

$$H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1}) = \{f : f(\sigma) \in C^k(S_{n-1}); A_{D^k} f < \infty\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где D^k – сферический оператор дифференцирования с мультипликатором из $W_{k,N}$, $N > n+1$.

При таких условиях пространство $C^\lambda(H_k^{\lambda(x)})$ с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора оператора $D^\lambda (D^k)$.

Доказательство первого факта приводится в [3], [12], при этом используется лемма 1.4 (представление (1.15)), а доказательство второго проводится по аналогии со случаем обычных и обобщенных гёльдеровских пространств ср. с [3], [5], [6].

Через $H_0^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ естественно обозначить $H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$.

Приведем несколько примеров таких функций.

ПРИМЕР 1. $f(x) = \prod_{k=1}^n |x - x^{(k)}|^{\lambda_k}$, $0 < \lambda_k \leq 1$, $x, x^{(k)} \in S_{n-1}$. Тогда $f(x) \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, где $\lambda(x) = \lambda_k$ для $|x^{(i)} - x^{(j)}| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{1}{4} \inf_{i \neq j} |x^{(i)} - x^{(j)}|$, и $\lambda(x) = 1$ для всех других x .

ПРИМЕР 2. Пусть $x \in S_{n-1}$, $f_j(x) = |x_j| + \sum_{k=2}^\infty 2^{-k} \sqrt{|x_j - k^{-1}|}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Понятно, что $f_j(x) \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, где $\lambda(x) = 2^{-1}$ при всех $x \in S_{n-1}$, $x_j \neq 0$ и $\lambda(x) = 1$, $x \in S_{n-1}$, $x_j = 0$.

ПРИМЕР 3. Пусть $x \in S_{n-1}$, $Q = \{x_j^k\}_{k=1}^\infty$, где k – верхний индекс, – упорядоченная последовательность рациональных чисел из $[-1, 1]$. Представим $Q = \bigcup_i Q_i$, где $\{x_j^{k_i}\} \in Q_i$ и $1/(k+1) < |x_j^{k_i}| < 1/k$. Положим

$$f_j(x) = |x_j| + \sum_{k=2}^\infty 2^{-k} \sum_{i=1}^\infty |x_j^{k_i} - x_j|^{\delta_{k_i}} 2^{-i}, \quad \delta_{k_i} \in (0, 1),$$

$$\inf_{k,i} \delta_{k_i} = \delta_0 > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда, очевидно, $f_j(x) \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, где $\lambda(x) = \delta_0$ при всех $x \in S_{n-1}$, $x_j \neq 0$ и $\lambda(x) = 1$, $x \in S_{n-1}$, $x_j = 0$.

Различные варианты пространств такого типа ранее рассматривались в одномерном случае в работах [11], [13], [14], [18]–[20].

2. Сферические операторы в пространстве $H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})$. Изоморфизм пространств переменной гёльдеровости. ¹⁰ Случай $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ и $\lambda_+ > 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\lambda_+ + \operatorname{Re} \alpha < 1$. Тогда $K^\alpha f \in H^{\lambda(x) + \operatorname{Re} \alpha}(S_{n-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя идее доказательства из [5], [6], вначале укажем важное представление для разности $(K^\alpha f)(x) - (K^\alpha f)(y)$. Ясно, что нормировочный множитель $\gamma_{n-1}^{-1}(\alpha)$ войдет мультипликативно и в константу c в правых частях последующих неравенств. По этой причине при доказательстве достаточно рассматривать оператор $K^\alpha f$ без него, что мы и будем делать. Кроме того, всюду в дальнейшем будем обозначать

$$|x - y| = h \tag{2.1}$$

и считать, что $0 < h < 1$. С учетом того, что в силу (1.1) и (1.5)

$$\int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma}{|x - \sigma|^{n-1-\alpha}} = \int_{S_{n-1}} \frac{d\sigma}{|y - \sigma|^{n-1-\alpha}},$$

имеем

$$\begin{aligned} (K^\alpha f)(x) - (K^\alpha f)(y) &= \int_{|x-\sigma| < 2h} \frac{f(\sigma) - f(x)}{|x - \sigma|^{n-1-\alpha}} d\sigma - \int_{|x-\sigma| < 2h} \frac{f(\sigma) - f(x)}{|y - \sigma|^{n-1-\alpha}} d\sigma \\ &\quad + \int_{|x-\sigma| > 2h} [f(\sigma) - f(x)] \{ |x - \sigma|^{\alpha-n+1} - |y - \sigma|^{\alpha-n+1} \} d\sigma \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Слагаемые I_1 , I_2 , I_3 в (2.2) оцениваются по отдельности. Для I_1 имеем

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c \int_{|x-\sigma| < 2h} \frac{|\sigma - x|^{\lambda(x)}}{|x - \sigma|^{n-1-\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma \leq c \int_0^{2h} t^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha-1} dt \\ &\leq c \frac{h^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha}}{\lambda(x) + \operatorname{Re} \alpha} \leq ch^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha}. \end{aligned}$$

При оценке I_2 имеем

$$|I_2| \leq c \int_{|y-\sigma| < 2h} \frac{|\sigma - x|^{\lambda(x)}}{|\sigma - y|^{n-1-\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma. \quad (2.3)$$

Применяя в (2.3) неравенство треугольника $|\sigma - x| \leq |y - \sigma| + |x - y|$, легко получаем

$$|I_2| \leq c \int_{|y-\sigma| < 3h} \frac{|\sigma - y|^{\lambda(x)}}{|\sigma - y|^{n-1-\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma + ch^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha} \int_{|y-\sigma| < 3h} \frac{d\sigma}{|\sigma - y|^{n-1-\operatorname{Re} \alpha}}.$$

Здесь мы учли тот факт, что $\{\sigma : |x - \sigma| < 2h\} \subset \{\sigma : |\sigma - y| < 3h\}$. Окончательную оценку для I_2 можно получить, применяя (1.4) и вычисляя соответствующие интегралы:

$$|I_2| \leq ch^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha}.$$

При оценке I_3 , используя (1.12) при $\gamma = n - 1 - \alpha$, так что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, находим

$$|I_3| \leq ch \int_{|x-\sigma| > 2h} \frac{|x - \sigma|^{\lambda(x)}}{|x - \sigma|^{n-\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma \leq ch \int_{2h}^\infty \frac{u^{\lambda(x)}}{u^{2-\operatorname{Re} \alpha}} du. \quad (2.4)$$

Далее, вычисляя в (2.4) интеграл, получаем

$$|I_3| \leq c \frac{h^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha}}{1 - \lambda(x) - \operatorname{Re} \alpha}. \quad (2.5)$$

Так как $\lambda_+ + \operatorname{Re} \alpha < 1$, из (2.5) следует

$$|I_3| \leq ch^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha}.$$

Что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. После анализа доказательства теоремы 2.1 становится понятным и случай $\lambda_+ + \operatorname{Re} \alpha = 1$. Здесь, очевидно,

$$|(K^\alpha f)(x) - (K^\alpha f)(y)| \leq \frac{ch^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha}}{1 - \lambda(x) - \operatorname{Re} \alpha}$$

для всех $y \in S_{n-1}$ и тех $x \in S_{n-1}$, для которых $\lambda(x) + \operatorname{Re} \alpha < 1$ и

$$|(K^\alpha f)(x) - (K^\alpha f)(y)| \leq ch^{\lambda(x)+\operatorname{Re} \alpha} \ln h^{-1}$$

для всех $x, y \in S_{n-1}$, где $\lambda(x) + \operatorname{Re} \alpha = 1$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, $\lambda_- > 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $0 < \lambda_- - \operatorname{Re} \alpha < 1$ и выполнено условие (0.9). Тогда $D^\alpha f \in H^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha}(S_{n-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, при доказательстве используем запись для $D^\alpha f$ без мультипликативной постоянной $\gamma_{n-1}^{-1}(-\alpha)$. Имеем

$$\begin{aligned} & (D^\alpha f)(x) - (D^\alpha f)(y) \\ &= \int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma) - f(x)}{|x - \sigma|^{n-1+\alpha}} d\sigma - \int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma) - f(y)}{|y - \sigma|^{n-1+\alpha}} d\sigma = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= \int_{|x-\sigma| < 2h} \frac{f(\sigma) - f(x)}{|x - \sigma|^{n-1+\alpha}} d\sigma - \int_{|x-\sigma| < 2h} \frac{f(\sigma) - f(y)}{|y - \sigma|^{n-1+\alpha}} d\sigma \\ &\quad + [f(x) - f(y)] \int_{|x-\sigma| > 2h} \frac{d\sigma}{|\sigma - y|^{n-1+\alpha}} \\ &\quad + \int_{|x-\sigma| > 2h} [f(\sigma) - f(x)] \{ |x - \sigma|^{-\alpha-n+1} - |y - \sigma|^{-\alpha-n+1} \} d\sigma. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для A_1 имеем

$$|A_1| \leq c \int_{|x-\sigma| < 2h} \frac{|\sigma - x|^{\lambda(x)}}{|x - \sigma|^{n-1+\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma \leq c \int_0^{2h} t^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha-1} dt \leq c \frac{h^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha}}{\lambda(x) - \operatorname{Re} \alpha}.$$

Так как $\lambda_- - \operatorname{Re} \alpha > 0$, то

$$|A_1| \leq ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha}. \quad (2.7)$$

При оценке A_2 имеем

$$|A_2| \leq c \int_{|y-\sigma| < 3h} \frac{|\sigma - y|^{\lambda(y)}}{|\sigma - y|^{n-1+\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma \leq ch^{\lambda(y)-\operatorname{Re} \alpha}.$$

Здесь мы учли оценку (2.7) и тот факт, что $\{\sigma : |x - \sigma| < 2h\} \subset \{\sigma : |\sigma - y| < 3h\}$. Далее, при $\lambda(y) - \lambda(x) \geq 0$ очевидно, что

$$|A_2| \leq ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha}.$$

При $\lambda(y) - \lambda(x) < 0$ с учетом (0.9) получаем

$$|A_2| \leq ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha} \exp(|\lambda(y) - \lambda(x)| |\ln h|^{-1}) \leq ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha}. \quad (2.8)$$

Ввиду оценки (1.6) имеем

$$|A_3| \leq ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha}. \quad (2.9)$$

При оценке A_4 , используя (1.12) при $\gamma = n - 1 + \alpha$, так что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, получаем

$$|A_4| \leq ch \int_{|x-\sigma| > 2h} \frac{|x - \sigma|^{\lambda(x)}}{|x - \sigma|^{n+\operatorname{Re} \alpha}} d\sigma \leq ch \int_{2h}^2 \frac{u^{\lambda(x)}}{u^{2+\operatorname{Re} \alpha}} du. \quad (2.10)$$

Далее, вычисляя интеграл в (2.10), получаем

$$|A_4| \leq c \frac{h^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha}}{1 - \lambda(x) + \operatorname{Re} \alpha} \leq ch^{\lambda(x)-\operatorname{Re} \alpha}. \quad (2.11)$$

Собирая полученные оценки, получаем нужное.

2⁰. Случай $\operatorname{Re} \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. Рассмотрим теперь оператор D^α в случае, когда $\alpha = \pm i\theta$ чисто мнимое, понимая его, как и при $\operatorname{Re} \alpha > 0$, в виде (0.2). Оператор $D^{\pm i\theta}$ обладает как свойствами сферического потенциала, так и гиперсингулярного интеграла.

Для дальнейшего нам понадобится следующая вспомогательная

ЛЕММА 2.1. Пусть $\theta \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Тогда $\sup_{0 < h < 1} |I(h)| < \infty$, где

$$I(h) = \int_{|x-\sigma|>2h} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}}, \quad h = |x-y|. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что интеграл в (2.12) инвариантен относительно всех вращений по x и y на сфере и, следовательно, зависит только от $h = |x-y|$, так что обозначение $I(h)$ корректно. Используя аддитивные свойства интеграла, имеем

$$I(h) = \int_{\substack{|x-\sigma|>2h \\ |y-\sigma|>2h}} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}} + \int_{\substack{|x-\sigma|>2h \\ h<|y-\sigma|<2h}} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2.$$

Оценка $\tilde{I}_2$ проста, поскольку с учетом (1.4) имеем

$$|\tilde{I}_2| \leq c \int_h^{2h} \frac{du}{u} = c \ln 2.$$

Для оценки $\tilde{I}_1$ представим его в следующем виде:

$$|\tilde{I}_1| = \int_{|y-\sigma|>2h} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}} - \int_{\substack{h<|x-\sigma|<2h \\ |y-\sigma|>2h}} \frac{d\sigma}{|y-\sigma|^{n-1+i\theta}} = \tilde{I}'_1 + \tilde{I}''_1.$$

Интеграл $\tilde{I}''_1$ также оценивается абсолютно и подобно $\tilde{I}_2$, так что $|\tilde{I}''_1| \leq c \ln 2$. Итак, остается оценить $\tilde{I}'_1$. На основе (1.3) имеем

$$\tilde{I}'_1 = 2^{3-n} C_n \int_{2h}^2 u^{-1+i\theta} [(4-u^2)^{(n-3)/2} - 2^{n-3}] du + C_n \int_{2h}^2 u^{-1+i\theta} du = \tilde{I}'_1 + \tilde{I}''_1.$$

Интеграл $\tilde{I}'_1$ сходится абсолютно ($n \geq 2$). Что касается $\tilde{I}''_1$, то непосредственная оценка дает $|\tilde{I}''_1(h)| \leq 2C_n/|\theta|$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ и выполнено условие (0.9). Тогда $\mathcal{D}^{\pm i\theta} f \in H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем использовать представление (2.6) и при $\alpha = \pm i\theta$, а далее нужно только проанализировать, где следует видоизменить доказательство. Ясно, что оценки $|A_1|$ и $|A_2|$ сохраняются. При оценке $|A_4|$ мы приходим к оценкам типа (2.10), (2.11) и на этом останавливаемся. Наконец, оценивая A_3 , например, для случая $\alpha = i\theta$, имеем $|A_3| \leq h^{\lambda(x)} |I(h)|$ и остается воспользоваться леммой 2.1, что приводит к оценке $|A_3| \leq ch^{\lambda(x)}$. Объединяя все оценки, получаем требуемое.

3⁰. Изоморфизм пространств переменной гёльдеровости.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $f \in H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\alpha \neq n-1, n+1, \dots, \lambda_+ + \{\operatorname{Re} \alpha\} < 1$ и выполнено условие (0.9). Тогда K^α осуществляет изоморфизм между пространствами $H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ и $H_{k+[\operatorname{Re} \alpha]}^{\lambda(x)+\{\operatorname{Re} \alpha\}}(S_{n-1})$, а оператор $\mathcal{D}^{\pm i\theta}$ сохраняет пространство $H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, т.е. справедливы представления (0.7) и (0.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $k = 1$. Первое утверждение теоремы 2.4 следует из теорем 2.1, 2.2, представления (0.5) и вложений $H^{\lambda+}(S_{n-1}) \subset H^{\lambda(x)}(S_{n-1}) \subset H^{\lambda-}(S_{n-1})$, а второе из теоремы 2.3 и представления (0.6).

Случай $\operatorname{Re} \alpha \geq 1$, $k \geq 1$ сводится к случаю $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $k = 0$ за счет выбора $D^{[\operatorname{Re} \alpha]}$: $D^{[\operatorname{Re} \alpha]}K^\alpha = K^{\alpha - [\operatorname{Re} \alpha]}$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть оператор A^α имеет мультипликатор $\{k_m\}_{m=0}^\infty$. Если $\{k_m\}_{m=0}^\infty \in W_{-\alpha, N}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $N > n + 1$, $k_m \neq 0$, $m = 0, 1, \dots$, $\alpha \neq n - 1, n + 1, \dots$, то

$$A^\alpha(H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})) = H_{k+[\operatorname{Re} \alpha]}^{\lambda(x) + \{\operatorname{Re} \alpha\}}(S_{n-1})$$

при выполнении условия (0.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь также достаточно рассмотреть случай $k = 0$ и $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, так как случай $\operatorname{Re} \alpha \geq 1$ получается за счет выбора $D^{[\operatorname{Re} \alpha]}$: $D^{[\operatorname{Re} \alpha]}A^\alpha = A^{\alpha - [\operatorname{Re} \alpha]}$. Для оператора A^α в силу (1.16) из леммы 1.4 справедливо представление

$$A^\alpha = K^\alpha(cI + B).$$

Так как оператор B имеет структуру

$$B = \int_{S_{n-1}} k(x \cdot \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma + \sum_{j=1}^N c_j K^j,$$

где $k(t) \in C^1([-1, 1])$, а K^j – потенциалы целого порядка j , очевидно, он сохраняет переменную гёльдеровость и поэтому в силу теоремы 2.4 и изоморфизма (0.7) мы получаем нужное.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Утверждение теоремы 2.5 означает существование и единственность решения многомерного интегрального уравнения первого рода, порождаемого оператором (1.14), в пространствах гёльдеровских функций переменного порядка.

К операторам, удовлетворяющим условиям теоремы 2.5, относится ряд известных операторов сферической свертки, см., например, [2]–[4], [12]:

$$(K_1^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} P_r f(t) dr, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

$$(K_2^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{\alpha-1} P_r f(t) dr, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

где

$$P_r f(x) = \frac{1}{c_n} \int_{S_{n-1}} \frac{(1-r^2)}{|rx' - \sigma|^n} f(\sigma) d\sigma, \quad x' = \frac{x}{|x|}, \quad r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

а c_n – хорошо известная нормировочная постоянная для оператора Пуассона,

$$(K_3^\alpha f)(x) = \int_{S_{n-1}} \chi_{n-\alpha} \left(\frac{1+x \cdot \sigma}{2} \right) f(\sigma) d\sigma,$$

где

$$\chi(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(\beta)_j z^j}{((\beta+1)/2)_j j}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (\beta)_j = \beta(\beta+1) \cdots (\beta+j-1),$$

с мультипликаторами по сферическим гармоникам

$$k_m^1 = \frac{1}{(m+1)^\alpha}, \quad k_m^2 = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1+\alpha)}, \quad k_m^3 = \frac{\Gamma((m+n-\alpha)/2)\Gamma(m/2)}{\Gamma((m+\alpha)/2)\Gamma((m+n)/2)}$$

соответственно.

4⁰. Операторы типа потенциала с особенностями на полюсах в пространствах гёльдеровских функций переменного порядка. Рассмотрим двуполосный потенциал

$$(\mathbf{K}^\alpha f)(x) = c \int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma)}{|x - \sigma|^{n-1-\alpha} |x + \sigma|^{n-1-\alpha}} d\sigma, \quad x \in S_{n-1},$$

где $n \geq 3$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и c – некоторая нормировочная постоянная, имеющий мультипликатор по сферическим гармоникам (см. [21; формула (18) с. 519]):

$$k_m = c 2^{\alpha-n+1} |S_{n-2}| (-1)^m \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2)} {}_3F_2 \left(-m, m+n-2, \frac{\alpha}{2}, \alpha, \frac{n-1}{2}; 1 \right). \quad (2.13)$$

Используя формулу (4), с. 173 из [17], после несложных преобразований, из (2.13) получаем

$$k_m = c_1 [1 + (-1)^m] \frac{\Gamma((m+1)/2)\Gamma((m-\alpha+n-1)/2)}{\Gamma((m+n-1)/2)\Gamma((1+m+\alpha)/2)} \sim c m^{-\alpha}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

где

$$c_1 = c 2^{\alpha-n} |S_{n-2}| \pi^{-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+3-n}{2}\right) \sin \frac{(n-\alpha-1)\pi}{2}.$$

Обозначим $A = \frac{1}{2}(I + Q)$, где Q оператор отражения на сфере, действующий по правилу $(Qf)(x) = f(-x)$. Ясно, что оператор A имеет мультипликатор вида $k_m = 0$, если m нечетное и $k_m = 1$, если m четное.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\alpha \neq n-1, n+1, \dots$. Тогда

$$\mathbf{K}^\alpha = A(c_2 I + B_1) K^\alpha, \quad (2.15)$$

где c_2 – некоторая константа, порождаемая асимптотическим разложением мультипликатора оператора K^α , а оператор B_1 сохраняет переменную гёльдеровость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство (2.15) вытекает из представления (2.14) для мультипликатора $\mathbf{K}^\alpha$, известного асимптотического представления для $\Gamma(z+a)/\Gamma(z+b)$ (см. [17; с. 20] и леммы 1.4; подробнее см. также [4]).

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $f \in H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\lambda_+ + \{\operatorname{Re} \alpha\} < 1$. Тогда справедливо вложение

$$\mathbf{K}^\alpha(H_k^{\lambda(x)}(S_{n-1})) \rightarrow H_{k+[\operatorname{Re} \alpha]}^{\lambda(x)+\{\operatorname{Re} \alpha\}}(S_{n-1}). \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из представления (2.14), теоремы 2.4 и того факта, что операторы A и B_1 сохраняют переменную гёльдеровость.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Очевидно, что оператор $\mathbf{K}^\alpha$ не удовлетворяет одному из условий теоремы 2.5, а именно тому, что $k_m \neq 0$, $m = 0, 1, \dots$, поэтому вместо изоморфизма мы имеем одностороннее вложение (2.16). Однако если рассматривать только четные функции, то для них соответствующий изоморфизм имеет место при условии (0.9).

3. Риссов потенциал по $\dot{\mathbb{R}}^n$ в пространствах переменной гёльдеровости с некоторыми степенными весами. Рассмотрим риссов потенциал по $\mathbb{R}^n$

$$(K^\alpha f)(\xi) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\eta)}{|\xi - \eta|^{n-\alpha}} d\eta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < n, \quad (3.1)$$

в пространствах переменной гёльдеровости в $\mathbb{R}^n$ с весом $H^{\lambda(\xi)}(\dot{\mathbb{R}}^n, r) = \{f : rf \in H^{\lambda(\xi)}(\dot{\mathbb{R}}^n)\}$, где

$$H^{\lambda(\xi)}(\dot{\mathbb{R}}^n) = \left\{ f : f \in C(\dot{\mathbb{R}}^n); \sup_{\eta, \xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(\eta) - f(\xi)|}{(|\eta - \xi|/\sqrt{(1+|\eta|^2)(1+|\xi|^2)})^{\lambda(\xi)}} < \infty \right\},$$

$$0 < \lambda_- \leq \lambda(\xi) \leq \lambda_+ < 1, \quad \lambda_- = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \lambda(\xi), \quad \lambda_+ = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \lambda(\xi).$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Оператор (3.1), $0 < \operatorname{Re} \alpha$, $\lambda_+ + \operatorname{Re} \alpha < 1$, изоморфно отображает $H^{\lambda(\xi)}(\dot{\mathbb{R}}^n, (1+|\xi|)^{(n+\alpha)/2})$ на $H^{\lambda(\xi)+\operatorname{Re} \alpha}(\dot{\mathbb{R}}^n, (1+|\xi|)^{(n-\alpha)/2})$ при условии, что $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x_1/(1-x_{n+1}), \dots, x_n/(1-x_{n+1}))$ удовлетворяет условию (0.9) для всех $x \in S_n$, $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из теоремы 2.4 с помощью стереографической проекции сферы $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ на $\dot{\mathbb{R}}^n$ (случай одноточечной компактификации $\mathbb{R}^n$), которая переводит оператор (0.1) по S_n в риссов потенциал (с весом $(1+|\xi|)^{(n-\alpha)/2}$) по $\mathbb{R}^n$. Действительно, известно, что вектор-функция преобразования координат $v(\xi)$ при этом преобразовании имеет вид (см. [22; с. 35])

$$\sigma_k = \frac{\xi_k}{1+|\xi|^2}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad \sigma_{n+1} = \frac{1-|\xi|^2}{1+|\xi|^2},$$

а также справедливы следующие формулы:

$$|x - \sigma| = \frac{|\xi - \eta|}{\sqrt{(1+|\xi|^2)(1+|\eta|^2)}}, \quad d\sigma = \frac{2^n d\xi}{(1+|\xi|^2)^n}, \quad (3.2)$$

где $\xi, \eta \in \dot{\mathbb{R}}^n$, а $x, \sigma \in S_n$ — их образы при стереографической проекции. Поэтому с учетом (3.1), (3.2) имеем

$$\int_{S_n} \frac{f(\sigma)}{|x - \sigma|^{n-\alpha}} d\sigma = 2^\alpha (1+|\eta|^2)^{(n-\alpha)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(v(\eta))(1+|\xi|^2)^{-(n-\alpha)/2}}{|\xi - \eta|^{n-\alpha}} d\eta.$$

Кроме того, очевидно, что при стереографической проекции класс $H^{\lambda(x)}(S_{n-1})$ переходит в класс $H^{\lambda(v(\xi))}(\dot{\mathbb{R}}^n)$. Отсюда и следует требуемое.

Утверждение типа теоремы 3.1 было известно ранее для обобщенных пространств Гёльдера с характеристиками из классов типа Бари–Стечкина (см. [5]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. М. Павлов, С. Г. Самко, “Описание пространств $L_p^\alpha(S_{n-1})$ в терминах гиперсингулярных интегралов”, *Докл. АН СССР*, **276**:3 (1984), 546–550.
- [2] С. Г. Самко, “Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу”, *Изв. вузов. Матем.*, 1983, № 4, 28–42.

- [3] S. G. Samko, B. G. Vakulov, "On equivalent norms in fractional order functions spaces of continuous functions on the unit sphere", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **3**:4 (2000), 401–433.
- [4] S. G. Samko, "Hypersingular integrals and their applications", *Analytical Methods and Special Functions*, **5**, Taylor & Francis, London–New York, 2002, 358–373.
- [5] Б. Г. Вакулов, "Операторы типа потенциала на сфере в обобщенных классах Гёльдера", *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 11, 66–69.
- [6] Б. Г. Вакулов, "Операторы типа потенциала на сфере в обобщенных пространствах Гёльдера", *Деп. ВИНТИ* № 1563-B86 (06.05.1986), Ростовский ун-т, Ростов-на-Дону, 1986.
- [7] Б. Г. Вакулов, "Сферические операторы типа потенциала в обобщенных пространствах Гёльдера с весом на сфере", *Изв. вузов Сев.-Кавк. региона. Естеств. науки*, 1999, № 4, 5–10.
- [8] Б. Г. Вакулов, Н. К. Карапетянц, Л. Д. Шанкишвили, "Сферические потенциалы комплексного порядка в обобщенных пространствах Гёльдера с весом", *Докл. РАН*, **382**:3 (2002), 1–4.
- [9] B. G. Vakulov, N. K. Karapetians, L. D. Shankishvili, "Spherical hypersingular operators of imaginary order and their multipliers", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **4**:1 (2001), 101–112.
- [10] Б. Г. Вакулов, Н. К. Карапетянц, Л. Д. Шанкишвили, "Сферические потенциалы комплексного порядка в обобщенных гёльдеровых пространствах", *Изв. НАН Армении*, **36**:2 (2001), 54–78.
- [11] А. И. Гинзбург, Н. К. Карапетянц, "Дробное интегродифференцирование в гёльдеровских классах переменного порядка", *Докл. РАН*, **339**:4 (1994), 439–441.
- [12] Б. Г. Вакулов, "Об эквивалентных нормировках в пространствах функций комплексной гладкости на сфере", *Тр. ИМ НАН Беларуси*, **9**, Минск, 2001, 41–44.
- [13] N. K. Karapetians, A. I. Ginzburg, "Fractional integrodifferentiation in Hölder classes of arbitrary order", *Georgian Math. J.*, **2**:2 (1995), 141–150.
- [14] N. K. Karapetians, A. I. Ginzburg, "Fractional integrals and singular integrals in the Hölder classes of variable order", *Integral Transform. Spec. Funct.*, **2**:2 (1994), 91–106.
- [15] B. Ross, S. Samko, "Fractional integration operator of variable order in the Hölder spaces $H^{\lambda(x)}$ ", *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **18**:4 (1995), 777–788.
- [16] С. Г. Самко, *Гиперсингулярные интегралы и их приложения*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1984.
- [17] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983.
- [18] K. Daodi, J. Levy Vehel, Y. Meyer, "Construction of continuous functions with prescribed local regularity", *Constructive Approximation*, **14**:3 (1998), 349–385.
- [19] Д. И. Мамедханов, А. А. Нерсисян, "О конструктивной характеристике класса $H_{\alpha}^{\lambda+\alpha}(x_0, [-\pi, \pi])$ ", *Исследования по теории линейных операторов*, Баку, 1987, 74–78.
- [20] Н. Б. Плещинский, "О построении функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с заданным показателем", *Изв. вузов. Матем.*, 1984, № 8, 74–77.
- [21] Ю. Люк, *Специальные математические функции и их аппроксимации*, Мир, М., 1980.
- [22] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Физматгиз, М., 1962.

Б. Г. Вакулов

Ростовский государственный университет

E-mail: vakulov@ns.math.rsu.ru

Поступило

07.08.2003